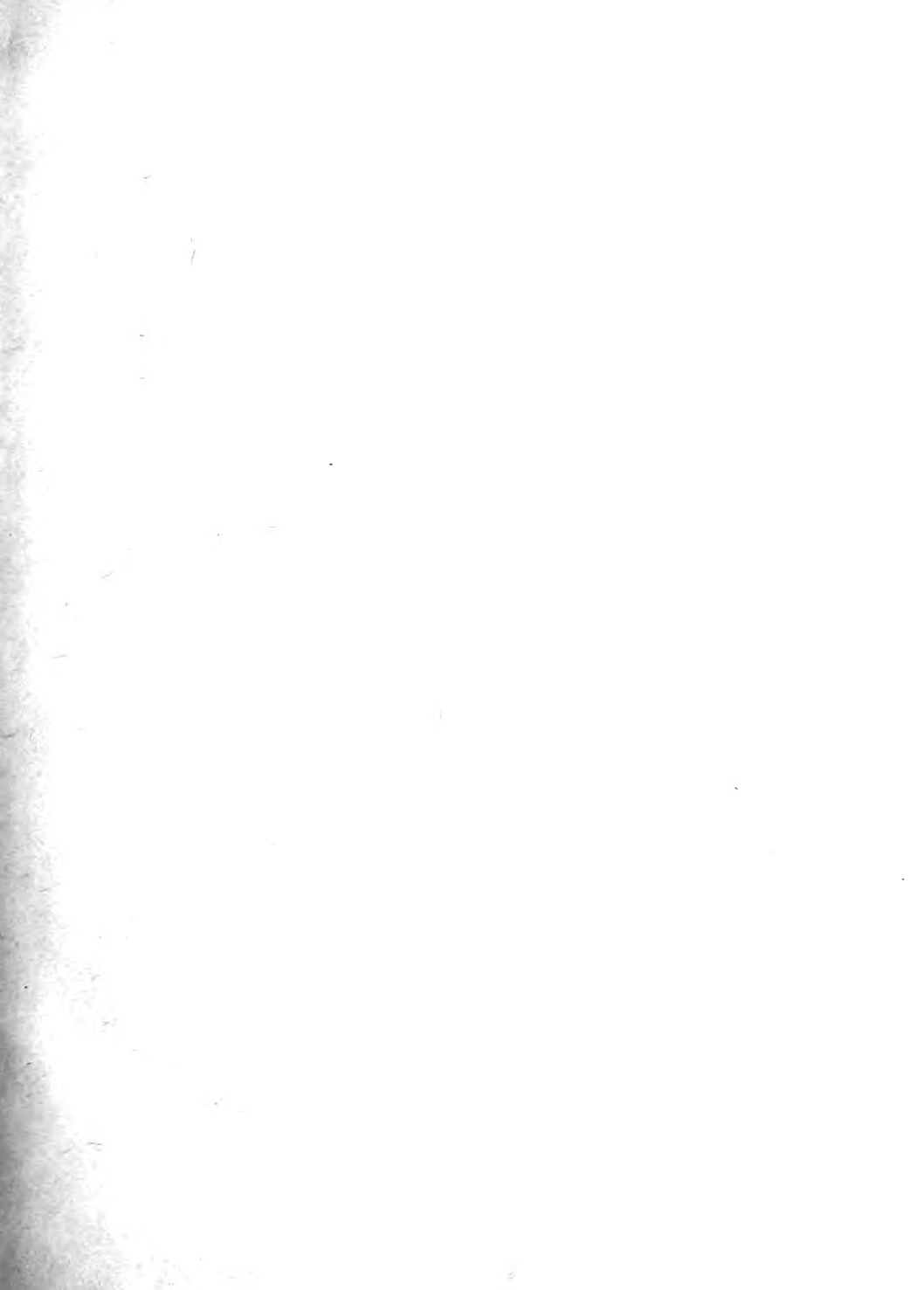




S. 804. B.







HISTOIRE  
DE  
L'ACADÉMIE  
ROYALE  
DE SCIENCES.

---

ANNÉE M. DCCLXXII. Seconde Partie.

---

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,  
pour la même Année,  
*Tirés des Registres de cette Académie.*



A PARIS,  
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

---

M. DCCLXXVI.





# T A B L E

## POUR L'HISTOIRE.

---

### PHYSIQUE GÉNÉRALE.

<i>SUR un Insecte qui s'attache à la Cheyrette . . . . .</i>	Page 1
<i>Sur l'Animal Porte-musc . . . . .</i>	4
<i>Sur la comparaison des différentes Toises qui ont servi à la mesure des Degrés Terrestres . . . . .</i>	8
<i>Sur la destruction du Diamant par le feu . . . . .</i>	13
<i>Sur la pesanteur spécifique des Corps . . . . .</i>	30
<i>Sur le Varech . . . . .</i>	38
<i>Sur la supériorité des Pièces d'Artillerie, longues &amp; solides, sur les Pièces courtes &amp; légères . . . . .</i>	44
<i>Sur la variation &amp; l'inclinaison de l'Aiguille aimantée . . . . .</i>	56

---

### A N A T O M I E.

<i>Sur les changemens qu'éprouve l'os appelé le Canon, dans certains Quadrupèdes . . . . .</i>	62
<i>Sur les secours qu'on peut tirer de l'Art, pour corriger ou prévenir les difformités de la taille, soit dans l'enfance, soit dans un âge avancé . . . . .</i>	68
<i>Sur l'Anatomie des Oiseaux . . . . .</i>	73
<i>Observations Anatomiques . . . . .</i>	81

# T A B L E.

---

## C H I M I E.

86

*Sur l'usage de l'Esprit-de-vin dans l'Analyse des Eaux minérales.*

127

---

## A L G È B R E.

*Sur le Calcul intégral, & sur le Système du Monde.....* 87

*Sur la manière de distinguer à priori, la réalité & le signe des racines des Équations.....* 89

---

## A S T R O N O M I E.

*Sur l'Astronomie des Indiens.....* 93

*Sur un Voyage fait en Portugal & à Madère.....* 112

*Éloge de M. Buache.....* 135

---



# T A B L E

## POUR LES MÉMOIRES.

<i>SUR la pesanteur spécifique des Corps. Premier Mémoire.</i> Par M. BRISSON .....	Page 1
<i>Sur un Insecte qui s'attache à la Chevrette.</i> Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY .....	29
<i>Observations de Vénus, dans sa plus grande digression, &amp; Observations de Jupiter, dans son opposition avec le Soleil; faites à l'Observatoire Royal en 1772.</i> Par M. JEURAT.	35
<i>Description de plusieurs Bouffoles qui sont établies dans le parc de Denainvilliers, pour observer les variations de l'Aiguille aimantée, tant en déclinaison qu'en inclinaison.</i> Par M. DU HAMEL .....	44
<i>Second Mémoire sur le Varech.</i> Par M. <sup>rs</sup> FOUGEROUX DE BONDAROY & TILLET .....	55
<i>Mémoire touchant la supériorité des Pièces d'Artillerie longues &amp; solides, sur les Pièces courtes &amp; légères, &amp;c.</i> Par M. le Marquis DE VALLIÈRE .....	77
<i>Suite du Voyage fait par ordre du Roi, en 1753, en Portugal &amp; à Madère. Seconde Partie. Section première.</i> Par M. DE BORY .....	115
<i>Suite du Voyage fait par ordre du Roi, en 1753, en Portugal &amp; à Madère. Seconde Partie. Section seconde.</i> Par le même .....	145

# T A B L E.

<i>Premier Mémoire sur l'Inde , particulièrement sur quelques points de l'Astronomie des Gentils Tamouls. Par M. LE GENTIL,</i>	179
<i>Suite du Premier Mémoire sur l'Inde. Par le même . . .</i>	190
<i>Observations sur l'Animal qui porte le Musc , &amp; sur ses rapports avec les autres Animaux. Par M. DAUBENTON..</i>	215
<i>Suite du Premier Mémoire sur l'Inde. Par M. LE GENTIL.</i>	221
<i>Recherches sur le Calcul intégral , &amp; sur le Système du Monde. Par M. DE LA PLACE.....</i>	267
<i>Mémoire dans lequel on propose une Méthode pour déterminer le nombre des racines réelles &amp; des racines imaginaires des équations , &amp;c. [Par M. DIONIS DU SÉJOUR.....</i>	377
<i>Suite des Recherches sur les variations de l'Aimant. Par M. LE MONNIER.....</i>	457
<i>Remarques sur la Carte suédoise de l'inclinaison de l'Aimant. Par le même.....</i>	461
<i>Réponse à quelques Remarques critiques . relatives à un fait consigné dans un de mes Mémoires, &amp;c. Par M. DE LASSONE.</i>	465
<i>Mémoire où l'on prouve la nécessité de recourir à l'Art, pour corriger &amp; prévenir les difformités de la taille , &amp;c. Par M. PORTAL .....</i>	468
<i>Remarques sur la Toise - étalon du Châtelet , &amp;c. Par M. DE LA CONDAMINE.....</i>	482
<i>Mémoire sur le changement qu'éprouve l'Os de la partie des pieds de certains Quadrupèdes , appelé le Canon. Par M. FOU-GEROUX DE BONDAROT.....</i>	502

# T A B L E.

<i>Mémoire sur l'Élimination.</i> Par M. VANDERMONDE.	516
<i>Additions aux Recherches sur le Calcul intégral &amp; sur le Système du Monde.</i> Par M. DE LA PLACE.....	533
<i>Mémoire sur l'usage de l'Esprit-de-vin dans l'analyse des Eaux minérales.</i> Par M. LAVOISIER.....	555
<i>Premier Mémoire sur la destruction du Diamant par le feu.</i> Par M. LAVOISIER.....	564
<i>Second Mémoire sur la destruction du Diamant, &amp;c.</i> Par le même.....	591
<i>Premier Mémoire pour servir à l'Anatomie des Oiseaux.</i> Par M. VICQ-D'AZYR.....	617
<i>Mémoire sur les Anastomoses.</i> Par M. LA FOSSE, de la Société Royale de Montpellier .....	634



---

ERRATA POUR L'HISTOIRE DE 1772. II.<sup>e</sup> Partie.

*P*<sub>AGE</sub> 5, ligne 26, celle, lisez celles.

*Page* 65, ligne 24, y périrent, lisez périrent.

*Page* 76, ligne pénultième, sur elles - mêmes : au milieu de leur longueur, ôtez les deux points, & les mettez après le mot longueur.

*Page* 82, ligne 30, & dans le jambier extérieur, ôtez &.

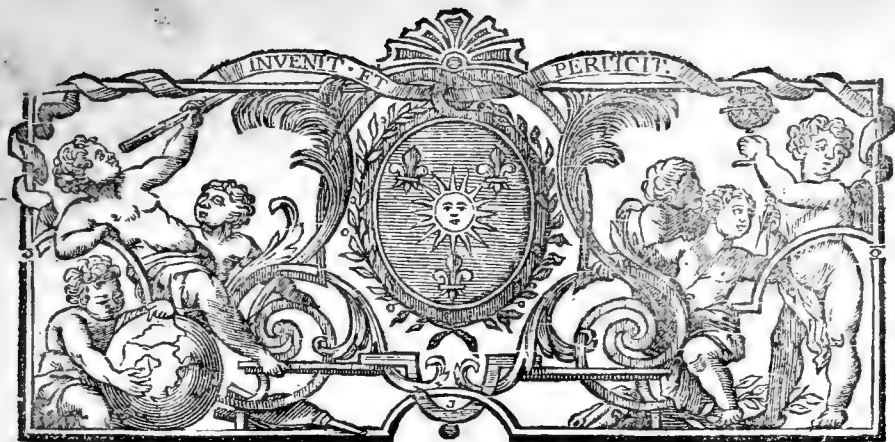
*Page* 83, ligne 28, Salzmaun, lisez Salzmann.

*Page* 108, ligne 26, après ces mots, de la Lune & de l'ombre, ajoutez & la conjonction.



HISTOIRE





# HISTOIRE

DE


## L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

*Année M. DCCLXXII. Deuxième Partie.*

### PHYSIQUE GÉNÉRALE.

*S U R U N*

*INSECTE QUI S'ATTACHE À LA CHEVRETTE.*


 IEN n'est peut-être plus avantageux au progrès  
 des Sciences, que la destruction des préjugés, &  
 l'Académie n'épargne pas même ceux qu'une fausse  
 apparence de vérité lui auroit fait adopter en quelque  
 sorte, en les insérant dans son Histoire ou dans ses Mémoires;

V. les Mém.  
page 29.

*Hist. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

A

en voici un de cette espèce dont la destruction est dûe aux recherches & aux observations de M. Fougeroux.

\* *Voy. Hist.*  
1722, p. 19.

On lit dans l'Histoire de l'Académie de 1722 \*, que M. Deslandes son Correspondant, ayant entendu dire, sur les côtes de Bretagne, où il étoit alors, que les soles étoient produites par une espèce de petite écrevisse de mer, qu'on nomme *chevrette*, *crevette*, & en quelques endroits *salicoque*, voulut voir ce qui avoit pu donner lieu à cette étrange opinion; pour s'en éclaircir, il mit dans une baille ou baquet pleine d'eau de mer, des soles & des crevettes, & dans une autre des soles sans crevettes, les soles parurent également frayer dans les deux bailles, mais il n'aperçut de petites soles que dans la baille où il y avoit des crevettes; dans une autre observation, il trouva, entre les pieds de chevrettes nouvellement pêchées, plusieurs petites vessies collées par une matière visqueuse, dans lesquelles on voyoit au microscope une espèce d'embryon qui avoit l'air d'une sole, il n'en fallut pas plus pour lui persuader que les vessies qu'il avoit vues étoient des œufs de soles, il n'est pas rare de trouver des animaux qui donnent à d'autres le soin de couvrir & d'élever leurs petits, & les crevettes lui parurent non les mères, mais les nourrices des soles.

Voilà donc le merveilleux ôté, du moins M. Deslandes s'en flatta, il s'étoit cependant encore trompé, & M. Fougeroux ayant eu occasion, dans un Voyage qu'il fit en 1771, sur les côtes de Normandie, de répéter ces observations, il trouva, par un examen plus réfléchi, que les crevettes n'étoient ni les mères ni les nourrices des soles, mais la proie d'une autre espèce d'animal que M. Deslandes avoit pris pour de jeunes soles.

Ce qui avoit commencé à donner à M. Fougeroux des soupçons sur l'exactitude de l'observation de M. Deslandes, étoit que tous les pêcheurs l'assuroient, qu'en raclant le sable du rivage, on y trouvoit du frai de soles; il y avoit donc des soles qui pouvoient éclore sans le secours des crevettes, & en ces cas, de quelle utilité pouvoient leur être ces dernières,

& n'étoit-il pas très-naturel de penser que si M. Deslandes avoit pu voir réellement quelques œufs de sole attachés aux pattes & au ventre des crevettes, celles-ci les avoient ramassées en se promenant sur le sable ?

Pour s'éclaircir sur cette matière, M. Fougeroux se fit apporter des crevettes soupçonnées de porter de jeunes soles, & voici ce qu'il remarqua.

Les chevrettes soupçonnées d'être chargées de jeunes soles ont, sur la plus grande écaille, du casque, un renflement bien marqué; en levant cette écaille, M. Fougeroux y trouva l'insecte plat que M. Deslandes avoit pris pour la jeune sole, & que selon M. Fougeroux, on ne peut confondre avec elle sans avoir l'esprit préoccupé, il ressemble beaucoup plus au coquillage nommé l'*escabron*, dont il diffère cependant, en ce qu'il n'a point, comme ce dernier, de coquille articulée.

M. Fougeroux détacha l'insecte avec quelque peine du corps de la chevette, & voici ce qu'il y remarqua; cet animal est figuré en cœur, une extrémité de son corps est arrondie, & l'autre est terminée en pointe; en regardant l'animal en dessous, on aperçoit près de la partie arrondie, qui est vraisemblablement sa tête, un mamelon ou trompe, semblable à celle des insectes suçeurs; le ventre de l'insecte est aplati & le dos un peu concave, tout le tour de son corps est garni de crochets avec lesquels il se cramponne sur le corps de la crevette, aux dépens de laquelle il vit, & il demeure emprisonné de la sorte sous son écaille, jusqu'à ce que la crevette soit prise ou mangée par quelqu'autre poisson, alors il partage son infortune & périt avec elle. Sous le ventre de l'insecte, on observe plusieurs bandes écailleuses, sous chacune desquelles on trouve, en les soulevant, un petit qui, vu à la loupe, paroît de même armé de crochets, & composé de plusieurs anneaux.

Pour examiner plus facilement cet insecte dans ces différents états, M. Fougeroux prit le parti d'aller lui-même à la pêche des crevettes, & voici ce qu'il remarqua; tant que les insectes sont petits, ils s'attachent aux pattes & à l'estomac de la

crevette, ils ne cherchent à se fourrer sous le casque, que lorsqu'ils sont devenus grands, & vraisemblablement quand ils ont déjà travaillé à la multiplication de leur espèce, ils sont alors dans toute leur grosseur, & ne cherchent cet asyle que pour y vivre tranquillement, sans que la chevrette puisse les détacher par ses secousses.

\* *Théol. des  
Insectes, trad.  
de M. Lefser,  
tome 1, édition  
1742, p. 144.*

M. Lyonnet avoit très-bien remarqué \* combien les recherches de M. Deslandes, sur ce point d'Histoire Naturelle, étoient imparfaites, il est bien démontré aujourd'hui par celles de M. Fougeroux, que l'animal pris par M. Deslandes pour une jeune sole, n'en est pas une, & qu'il ne donne point naissance aux soles, puisqu'il ne change point de forme durant sa vie, & qu'il produit des petits, qui, non plus que lui, ne ressemblent en aucune manière aux soles; qu'il faut remettre ces dernières dans la classe des poissons qui déposent leur frai sur le sable, & les chevrettes dans celles des animaux chargés d'insectes incommodes qui les sucent. L'exemple de M. Deslandes doit apprendre aux Physiciens avec combien de soin & d'attention on doit examiner les faits qui paroissent sortir de la règle générale.

### SUR L'ANIMAL PORTE-MUSC.

V. les Mém.  
page 215.

IL ne paroît pas que l'espèce de parfum que nous connoissons sous le nom de *Musc*, ait été d'un usage fort ancien, du moins en Europe. Les Naturalistes Grecs & Latins n'en font aucune mention dans leurs Écrits, & ce n'est guère que vers le VIII.<sup>e</sup> siècle de l'Ere chrétienne que Sérapion a donné une idée de cette substance, & de l'animal qui la produit; jusque-là on ne la connoissoit que parce qu'en avoient dit quelques auteurs Arabes, encore assez peu anciens, il ne faut pas même en être trop étonné. L'animal Portemusc vivoit trop loin de l'Europe, & dans des contrées alors trop éloignées de son commerce, pour que les Européens pussent en avoir connoissance, on ne le trouve que dans les

royaumes de Boutan & de Tunquin, à la Chine, dans la Tartarie Chinoise, & dans quelques parties de la Tartarie Moscovite, sur-tout aux environs du lac *Baikal*.

Il a donc dû être très-difficile aux Naturalistes de classer cet animal, aussi a-t-il été comparé au Chevreuil, au Bouc, au Cerf, au Chamois, à la Gazelle, au Chevrotin, sans pouvoir déterminer exactement le genre auquel il appartenait.

Heureusement pour les Naturalistes, on fit présent à M. le Duc de la Vrillière, d'un de ces animaux vivant, & ce Ministre Académicien, qui chérit les Sciences & s'intéresse à leur progrès, invita aussitôt M. Daubenton à l'examiner, & à en donner la description à l'Académie : voici ce qu'il y remarqua particulièrement.

Le Porte-musc répand une très-forte odeur de musc qui se répand à une assez grande distance, pour déceler d'assez loin l'animal dans sa retraite, il a dans sa figure & dans ses attitudes beaucoup de ressemblance avec la Gazelle, le Chevreuil & le Chevrotin, & pour le moins autant de légèreté, de souplesse & de vivacité dans ses mouvemens, qu'aucun de ces animaux ; mais le Chevrotin est celui de tous auquel, à la grandeur près, il paroît être le plus légitimement comparé par les deux défenses ou longues dents canines qui tiennent à la mâchoire supérieure, & sortent d'un pouce & demi hors des lèvres, dans une situation absolument opposée à celle des défenses du sanglier.

Ces dents sont une espèce d'ivoire comme celle du *Babiroussa*, & de plusieurs autres animaux, mais leur forme est très-particulière, elles ressemblent à des petits couteaux courbes, dirigés obliquement de haut en bas, & de devant en arrière ; on présume qu'elles ont cette situation, pour permettre à l'animal de couper des racines de la grosseur du doigt, dont il se nourrit ; mais il est probable qu'il les emploie encore à bien d'autres usages. Les animaux savent faire ordinairement tout l'usage possible des organes qui leur sont accordés.

Le Porte-musc n'a point de cornes, ses oreilles sont longues,

droites & très-mobiles, les deux défenses & les renflemens qu'elles causent aux lèvres, lui donnent, lorsqu'on le voit de face, un air singulier qui le distingue de tout autre animal que du Chevrotin.

Son poil est mélangé de teintes de brun, de fauve & de blanchâtre, ces teintes même paroissent changeantes, parce que les poils ne sont colorés qu'à leur extrémité, blancs dans le reste de leur longueur; cette propriété au reste lui est commune avec beaucoup d'autres animaux; les oreilles sont mélangées de blanc & de noir, & il avoit une étoile blanche au milieu du front, mais M. Daubenton soupçonna que cette étoile n'étoit qu'une livrée qui devoit disparaître avec l'âge, & cela, parce qu'il n'avoit pas vu cette étoile sur deux peaux de cet animal données au Jardin du Roi, par M.<sup>de</sup> la Comtesse de Marfan, à laquelle elles avoient été envoyées des Indes, par M. l'abbé Gallois, aux soins duquel l'Histoire Naturelle doit plusieurs curiosités venues par son moyen du fond de l'Orient.

Le musc est renfermé dans une poche placée sous le ventre à l'endroit du nombril, du moins M. Daubenton l'a-t-il trouvée dans cette situation sur une des peaux envoyées par M. l'abbé Gallois, elle paroissoit avoir eu au moins un pouce & demi de diamètre; elle avoit au milieu un orifice très-sensible, duquel M. Daubenton tira du musc très-odorant, & elle étoit revêtue de poils blanchâtres, très-légèrement teints de fauve. Dans la description que donne M. Gmelin, de cet animal \*, il place cette poche au-devant & un peu à droite du prépuce, car cet organe, de même que les défenses, est particulier au mâle, & la femelle est absolument privée de l'un & de l'autre. M. Daubenton n'a pu en vérifier la position sur le Porte-musc vivant, il n'a vu que de petites éminences sur le milieu de son ventre, mais il n'a pu les observer d'assez près, parce que l'animal ne se laissoit pas approcher, & qu'on n'auroit pu le saisir sans risquer de le blesser.

Quoique la situation de la poche du Porte-musc le distingue de tout autre animal; ce caractère n'est rien moins que suffisant

\* *Mémoires  
de l'Acad. Imp.  
de Pétersbourg,  
tome 1<sup>er</sup>.*

pour déterminer sa place parmi les quadrupèdes; beaucoup d'autres animaux, tels que le *Pecari*, le *Castor*, la *Civet*, ont, comme lui, des poches qui contiennent une matière odorante.

Il a donc fallu que M. Daubenton cherchât d'autres caractères pour assigner la classe d'animaux à laquelle appartient le Porte-musc, & voici ceux qu'il a trouvés, tant par l'inspection de l'animal vivant, que par la lecture des descriptions que quelques Naturalistes en ont données.

Les caractères extérieurs qu'il y a observés, sont les pieds-fourchus, les deux longues dents canines, & les huit dents incisives de la mâchoire de dessous, sans qu'il y en ait aucune dans celles de dessus, tous ces caractères le rapprochent beaucoup du Chevrotin, duquel il diffère cependant par la grandeur, celui-ci n'ayant qu'environ six pouces de haut, tandis que le Porte-musc a au moins un pied & demi de hauteur, il en diffère encore par le nombre des dents molaires, qui sont au nombre de six de chaque côté dans le Porte-musc, & dont le Chevrotin n'a que quatre; il en diffère aussi par la poche qui contient le musc, & par la couleur du poil.

M. Daubenton n'a pas aperçu de queue au Porte-musc vivant, M. Gmelin a trouvé, sur trois individus de cette espèce, un petit prolongement charnu d'environ un pouce de long, qui en tenoit lieu; M. Grew a observé ce même prolongement de deux pouces de longueur, mais il ne s'est pas assuré s'il contenoit des vertèbres.

M. Ray regarde comme douteux que le Porte-musc rumine, cependant M. Gmelin lui a trouvé, en le disséquant, les organes de la rumination, & spécialement les quatre estomacs, dont le premier a trois convexités, comme celui des animaux sauvages qui ruminent: si on joint à ce caractère les défenses du Porte-musc, on trouvera que le Chevrotin est celui de tous les animaux auquel il ressemble le plus, au cas que ce dernier rumine, comme il y a tout lieu de le croire.

Il auroit été facile de décider la question de la rumination;

si le Porte-musc de M. le Duc de la Vrillière avoit vécu, mais sa mort a privé de la possibilité de faire cette observation, & peut-être beaucoup d'autres extrêmement curieuses; il résulte seulement du voyage de cet animal en ce climat, dont il n'avoit pas paru fort incommodé, qu'avec du soin & de l'attention, nous pourrions espérer de naturaliser en France plusieurs espèces d'animaux qui deviendroient un objet d'agrément, & peut-être de commerce.

## S U R L A

## COMPARAISON DES DIFFÉRENTES TOISES

*Qui ont servi à la mesure des Degrés Terrestres.*

V. les Mém. **L'**OUVRAGE duquel nous avons à rendre compte dans cet article, est un phénomène singulier dans l'Histoire de l'Académie, c'est un Mémoire de M. de la Condamine, lû par cet Académicien en 1758, oublié depuis par son Auteur, & retrouvé deux ans après sa mort; l'objet qu'il y traite a paru assez intéressant à l'Académie, pour qu'elle se hâtât de le publier.

Personne n'ignore les travaux entrepris par l'Académie, dès les premières années de son institution, pour parvenir à la connoissance de la grandeur & de la Figure de la Terre, qu'elle a eu enfin, de nos jours, la gloire de déterminer.

La première de ces opérations eut l'année 1668 pour époque, elle fut exécutée par M. Picard, qui mesura tout l'espace compris entre le tertre de Malvoisine & Amiens; par une suite non interrompue de grands triangles, qui partoient tous d'une base de 5663 toises, mesurée dans la plaine de Long-boyau, depuis le moulin de Villejuive jusqu'au pavillon de Juvifi.

La toise de laquelle se servit M. Picard, étoit celle du Châtelet, dont on venoit de réformer l'étalon; non content d'avoir pris un très-grand soin pour y rendre sa toise conforme,



conforme, M. Picard voulut en constater la mesure d'une manière encore plus invariable, en mesurant sur cette toise même, la longueur du pendule simple, qui bat les secondes sous le parallèle de Paris; il ajoute que la toise dont il s'est servi, sera très-soigneusement conservée à l'Observatoire, pour y avoir recours en cas de besoin.

Si cette dernière condition eût été remplie, il n'y auroit point eu d'ambiguïté; toutes les mesures postérieurement faites, l'auroient été avec des toises bien étalonnées sur celle de M. Picard, & elles parleroient, pour ainsi dire, toutes la même langue, mais malheureusement ce dépôt a été mal conservé, & la toise de M. Picard est absolument perdue. Lorsque M.<sup>rs</sup> Cassini & de la Caille entreprirent, en 1739 & 1740, de vérifier la longueur de la Méridienne de France, depuis Dunkerque jusqu'à Collioure, ils partirent de Paris sans mesurer de nouvelle base, ayant seulement lié leurs triangles à celle de M. Picard; arrivés à Bourges ils mesurèrent une base pour vérifier leurs opérations, & furent très-surpris de trouver cette nouvelle base notablement plus courte, par leur mesure actuelle, qu'elle ne l'étoit par le calcul des triangles appuyés sur la base de Villejuive de M. Picard; l'exactitude de leurs opérations les porta à soupçonner cette dernière base de n'avoir pas été mesurée aussi exactement qu'on l'avoit cru jusqu'alors, mais M. Cassini le père, auquel ils communiquèrent leurs soupçons, n'en voulut rien croire, & ce ne fut qu'après qu'ils eurent une seconde fois recommencé toutes leurs opérations & tous leurs calculs, qu'il crut devoir vérifier de nouveau la base de M. Picard, qu'il trouva en effet plus courte d'environ une toise par mille, que ne l'avoit donnée M. Picard; il recommença trois fois la mesure, & trouva toujours la même différence; il en parla alors à l'Académie, qui nomma des Commissaires pour vérifier de nouveau cette base avec la plus grande authenticité; mais avant cette dernière mesure, M. Cassini en fit en particulier une quatrième, & toutes donnèrent la même différence.

Les perches qui servirent à cette mesure de M. Cassini,  
*Hist. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.* B

avoient été scrupuleusement étalonnées sur deux toises de fer, dont une avoit appartenu à feu M. de la Hire, & celles de la mesure faite par les Commissaires de l'Académie, l'avoient été sur la toise qui avoit été employée en Laponie; il résulroit donc de l'identité des mesures que la toise de M. de la Hire, & celle du Nord, étoient sensiblement égales, & que celle qu'avoit employée M. Picard, en différoit environ d'un millième.

Cette différence qui ne va pas à une ligne, pouvoit venir de plusieurs causes, il est très-possible que l'étalon du Châtelet, composé d'une barre de fer, avec deux talons, exposé à toutes les injures de l'air, attaché à la muraille avec des clous, qui auront pu lui occasionner de l'allongement en les frappant, dont les talons ont peut-être été frottés plusieurs fois pour les dérourer; il est très-possible, dis-je, qu'un tel étalon, quoique suffisant pour les usages ordinaires, n'eût pas gardé exactement sa mesure primitive, peut-être même n'avoit-on pas trop cherché à lui procurer cette exactitude : on ignore d'ailleurs dans quelle saison il avoit été construit, & à quel degré de chaleur on avoit étalonné la toise de M. Picard, il est du moins certain qu'elle étoit plus courte d'environ un millième, que celle qui a servi à la mesure du Degré de Laponie, & que celle de M. de la Hire qui lui étoit égale; & si on en pouvoit douter, la mesure du pendule proposée par M. Picard, confirmeroit encore cette assertion, & prouveroit l'erreur de la toise de M. Picard, qui a obligé de donner moins de toises au Degré, que cet Astronome ne lui en avoit assigné.

Des cinq toises qui avoient servi aux opérations de la Mesure de la Terre, en voilà donc une légitimement rejetée. Les quatre autres sont, celle qui a servi à la mesure du Degré du méridien près de l'Équateur; celle qui a servi à la mesure du Degré du méridien proche le Cercle polaire; celle qui a servi à M. de la Caille pour mesurer un Degré du méridien, dans la partie australe, au cap de Bonne-espérance; & enfin celle qui a servi aux célèbres observations du Pendule, faites par

M. de Mairan : nous ne parlons pas de celle de M. de la Hire, employée par M. Cassini, elle est identique avec la toise du Nord.

Ces quatre toises étant actuellement existantes, il a été facile de les comparer : & voici quel a été le résultat de la comparaison ; en prenant pour terme de comparaison, la toise examinée en 1735, par l'Académie, & qui a servi au Pérou ; celle du Nord s'est trouvée plus courte d'environ un vingtième de ligne, on peut même en assigner la cause ; cette toise ayant été mouillée de l'eau de la mer dans le naufrage du Vaisseau où elle se trouvoit au retour, il est très-vraisemblable qu'elle aura été rouillée, & que cette quantité presque imperceptible, dont elle est plus courte, ne vient que de ce qu'on en a enlevé en la dérouillant ; cette petite quantité même ne doit avoir influé en rien sur l'opération, le naufrage qui l'a causée n'étant arrivé qu'au retour, & par conséquent, eu égard à la mesure du Degré, celui du Nord & celui du Pérou ont été mesurés avec la même toise.

La toise de laquelle M. l'abbé de la Caille s'est servi pour la mesure d'un Degré du Méridien au cap de Bonne-espérance, avoit été faite par le feu sieur Langlois, qui l'avoit étalonnée avec le plus grand soin, sur le même étalon qui avoit servi à fixer la longueur précise des toises employées au Pérou & en Lapponie, & qui étoit en sa possession ; cette toise ne se trouve plus, mais on peut assez compter sur l'exactitude de ce célèbre artiste, très-exercé d'ailleurs dans les travaux de cette espèce, pour être sûr que cette toise étoit exactement égale aux autres.

Reste enfin la toise de M. de Mairan qui n'a pas servi aux opérations géodésiques, mais que ce célèbre Académicien a employée pour les observations sur la longueur du Pendule, dont il a rendu compte en 1735\*, elle avoit été, dit-il, mesurée sur l'étalon du Châtelet, mais soit que cette mesure eût été faite par une température très-différente de celle de 13 degrés du thermomètre de M. de Reaumur, qui régnoit lorsque M. Godin avoit fait la comparaison de celle du Pérou,

\* Voy. Hist.  
1735, p. 812

soit, ce qui est plus vraisemblable, que la grossièreté de cet étalon ne comportât pas une mesure très-exacte; cette toise comparée à celle du Nord & du Pérou, s'est trouvée de plus d'un dixième de ligne plus courte que cette dernière; quantité qui bien qu'insensible pour les usages ordinaires de la vie, ne l'est nullement lorsqu'il s'agit de recherches Astronomiques & Physiques, qui ne souffrent pas la moindre inexactitude.

De tout ce que nous venons de dire, il est aisé de conclure que la toise du Pérou, à laquelle celle du Nord & celle du cap de Bonne-espérance, sont ou ont été lors des opérations absolument égales, doit être regardée comme la véritable toise de l'Académie, il y a certainement bien moins d'inconvénient à corriger, de quelques centièmes de ligne, la seule longueur du pendule observée à Paris par M. de Mairan, qu'à altérer toutes les autres mesures du pendule faites en différens endroits de la Terre, & les résultats de toutes les opérations qui ne cadreroient plus avec une toise différente d'un dixième de ligne, de celles avec lesquelles ces mesures ont été faites.

Il reste encore un autre point à discuter; ce n'est pas assez que d'avoir déterminé avec soin la mesure de la toise, il n'est pas moins important de la conserver d'une manière inaltérable; un étalon d'acier ne peut être suffisant, la rouille seule peut le rendre inutile; des dimensions prises sur des parties des bâtimens les plus solides ne se conservent pas davantage: on sait combien les murs & les voûtes sont sujets à travailler, sans même qu'on s'en aperçoive; il faut donc avoir recours à une matière non sujette à se détruire par elle-même, & qui soit assez dure pour qu'elle ne puisse s'user par le frottement des toises qu'on y voudra étalonner.

M. de la Condamine croit qu'on peut trouver cette matière dans quelques espèces de granit que nous avons en France, dans la Normandie, & sur lesquels la lime n'a aucune prise; on pourroit, selon lui, faire un étalon d'une de ces pierres, & on seroit sûr que les talons entre lesquels seroit comprise la longueur de la toise, ne pourroient ni s'altérer ni s'user;

on y fera entrer une verge de fer qui serviroit au Châtelet de verge conservatrice pour le nouvel étalon qui seroit publiquement exposé. Et pour donner la facilité de prendre, avec un compas, la longueur exacte de la toise & de ses parties, on traceroit avec le diamant sur une tablette du même granite, une ligne fine terminée par deux points, & divisée en pieds, & au moins à ses extrémités en lignes, & sur une autre ligne parallèle à celle-ci, la longueur du Pendule.

Telles sont les vues proposées par M. de la Condamine; dans le Mémoire dont nous venons de rendre compte, on y reconnoît par-tout le génie patriotique de cet Académicien, il aura la gloire d'avoir été Citoyen jusqu'après sa mort, & de tels sentimens ne peuvent que redoubler les regrets de tous ceux qui le connoissoient, & sur-tout ceux de l'Académie.

## SUR LA

## DESTRUCTION DU DIAMANT PAR LE FEU.

LE sujet que nous avons à traiter dans cet article, est un des plus intéressans de toute la Physique; rien n'a peut-être été plus généralement adopté que la propriété de résister au plus grand feu, que l'on avoit accordée au Diamant; les Anciens en étoient si persuadés, que Virgile \* n'avoit pas cru trouver de matière plus propre à résister aux torrens du feu qui environnoient l'entrée du Tartare, que d'en bâtir les piliers de diamant; sa rareté, peut-être autant que sa dureté, avoit pu donner lieu à ce préjugé, de même qu'aux émanations & aux vertus médicinales qu'on lui attribuoit, comme à toutes les pierres précieuses; le célèbre Boyle avoit lui-même cherché à donner des raisons physiques de ces propriétés \*, mais toutes les expériences qu'il rapporte pour prouver les émanations du diamant ne prouvent autre chose que la propriété commune au diamant & à plusieurs autres pierres précieuses, d'être susceptibles d'électricité, & quelquefois phosphoriques; en un mot, il n'y a rien à tirer de

V. les Mémoires.  
P. 564.

\* Virg. *Æneid.*  
Liv. VI, vers  
543.

\* Specimen  
de Gemmarum  
origine & virtutibus.

ceux qui nous ont précédés sur ce sujet, & nous ne pouvons partir dans la question que M. Lavoisier a entrepris de discuter, que des expériences faites de nos jours, par ordre de l'Empereur François I.<sup>er</sup>, elles nous ont appris que le diamant étoit un des corps qui résistoit le moins au feu, qu'à une chaleur égale à celle qu'on emploie à passer l'argent à la coupelle, il s'évapore & dispaçoit sans laisser le moindre vestige, & que Virgile n'avoit pas pu choisir plus mal ses matériaux pour bâtir la porte du Tartare.

Le même Prince répéta les mêmes expériences, non-seulement sur le diamant, mais encore sur plus de vingt pierres précieuses différentes; comme on les examinoit de fort près, on reconnut que le diamant commençoit d'abord à perdre son poli, qu'ensuite il se feuilletoit, & qu'enfin il s'évaporoit entièrement, qu'au bout de vingt-quatre heures l'émeraude s'étoit fondue & attachée au creulet, mais que le rubis n'avoit subi aucune altération.

Les mêmes expériences furent encore faites à Florence, par ordre du même Prince, mais avec cette différence, qu'au lieu d'employer le feu des fourneaux, le diamant & les autres pierres furent soumises au foyer d'un verre ardent de Tschirnhausen, ayant deux tiers d'aune de Florence de diamètre, & dont on avoit raccourci le foyer, par le moyen d'une seconde lentille. Le diamant exposé à ce feu, commença à s'altérer au bout d'environ trente secondes, il perdit son éclat, sa couleur & sa transparence; au bout de cinq minutes il se forma des bulles à sa surface, & bientôt il se brisa en morceaux si petits, qu'on n'en retrouva qu'un petit fragment, qui se réduisit sous la lame d'un couteau, en une poudre fine, qu'on ne pouvoit apercevoir sans le secours d'un microscope; plusieurs diamans exposés au même foyer eurent le même sort, sans qu'on eût pu y remarquer aucun commencement de fusion, quoique dans la vue de la faciliter, on y eût mêlé différentes matières qui servent ordinairement de fondans.

Les rubis furent soumis aux mêmes épreuves, mais ils résistèrent beaucoup plus, ils devinrent d'abord luisans,

comme si on les avoit enduits de graisse, il s'y forma des bulles, & un d'entr'eux, après avoir été tenu pendant trois quarts-d'heure au foyer, perdit une grande partie de sa couleur; les angles s'arrondirent, & il se ramollit au point de recevoir l'empreinte d'un cachet de jaspe, & de se laisser entamer par un couteau, mais il ne perdit rien de son poids ni presque de sa forme.

Les rubis mis en poudre parurent se réunir promptement en une masse, mais on les sépara aisément, il ne s'étoit fait aucune fusion. En augmentant la force du foyer par l'interposition d'une troisième lentille, la poudre de rubis se fondit, mais imparfaitement, & la masse couleur de chair qui en résulta, étoit graveleuse par les grains non-fondus qui s'y trouvoient mêlés avec le verre; le rubis, mêlé avec du verre en poudre, parut se fondre, mais on vit bientôt que le verre seul s'étoit fondu, & que le rubis étoit tombé au fond, sans s'y unir en aucune manière.

Un rubis tenu au foyer pendant 30 secondes, fut jeté dans l'eau froide, il ne se brisa point, mais on aperçut dans son intérieur plusieurs gerçures; un autre mis à la même épreuve pendant 6 minutes, & aussi jeté dans l'eau ne put résister à la pression d'un instrument de fer, & se cassa en plusieurs morceaux irréguliers : en général les rubis traités de cette manière n'avoient pas plus de dureté qu'un cristal, il en faut cependant excepter un beaucoup plus gros que les autres qui n'avoit perdu sa dureté qu'à la surface, & l'avoit conservée dans son intérieur; c'est en général, de toutes les pierres précieuses, celle qui paroît résister le plus à l'action du feu poussé à son plus grand degré de force.

L'émeraude au contraire s'y fondit très-promptement, elle devint blanche, légère, tendre, cassante, & perdit sa transparence; quelques-unes tenues plus long-temps au foyer, changèrent plusieurs fois de couleur : on observa qu'elles étoient toujours plus luisantes quand on les retiroit brusquement du foyer, que lorsqu'on les en faisoit sortir peu-à-peu.

Tel est l'exposé très-abrégé des expériences faites par

ordre de l'Empereur, & en même temps de l'état de nos connoissances sur cet article, lorsque M. Darcet entreprit de les répéter.

Ces premières expériences furent faites sur deux petits diamans très-brillans, il les mit chacun dans un creuset de porcelaine, l'un étoit exactement fermé, le couvercle de l'autre étoit percé de quelques petits trous, ils furent mis dans le four de porcelaine, & ils se dissipèrent en entier sans qu'il en demeurât aucun vestige.

Quelque bien constaté que parût ce fait, lorsque M. Darcet en fit part à l'Académie, elle crut devoir, pour mieux s'en assurer, l'engager à répéter l'expérience.

Dans cette vue, M. Darcet fit user les bords d'un creuset de porcelaine, & le fit ajuster très-exactement avec son couvercle, pour en faire une espèce de vaisseau clos ; il y plaça un diamant, & exposa le tout dans le four de porcelaine, pendant toute la durée de la cuite ; le tout étant refroidi, on ouvrit le creuset, & on n'y trouva pas le moindre vestige du diamant.

Il prit ensuite de la pâte de porcelaine, & en fit une boule qu'il coupa en deux, & ayant formé au centre une petite cavité où il mit un diamant, il rapprocha les deux moitiés de la boule qu'il fouda avec de la barbotine ; cette boule fut exposée au feu de porcelaine, d'où elle sortit parfaitement cuite, on l'ouvrit avec précaution, on trouva la petite cavité où étoit le diamant, le diamant même enduit d'une espèce de noir de fumée, il étoit légèrement terni à sa surface, sa couleur qui étoit un peu noirâtre s'étoit dissipée, il étoit devenu blanc sans avoir perdu sensiblement de son poids ni de sa dureté, & ayant été retaillé, il reprit tout son brillant.

Ce même diamant remis au feu dans le même appareil ; ne soutint pas cette seconde épreuve, il disparut, à deux très-petits fragmens près, qu'on reconnoissoit encore cependant pour du diamant ; un second diamant jaune exposé à la même épreuve, se fondit & forma une espèce de vernis dans



la cavité où il étoit contenu, il est vrai que M.<sup>rs</sup> Rouelle & Darcet soupçonnèrent qu'on leur avoit, dans cette expérience, donné un Péridot pour un Diamant; un quatrième diamant exposé au feu de la même manière, disparut sans laisser aucune trace sensible de son existence.

M. Darcet exposa ensuite des diamans sous une moufle, dans des petites capsules de porcelaine; en cinq heures de feu modéré, ils disparurent tous, & il remarqua que ces diamans, en s'évaporant, se feuillettoient sensiblement.

Les mêmes expériences furent répétées sur les autres pierres précieuses, & il en résulta qu'aucune n'a la propriété de s'évaporer comme le diamant; le Rubis ni la Topase orientale n'ont subi aucune altération, même par le feu de porcelaine; l'Hyacinthe y a perdu un peu de sa couleur; les Topases de Saxe & du Brésil, & l'Améthiste, y sont devenues blanches; l'Émeraude a perdu sa transparence; le Saphir oriental s'y est ramolli; le Péridot y a coulé comme le verre, & le Grenat s'est fondu & s'est réduit sous la forme d'une écaille de fer.

Depuis la publication de ces expériences, elles furent encore répétées d'abord par M. Macquer, qui mit un diamant brillant sous la moufle, il s'aperçut, en ouvrant sa moufle, au bout de 20 minutes, que le diamant étoit devenu comme phosphorique, & qu'il brilloit d'une lumière singulière, la moufle fut refermée, & ayant été r'ouverte au bout de 20 autres minutes, on ne trouva plus dans la capsule aucun vestige du diamant; cette même flamme qui environnoit le diamant au moment de sa destruction, & qui avoit été aperçue pour la première fois par M. Macquer, pendant cette expérience, fut encore plus sensiblement remarquée dans une autre expérience faite aux Écoles de Médecine, sur un diamant beaucoup plus gros, & en présence de M. de Sartine.

L'expérience de l'évaporation du diamant sous la moufle, fut encore répétée avec toute l'authenticité possible, le 16 Août 1771, chez M. Rouelle; on y plaça trois diamans sur autant de petites capsules de porcelaine, ils y furent chauffés

par degrés, les diamans & les capsules commencèrent à rougir; mais bientôt après la lumière des diamans devint beaucoup plus vive que celle des capsules, ils diminuèrent de volume; un d'eux disparut entièrement, & on retira les deux autres avant qu'ils fussent entièrement dissipés, mais il ne leur restoit plus qu'une petite partie de leur poids; il y arriva même une aventure singulière : un Joailler persuadé que l'évaporation du diamant étoit dûe à l'air, crut mettre un diamant, qu'il soumit à l'expérience, à l'abri de son action, en le mettant dans un creuset rempli de poudre de charbon mêlée avec de la craie, & recouvert avec une légère couche de craie, détrempée avec de l'eau; tout cet appareil fut mis dans la même moufle où avoient été faits les autres essais, & y resta pendant près de trois heures, au bout desquelles on laissa refroidir les vaisseaux, & ayant ouvert le creuset, on n'y trouva qu'une masse de craie calcinée, sans aucun vestige de poudre de charbon ni de diamant, il n'en restoit plus que l'empreinte qu'il avoit formée dans la craie.

Après les expériences dont nous venons de rendre compte, il n'étoit plus permis de révoquer en doute l'évaporabilité du diamant; mais cela même supposé, il restoit encore bien des points à éclaircir; cette évaporation étoit-elle une véritable volatilisation, une réduction de la substance du diamant en vapeurs? Étoit-ce une espèce de combustion, ou enfin n'étoit-ce qu'une décrépitation ou une dispersion des parties du diamant en une poussière imperceptible? Pour s'assurer si la disparition du diamant étoit une véritable évaporation, on le distilla dans des vaisseaux clos, c'est-à-dire dans une petite cornue de grès bien lutée, à laquelle on avoit adapté un matras percé d'un petit trou pour laisser échapper les vapeurs, si elles devenoient trop abondantes ou trop élastiques; il n'en fut pas besoin, au bout de trois heures d'un feu très-violent, on laissa refroidir l'appareil, & ayant déluté les vaisseaux, on n'y trouva qu'un peu de vapeurs aqueuses, provenues de la décomposition du lut qui avoit commencé à se détruire; les diamans furent retrouvés dans la cornue,

à peu-près tels qu'ils étoient lorsqu'on les y avoit mis, mais presque tous dépolis, enduits d'une espèce de vernis d'un brun noir, de même que le dedans de la cornue; mais ils avoient perdu plus de deux grains de leur poids, il est vrai qu'il y avoit quelques-uns des plus petits diamans qui étoient demeurés collés au fond de la cornue, au moyen de quelque portion de la terre du lut qui y étoit tombée, & avoit commencé à fondre.

Le feu, dans cette dernière expérience, avoit été beaucoup plus fort qu'il ne falloit pour évaporer le diamant, il en résulta donc que le défaut du contact de l'air retardoit cette évaporation; pour s'en assurer mieux, on profita de l'offre que fit M. Maillard, Joaillier, de soumettre trois diamans qu'il avoit apportés, à telle expérience & tel degré de feu qu'on jugeroit à propos; on les mit dans une tête de pipe remplie de poudre de charbon, & cette tête fut fermée par une petite lame de tôle, recouverte & enveloppée de toutes parts de lut fait avec le sable des Fondeurs, détrempe avec de l'eau salée; cette pipe fut placée dans un creuset, enduit de craie sèche, lequel étoit lui-même enfermé dans deux autres creusets abouchés l'un à l'autre, & lutés avec le même lut.

Cet appareil bien séché, fut successivement placé dans un fourneau où il essuya deux heures d'un feu assez vif, & ensuite dans le grand fourneau de M. Macquer, où il éprouva, pendant deux heures, un feu si violent que le creuset se ramollit & entra sur lui-même, la terre & le lut se fondirent & formèrent une masse de verre adhérente à la pipe, qui avoit seule résisté; dès qu'on l'eut cassée, on en vit sortir le charbon aussi noir & aussi entier qu'on l'y avoit mis, & les trois diamans sans aucune autre altération que d'avoir été un peu noircis, ils n'avoient rien perdu de leur poids, & étant repolis, ils reprirent leur première beauté.

Cette opération faisoit voir clairement que la destruction du diamant n'étoit pas une véritable volatilisation, & qu'on ne pouvoit l'attribuer qu'à une combustion semblable à celle du charbon & de quelques autres matières qui résistent à la

plus grande violence du feu, dans des vaisseaux fermés, & s'enflamment à l'air libre avec la plus grande facilité, ou à la réduction du diamant, en une poudre très-fine, occasionnée par le contact de l'air, & qui échappe absolument à la vue.

Ce fait si singulier méritoit cependant qu'on s'en assurât, & M. Macquer se chargea de faire placer un appareil semblable dans le fourneau de la porcelaine dure de Sèvres, où il éprouva, pendant vingt-quatre heures, le plus grand degré de feu qu'on connoisse; le tout étant parfaitement refroidi, on trouva que le creuset extérieur, fait de la même terre que les gazettes à porcelaine, avoit résisté, mais le sablon qui servoit à y contenir le reste de l'appareil, s'étoit combiné avec le sable des Fondeurs, & avoit coulé avec lui; les creusets de Hesse étoient percés, mais la pipe étoit entière, & entourée seulement de ces matières fondues; la plaque de fer qui lui servoit de couvercle s'étoit convertie en une grenaille de fer; le diamant qu'elle contenoit paroissoit engagé à moitié dans un de ces grains, mais la partie libre avoit conservé son éclat, à une légère teinte de noir près; en essayant de séparer le diamant de ce grain de fer, on s'aperçut que la partie qu'on y croyoit engagée étoit détruite, & que le diamant avoit perdu près de la moitié de son poids; mais quelle que fût la cause de cette destruction, il n'en étoit pas moins vrai que l'autre moitié avoit supporté, pendant vingt-quatre heures, l'extrême violence du feu, sans en être altérée sensiblement, & que la destruction du diamant à l'air libre, n'étoit point une vraie volatilisation. Mais comment accorder ces faits avec les expériences de M. Darcet, faites avec des diamans enfermés dans des boules de pâte de porcelaine, où ils se sont constamment détruits? Pour éclaircir cette question, M. Macquer enferma, dans plusieurs boules de pâte de porcelaine, de la poudre de charbon, & plaça ces boules dans le four à porcelaine de Sèvres; lorsque la journée fut cuite, on cassa les boules dans lesquelles il ne se trouva pas le moindre vestige de charbon: on mit de la même poudre de charbon dans un petit vaisseau de porcelaine cuite, qu'on couvrit d'un

couvercle de même matière, bien luté, & auquel on fit éprouver la même violence de feu, sans que la poudre de charbon y éprouvât la plus petite altération; il étoit alors bien aisé de voir que la pâte de porcelaine est une substance bien plus poreuse que ne l'avoit pensé M. Darcet, qu'elle ne défend pas du contact de l'air les corps qu'on y enferme, & qu'elle n'en empêche pas la combustion. M. Mitouard répéta de son côté les mêmes expériences, il mit trois diamans dans trois têtes de pipes, l'un avec de la poudre de charbon, l'autre avec de la craie, & enfin le troisième dans une pipe vide, elles furent fermées & enveloppées comme les précédentes, & il leur fit éprouver pendant deux heures & demie, la plus grande violence de feu du fourneau de M. Macquer. Le diamant mis dans la poudre de charbon, n'éprouva aucune altération, celui qui étoit dans la craie perdit un cinquième de son poids, il fut dépoli, ses angles s'émoussèrent, & il se couvrit d'une croûte semblable à celle des diamans bruts; enfin celui qui avoit été mis dans la pipe sans intermède, perdit également un cinquième de son poids, son poli fut altéré, & il devint d'un noir de jayet.

Pour s'assurer que la nature du diamant n'avoit aucune part à ce phénomène, M. Mitouard changea les siens d'intermède, il mit dans le charbon celui qui avoit été dans la craie, &c. & il obtint toujours les mêmes résultats; celui du charbon ne souffrit aucune altération, & les autres en éprouvèrent plus ou moins, ce qui lui donna lieu de penser que le phlogistique, dont le charbon abonde, pourroit occasionner ce phénomène, comme il empêche le zinc & l'antimoine de brûler lorsqu'ils sont enfermés avec lui.

Les expériences que fit M. Cadet, lui donnèrent à peu près les mêmes résultats.

Il restoit cependant un point bien intéressant à éclaircir, c'étoit de savoir si un feu plus violent & plus long-temps continué, n'acheveroit pas de détruire le diamant qui n'avoit été qu'altéré dans les vaisseaux fermés, & n'attaqueroit pas même celui que la poudre de charbon avoit préservé de toute

altération, dans les expériences précédentes. C'est le but que M.<sup>rs</sup> Rouelle & Darcet se sont proposé dans une longue suite d'expériences qu'ils ont faites dans des boules & des creusets de porcelaine, & desquelles il résulte :

1.<sup>o</sup> Que le diamant qui se détruit en si peu de temps à l'air libre, & par un degré de feu assez médiocre, est un corps très-réfractaire lorsqu'on le garantit du contact de l'air :

2.<sup>o</sup> Qu'il ne peut soutenir, même dans une boule de porcelaine cuite, sept heures de feu très-violent, sans être sensiblement altéré :

3.<sup>o</sup> Que cette même violence de feu continuée plusieurs jours, l'altère & le détruit à la fin, quoiqu'enfermé dans une boule de porcelaine cuite lorsqu'il est sans intermède :

4.<sup>o</sup> Que lorsqu'il y est suffisamment entouré de poudre de charbon, il peut résister pendant huit jours au feu du four à porcelaine, sans éprouver la moindre altération :

5.<sup>o</sup> Que lorsque l'intérieur des boules est trop petit pour recevoir la quantité de charbon nécessaire, l'extrême violence du feu attaque le diamant, & lui fait subir quelqu'altération ; mais qu'on observe en ce cas que le charbon a été aussi un peu attaqué, ce qui donne lieu de penser que la fixité du diamant est à peu-près égale à celle du charbon dans des vaisseaux clos :

6.<sup>o</sup> Que le diamant réduit en vapeurs passe à travers les boules & les creusets de porcelaine la mieux cuite, lorsqu'ils sont rouges & embrasés, à moins qu'il ne passe par les jointures même les mieux lutées, ce qui fait qu'il est au moins permis de douter qu'on les puisse regarder comme vaisseaux fermés.

Tel est le rapport très-abrégé des nombreuses expériences qui ont été tentées sur la destruction du diamant par le feu des fourneaux ; mais il est un feu bien plus actif & bien plus puissant, celui des rayons du Soleil réunis au foyer d'un grand verre ardent ; il en existoit un de cette espèce entre les mains de l'Académie, connu sous le nom de lentille du Palais Royal, parce qu'il avoit appartenu à feu M. le Duc d'Orléans Régent, qui l'avoit donné à feu M. d'Onz-en-Brai, & celui-ci à

l'Académie ; on peut bien juger que cet agent si puissant fut employé ; & nous allons présenter une légère idée des expériences qui furent faites par son moyen, qui composent le second Mémoire de M. Lavoisier.

V. les Mémoires  
P. 591.

Un diamant ayant été exposé brusquement au foyer du verre ardent a décrépité, s'est fendillé comme du cristal de roche, il s'en est détaché plusieurs éclats, dont un étoit assez sensible, même à la vue simple ; en l'examinant au microscope, après l'avoir retiré, on a remarqué un grand nombre d'éclats prêts à se détacher ; un autre diamant a été exposé au foyer, mais avec précaution, il a rougi, & ayant été retiré après dix minutes, il s'est trouvé diminué d'un trente-deuxième de son poids ; vu à la loupe, il paroissoit criblé de trous, on le remit au foyer d'abord sur un support de grès dur, puis sur un support de porcelaine, il a présenté les mêmes phénomènes, & en vingt minutes de temps il a été totalement évaporé ; on avoit cru apercevoir pendant l'expérience une vapeur ou poussière légère qui s'élevoit du diamant, mais on aperçut la même chose en présentant le grès seul au foyer, & on en a conclu que cette apparence avoit pour cause le mouvement du courant d'air occasionné par la chaleur du foyer.

La poudre de diamant exposée au foyer dans une capsule de porcelaine, a pareillement disparu, mais elle a laissé sur la porcelaine une tache jaune, que M. Lavoisier attribue, avec beaucoup de vraisemblance, à quelques parcelles des instrumens qui servent à pulvériser le diamant, & qu'il en avoit détachées pendant cette opération.

Ces expériences confirmoient bien l'évaporabilité du diamant, mais que devenoit-il dans sa destruction ? Pour essayer de s'en assurer, M. Lavoisier fit faire une cornue de verre de trois pintes de capacité, ayant à son fond une grande ouverture, par laquelle on introduisit un piédestal de verre, surmonté d'une capsule de porcelaine, dans laquelle étoient onze diamans, pesant quinze grains ; il est aisé de voir, qu'au moyen de cet appareil, si le diamant se réduisoit en vapeurs,

elles seroient retenues & rendues sensibles, au moins par l'odeur qu'exhaleroit le bec de la cornue : le tout ayant été mis au foyer, on crut voir s'en élever une fumée sensible ; M. Lavoisier vit même un des diamans bouillonner, mais il ne se condensa rien, & on ne sentit d'autre odeur que celle du mastic qui tenoit le support à la cornue qui s'échauffoit, & qui finit par se fondre en laissant tomber tout l'appareil ; il est donc impossible de rien conclure de cette expérience, & il est plus que probable que l'espèce de fumée qui a paru, n'étoit dûe qu'à l'évaporation du mastic.

Il fallut donc s'y prendre d'une autre manière ; le support de porcelaine réfractaire, contenant neuf diamans, fut placé sur un pied de verre, au milieu d'une jatte de faïence remplie d'eau distillée, le tout fut recouvert d'une cloche de verre de six pouces & demi de diamètre, & fut exposé au foyer. Pour cette fois il n'y eut point de fumée, mais l'on vit, comme dans l'expérience précédente, le diamant placé au centre du foyer bouillonner & jeter des bulles ; en un quart-d'heure, il perdit les trois quarts de son poids, & l'endroit de la porcelaine, sur lequel il posoit, se trouva creusé & vitrifié, en 20 minutes le diamant fut entièrement détruit. La cloche ayant été levée avec attention, on n'y trouva aucune odeur sensible ; les gouttes de liqueur qui s'y étoient attachées, ne parurent aucunement différentes de l'eau distillée, & pour plus grande précaution, on la lava avec deux onces de cette même eau, qu'on réserva avec celle qui étoit dans la jatte, pour les soumettre ensuite au plus scrupuleux examen.

Les huit diamans restans qui pesoient  $11 \frac{3}{16}$  grains quand on les avoit soumis à l'expérience, ne pesoient plus que  $7 \frac{2}{16}$  grains, ils avoient perdu  $4 \frac{1}{16}$  grains de leur poids ; ils étoient les uns noirs, les autres bruns, & les autres gris, & à demi transparens, mais ils paroissoient tous spongieux & comme caverneux à peu-près comme des pierres meulières ou du mâchefer, un seul étoit creusé en forme de calotte ; sous au microscope, ils paroissoient détruits, en grande partie caverneux,



caverneux, aucun cependant ne paroissoit fondu ni vitrifié; le support de porcelaine qui les portoit étoit parsemé de taches qui paroissoient des points vitrifiés, sur la plupart desquels on apercevoit des parcelles de diamant, & le tout étoit entouré d'une tache ou maculature jaunâtre & superficielle; il paroît donc que pendant l'évaporation du diamant, il s'en est détaché des petites parcelles qui ont sauté ça & là, & qui ont procuré la vitrification de la porcelaine aux endroits où elles se sont trouvées, puisqu'elle n'a été altérée en aucun autre endroit.

Nous avons dit ci-dessus, que l'eau qui avoit servi aux expériences précédentes, avoit été soigneusement rassemblée pour examiner si elle n'avoit rien retenu des diamans qui s'étoient détruits sous les cloches de verre, elle fut en effet soumise à toutes les épreuves que prescrit la Chimie, sans qu'on ait pu en obtenir autre chose qu'un léger sédiment terreux, tel que le laisse ordinairement l'eau distillée, de laquelle celle-ci ne différoit en aucune manière.

Toutes les expériences précédentes avoient été faites par un ciel bien serein; un soleil moins vif & moins actif présentait de nouveaux phénomènes.

Six diamans furent exposés au foyer du même verre ardent, dans le même appareil que celui des expériences précédentes, ils furent bien moins promptement & bien moins vivement attaqués; ce ne fut qu'au bout de 7 minutes que le plus gros commença à bouillonner à sa surface, la plupart devinrent très-noirs, & ayant été retirés au bout de 35 minutes, on trouva que ce noir ne leur étoit point adhérent, qu'il s'attachoit aux doigts & noircissoit le papier, comme auroit fait du charbon ou du noir de fumée; que vu au microscope, ils paroissoient spongieux & caverneux, & que dans ce noir on voyoit des filets blancs cotonneux & un peu ramifiés, ils avoient perdu environ un quart de leur poids; & dépouillés de leur noir, ils étoient à demi transparens, & d'une couleur grisâtre, excepté un seul qui avoit conservé une teinte brune; d'où il suit que le diamant

peut être réduit en charbon, dans quelques circonstances, qu'il est par conséquent, comme M. Macquer l'avoit avancé le premier, dans la classe des corps combustibles, que cet effet n'a lieu qu'à la surface, que la plus grande partie de cette matière charbonneuse ne lui est point adhérente, mais qu'une petite partie s'y joint plus intimement, & donne au diamant la couleur plus ou moins foncée qu'on y a observée en les tirant du foyer.

Ces mêmes phénomènes furent encore observés dans une seconde expérience ; mais dans une troisième on en remarqua un duquel on ne s'étoit pas encore aperçu ; les diamans ayant été exposés pendant 16 minutes au feu, on retira l'appareil, & on s'aperçut qu'à mesure que la cloche de verre se refroidissoit, l'eau montoit en dedans au-dessus de son niveau, ce qui indiquoit une diminution de l'air qui y avoit été enfermé ; & par les mesures les plus exactes, cette diminution fut trouvée de huit pouces cubiques : on laissa l'appareil au même état qu'on l'avoit retiré pendant quatre jours, dans un lieu dont la température ne varioit que bien peu ; alors ayant retourné la cloche avec précaution, on y versa 15 à 16 onces d'eau de chaux, qui se précipita comme elle le fait avec le *gas* ou l'air qui a servi à la combustion du charbon ; les diamans dans cette expérience avoient perdu la moitié de leur poids, & offroient les mêmes phénomènes que dans les expériences précédentes.

La terre ainsi précipitée de l'eau de chaux, n'offrit plus aucune des propriétés de la chaux, elle n'étoit plus ni caustique ni soluble dans l'eau, elle étoit devenue une véritable craie, & avoit repris la propriété de faire effervescence avec les acides, propriété dûe en ce cas au dégagement de l'air fixe, & qui n'a jamais lieu dans la combinaison des acides & de la chaux.

D'après cette expérience, il est difficile de ne pas croire que l'air dans lequel on a fait évaporer du diamant, acquiert au moins en partie les propriétés de l'air fixe, & celle de se

combinaison avec les terres calcaires & les alkalis, propriétés que n'a pas l'air de l'atmosphère dans l'état naturel; il paroît seulement que cet air fixe, produit par l'évaporation du diamant, se combine plus difficilement avec l'eau que l'air fixe ordinaire, puisqu'il est demeuré quatre jours sur de l'eau, sans aucune diminution sensible de son volume.

Malgré cette propriété, M. Lavoisier a voulu le mettre tout-à-fait hors d'état de se combiner avec l'eau, & pour cela il a substitué le mercure à l'eau de la jatte; les effets ont été absolument les mêmes, l'eau de chaux a été précipitée de la même manière par l'air fixe, produit par l'évaporation du diamant, mais il n'y a eu presque aucune diminution du volume d'air contenu dans la cloche; d'où il suit que cette diminution n'a lieu que lorsque l'air n'étant encore qu'en partie converti en air fixe, rencontre un fluide avec lequel il puisse se combiner.

Il résulte de ce que nous venons de dire, que le diamant peut être mis au nombre des corps combustibles; comme eux lorsque la chaleur n'est pas trop vive, & qu'il est renfermé dans une portion d'air qui ne se renouvelle pas, il se réduit en une matière charbonneuse; comme eux il fait éprouver une diminution à cet air, lorsqu'il a le contact de l'eau, il le change en une espèce de *gas* combinable avec les terres calcaires, comme le pourroit faire du charbon qu'on y brûleroit. M. Lavoisier a voulu voir si cette analogie se soutiendrait en tout; si le diamant est véritablement un corps combustible, il ne doit, comme eux, brûler que dans l'air ordinaire, & non dans le vide ni dans l'air fixe; c'est effectivement ce qui est arrivé, du moins en grande partie; le diamant exposé au foyer dans un appareil rempli d'air fixe, à une évaporation infiniment plus lente, elle a duré 1<sup>h</sup> 10', au lieu de 10', 15' & 20', & il demeure constant que ce corps, dans des circonstances favorables, se détruit à une chaleur modérée; mais que lorsque ces mêmes circonstances s'opposent à la combustion, il devient très-réfractaire, & ne cède qu'à l'action long-temps continuée d'un agent très-violent.

Cette propriété n'est pas particulière au diamant, un grand nombre de corps combustibles sont dans le même cas ; un degré de feu très-léger suffit pour les allumer à l'air libre, tandis qu'ils résistent à un degré de feu beaucoup plus considérable dans les vaisseaux clos.

Nous avons vu dans les expériences précédentes, bien de la conformité entre la manière de brûler du diamant, & celle du charbon ; M. Lavoisier a voulu voir si cette conformité se soutiendrait, il a exposé au foyer de la poudre de charbon, comme il avoit fait des diamans, sous une cloche remplie d'air fixe, il s'en est consumé, dans les premiers instans, une petite partie qui s'est réduite en cendres, & ces cendres ont été bientôt vitrifiées, mais le reste s'est dissipé sans combustion en remplissant le vaisseau d'une vapeur semblable à une fumée qui rendoit très-visible le cône de lumière.

Après cette opération, qui dura environ une heure, on retira l'appareil, & on le laissa refroidir ; le mercure qu'on avoit élevé exprès dans la cloche, en suçant avec un siphon, s'est fixé, en refroidissant, un pouce neuf lignes plus bas qu'il n'étoit en commençant, & des dimensions du vaisseau, on a conclu qu'il s'étoit produit environ trente-un pouces cubiques d'air ; la cloche ayant été retournée, s'est trouvé avoir une odeur de foie de soufre ou de lessive de soude ; l'eau de chaux qu'on y a versée, a fait un précipité, & alors l'odeur est devenue savonneuse ; le charbon s'est trouvé diminué de cinq grains sur douze qui y avoient été mis.

Dans une seconde expérience, le charbon fut mis au foyer avec le même appareil, mais plein d'air ordinaire, il s'en brûla d'abord une partie, mais bientôt la vapeur de cette partie brûlée eut converti l'air ordinaire en air fixe, & il cessa de brûler, le reste se volatilisa en grande partie, comme dans l'expérience précédente : on retourna ensuite le vaisseau avec précaution, & on y introduisit une bougie allumée qui s'éteignit à l'instant ; l'eau de chaux introduite dans ce vaisseau s'est troublée, mais la précipitation en a été lente & incomplète ; il paroît donc que le charbon qui, à l'air libre

se brûle si aisément, devient très-réfractaire quand cet air lui manque; qu'alors l'extrême chaleur, au lieu de le consumer, le volatilise, sans cependant qu'il donne aucune vapeur bien sensible ni aucun sublimé; que comme le diamant, il convertit l'air ordinaire en air fixe, qui s'unit à l'eau de chaux & aux alkalis; qu'il donne, lors de sa combustion, une petite quantité de cendre vitrifiable.

Dans les expériences que nous venons de rapporter, on a pu remarquer que malgré l'analogie qui se trouve à bien des égards entre le diamant & le charbon, ce dernier se volatilisait bien plus tôt que l'autre, mais il n'y a pas lieu d'en être surpris, l'un est blanc & transparent, & laisse par conséquent passer une partie des rayons, sans en être affecté; l'autre au contraire est noir & opaque, & les reçoit tous; il n'est donc pas étonnant que le même foyer agisse plus vivement sur lui.

Ces expériences, quelque curieuses, quelque multipliées qu'elles soient, laissent encore bien des doutes à éclaircir, & M. Lavoisier lui-même en avertit au commencement de son Mémoire; il en résulte seulement que le diamant, à l'air libre, est un corps combustible à un degré de feu, à peine capable de fondre l'argent; qu'il produit, en se consumant, une matière noire & comme charbonneuse à sa surface; enfin, que comme tous les corps combustibles, il convertit partie de l'air dans lequel il brûle en une espèce de gas qui précipite l'eau de chaux, & qui ressemble beaucoup à celui qui se dégage des effervescences & des fermentations.

Telles sont les inductions qu'on peut légitimement tirer des expériences contenues dans le Mémoire de M. Lavoisier, mais il se propose bien de les continuer avec un agent encore plus puissant; la loupe ou lentille de quatre pieds de diamètre, qu'a fait construire M. Trudaine, va fournir de nouveaux moyens, & nous transporter dans un ordre de choses tout nouveau, dont les avantages seront toujours dûs au zèle & à l'amour pour les Sciences de ce Magistrat Académicien,

& l'Académie ne manquera pas d'informer le Public des observations & des découvertes qui se feront par le secours du nouvel instrument.

## SUR LA

*PESANTEUR SPÉCIFIQUE DES CORPS.*

V. les Mém.  
page 1.

CET objet est un des plus importans de toute la Physique expérimentale; c'est aussi un de ceux sur lesquels les Physiciens se sont le plus exercés: on trouve un grand nombre de Tables qui expriment le rapport qu'ont entr'eux les mêmes volumes de différentes matières, mais ces Tables ne s'accordent ni entr'elles ni aux expériences qu'on en peut faire de nouveau. Tel est le cas où s'est trouvé M. Briffon, ayant voulu se servir, dans quelques-unes de ses expériences, de la Table de M. Musschenbroëck, qui passe pour une des plus exactes, il y a trouvé des fautes assez considérables, pour l'inviter à reprendre ce travail en entier, & il a fait part cette année à l'Académie, de la manière avec laquelle il s'étoit proposé de le conduire, & du résultat de ses expériences sur les Métaux; il se propose d'examiner de même tous les corps, & de donner à l'Académie, dans une suite de Mémoires qui paroîtront successivement, une Table dont il exposera tous les élémens, & sur laquelle il sera par conséquent juste de compter plus que sur toutes celles qui ont été publiées jusqu'ici: nous allons essayer de donner une idée de sa méthode.

Il pèse tous les corps soumis à ses expériences hydrostatiquement, c'est-à-dire, qu'il examine ce qu'ils perdent de leur poids, en les plongeant dans un même fluide, & ce fluide est de l'eau de pluie bien pure ou de l'eau de rivière distillée, & ensuite reposée; & pour se procurer ces résultats avec certitude, il s'est pourvu de deux balances hydrostatiques très-exactes, l'une pour peser les corps qu'on peut avoir

aisément en grand volume, & l'autre pour peser ceux qu'on ne peut se procurer qu'en très-petit volume.

On juge bien que dans le nombre des corps que M. Briffon s'est proposé de peser hydrostatiquement, il n'a pas compris ceux qui, comme les sels sont dissolubles à l'eau, ni ceux qui s'en laissent pénétrer, il a fallu pour ceux-ci avoir recours à d'autres moyens que nous exposerons en leur lieu.

Les fluides n'étoient pas non plus susceptibles d'être pesés comme les corps solides en les plongeant dans l'eau, M. Briffon s'est servi, à leur égard, de l'aréomètre de verre; & comme la très-grande différence de densité des différens fluides ne permettoit pas d'employer toujours le même, il s'est procuré plusieurs de ces instrumens, de la proportion desquels il s'est soigneusement assuré; & comme la chaleur peut faire changer la pesanteur spécifique de l'eau qu'il prend pour son terme de comparaison, & celle des différens fluides soumis à ses expériences, elles ont toutes été faites à la température de 14 degrés au-dessus de la glace du thermomètre de M. de Reaumur, température qu'il a constamment procurée au lieu dans lequel il opéroit.

Les métaux ont été les premiers corps que M. Briffon a soumis à ses expériences; l'importance dont il est souvent, dans une infinité de circonstances, de bien connoître leur pesanteur spécifique, l'a déterminé, à commencer par-là ses recherches, & cet examen est le sujet du Mémoire dont nous avons à parler.

L'or a été éprouvé par M. Briffon en quatre états, savoir; pur & sans aucun alliage, allié au titre de l'Orfèvrerie, à celui de la Monnoie de France, & enfin à celui de la Bijouterie, & ces quatre sortes ont été éprouvées, ou simplement fondues ou fortement écrouies.

Il auroit peut-être été difficile à M. Briffon de se procurer de l'or parfaitement pur ou à vingt-quatre karats, si M. Tillet n'avoit engagé M.<sup>rs</sup> les Affineurs de la Monnoie à lui en faire avoir de cette espèce; un morceau de cet or a été choisi

dans un endroit des plus pleins, d'un de ces lingots qui pèsent quelquefois jusqu'à 40 marcs.

Ce morceau choisi entre plusieurs autres, pesoit 1 marc 1 once 5 gros 69 grains  $\frac{3}{4}$ , il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 3 grains  $\frac{1}{2}$ , ce qui donne le rapport de sa pesanteur spécifique à celle de l'eau, comme 192581 est à 10000, & par conséquent la pesanteur du ponce cube d'or pur 1 marc 4 onces 3 gros 62 grains, & celle du pied cube 1348 livres 1 once 0 gros; & 41 grains d'autres morceaux soumis à la même expérience, ont donné les mêmes résultats, avec des différences si petites, qu'on les peut regarder comme nulles; un morceau du même or écroui, autant qu'il a pu l'être, s'est trouvé avoir augmenté sa densité d'un 186.<sup>c</sup>, le ponce cube alors pesoit 1 marc 4 onces 4 gros 28 grains, & le pied cube 1355 livres 5 onces 0 gros 28 grains.

L'or allié au titre de l'Orfèvrerie, doit contenir 22 parties ou karats d'or, & deux autres de cuivre rouge; le titre de la Monnoie est le même, si ce n'est qu'on accorde aux Monnoyeurs  $\frac{10}{32}$  de karat de remède, ce qui fait 347 parties d'or, & 37 parties d'alliage.

Enfin, l'or qu'on emploie à la Bijouterie, doit être à 20 karats, c'est-à-dire, contenir 20 parties d'or & 4 d'alliage.

Ces trois espèces d'or ont été successivement examinés, tant simplement fondus qu'écrouis, & il est résulté de cet examen, que le ponce cube d'or allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, pèse 1 marc 3 onces 2 gros 48 grains, & le pied cube 1224 livres 0 onces 5 gros 18 grains; le ponce cube de ce même or écroui, autant qu'il pouvoit l'être, pèse 1 marc 3 onces 3 gros 15 grains, & le pied cube 1231 livres 4 onces 1 gros 2 grains;

Que le ponce cube d'or allié au titre de la Monnoie de France, pèse 1 marc 3 onces 2 gros 17 grains, & le pied cube 1218 livres 2 onces 3 gros 51 grains; que le ponce cube de ce même or écroui par le balancier, pèse 1 marc 3 onces 3 gros 36 grains, & le pied cube 1235 livres 5 onces 0 gros 51 grains. Il a essayé de même une Guinée, & il est



il est résulté de cet essai, que l'or de la Monnoie de France est d'un 980<sup>me</sup> plus pesant que celui de la Monnoie d'Angleterre, & par conséquent un peu plus pur.

Enfin, le ponce cube de l'or allié au titre de la Bijouterie, pèse 1 marc 2 onces 1 gros 33 grains, & le pied cube 1099 livres 10 onces 0 gros 46 grains; le ponce cube du même or écroui, pèse 1 marc 2 onces 1 gros 57 grains, & le pied cube 1104 livres 3 onces 4 gros 30 grains.

Il est rare qu'une recherche Physique, suivie par un habile Physicien, ne lui fournisse pas quelque phénomène accessoire, différent du but qu'il s'étoit proposé; c'est aussi ce qui est arrivé à M. Briffon, il lui avoit été aisé, en connoissant la pesanteur spécifique de l'or pur, & celle du cuivre rouge qui sert, comme on fait, d'alliage, de calculer quelle devoit être celle des différens mélanges de ces métaux, c'est-à-dire, de l'or différemment allié; mais il fut extrêmement surpris de trouver toujours la pesanteur spécifique de ces différens or sensiblement plus grande que ne la donnoit le calcul; d'où il résulte nécessairement que dans la fonte des deux métaux, il se fait une pénétration mutuelle qui diminue leur volume; cette espèce d'affinité du cuivre & de l'or doit au reste d'autant moins surprendre, qu'on sait que dans les mines de cuivre, l'or est presque toujours mêlé à ce métal.

L'argent a été soumis aux mêmes expériences que l'or; & M. Briffon l'a éprouvé dans trois états, très-pur & sans aucun alliage, allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, c'est-à-dire, contenant cent trente-sept parties d'argent & sept de cuivre rouge, & enfin allié au titre de la Monnoie, c'est-à-dire, contenant vingt-neuf parties d'argent & trois de cuivre.

Le ponce cube de l'argent, absolument pur, s'est trouvé peser 6 onces 6 gros 22 grains, & par conséquent le pied cube 733 livres 3 onces 1 gros 52 grains; le ponce cube du même argent écroui, autant qu'il a été possible, a pesé 6 onces 6 gros 36 grains, & le pied cube 735 livres 11 onces 7 gros 43 grains.

Le ponce cube de l'argent allié au titre de l'Orfèvrerie de  
*Hist. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

E

Paris, pesoit 6 onces 4 gros 55 grains, & par conséquent le pied cube 712 livres 4 onces 1 gros 57 grains; le ponce cube du même argent bien écroui, s'est trouvé peser 6 onces 5 gros 58 grains, & le pied cube 726 livres 5 onces 5 gros 32 grains.

Le ponce cube de l'argent allié au titre de la Monnoie de France, a pesé 6 onces 4 gros 55 grains, & le pied cube 712 livres 4 onces 1 gros 57 grains; écroui par le balancier, c'est-à-dire, dans l'état de Monnoie, le ponce cube a pesé 6 onces 5 gros 70 grains, & le pied cube 728 livres 8 onces 4 gros 1 grains.

On juge bien que les expériences faites sur l'or avoient mis M. Briffon en garde contre la pénétration des métaux, mais il a trouvé ici le contraire : loin que la pesanteur spécifique de l'argent allié se soit trouvée plus grande que ne la donnoit le calcul, elle s'est trouvée au contraire plus petite, d'où il suit que non-seulement il n'y a pas eu de pénétration, mais que même les parties ne se sont pas rapprochées autant qu'elles pourroient l'être, puisque la densité du métal composé se trouve moindre qu'elle n'auroit dû l'être.

M. Briffon a soumis à ses expériences les deux espèces de cuivre connus, le cuivre rouge & le cuivre jaune ou laiton, & l'un & l'autre ont été éprouvés simplement fondus, puis comprimés par une grande force.

Le ponce cube de cuivre rouge, simplement fondu, a pesé 5 onces 0 gros 28 grains, & le pied cube du même métal 545 livres 2 onces 4 gros; le ponce cube du même cuivre comprimé par la filière où on l'a tiré en cylindre, pesoit 5 onces 6 gros 3 grains, & le pied cube 621 livres 7 onces 7 gros 26 grains.

Le ponce cube du cuivre jaune simplement fondu, a pesé 5 onces 3 gros 38 grains, & par conséquent le pied cube 587 livres 11 onces 2 gros 26 grains; le ponce cube du même cuivre tiré en cylindre à la même filière où avoit passé le cuivre rouge, a pesé 5 onces 4 gros 22 grains, & par conséquent le pied cube 598 livres 1 once 3 gros 10 grains.

B

Fig. 1.

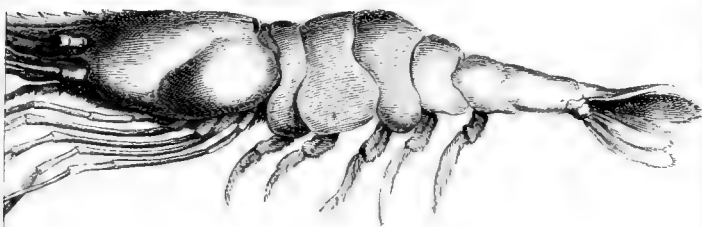
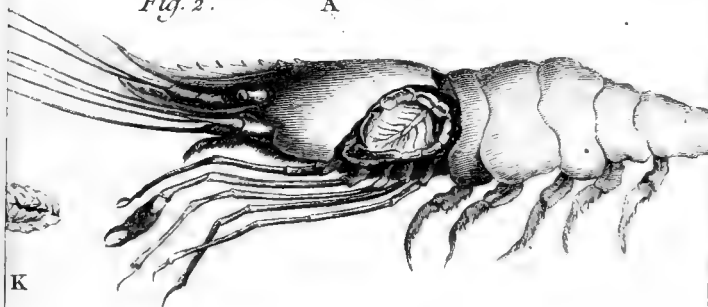


Fig. 2.

A



K



E

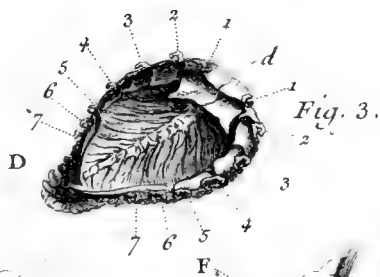


Fig. 3.

Fig. 8.

H



G



Fig. 7.

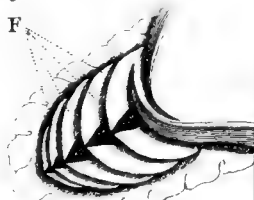
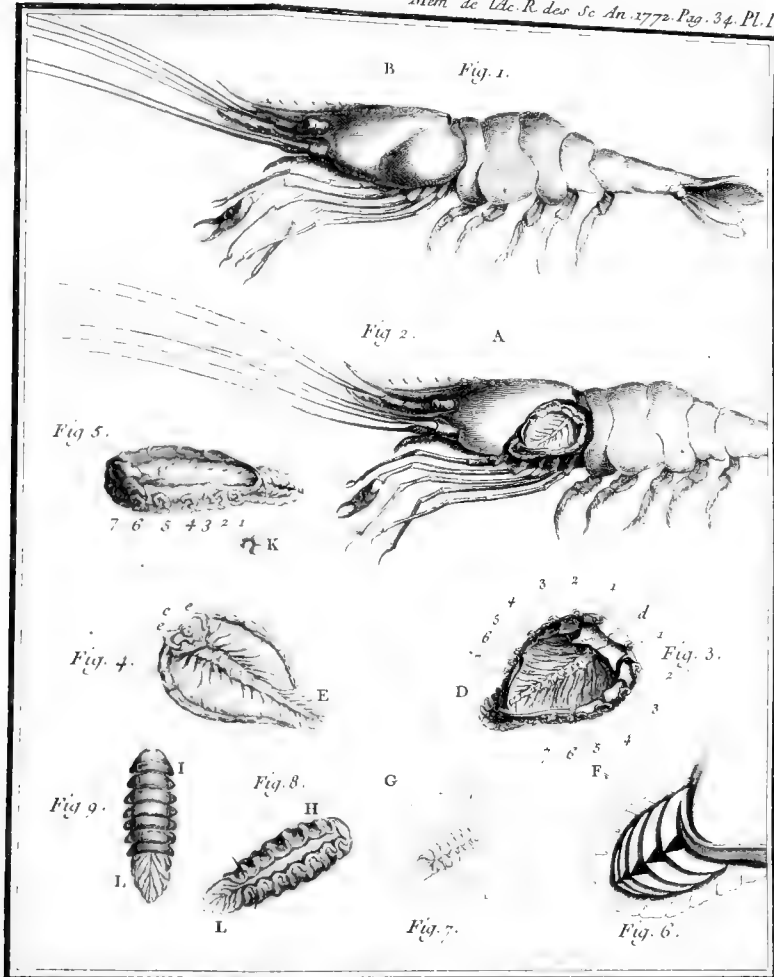


Fig. 6.



Pour peu qu'on examine les deux derniers articles, on ne peut s'empêcher d'être surpris, en voyant que le pied cube de cuivre de rosette non comprimé, est moins pesant que le même volume de cuivre jaune dans le même état, tandis que le cuivre de rosette comprimé au même degré que le cuivre jaune devient au contraire spécifiquement plus pesant que ce dernier. M. Briffon donne une raison très-plausible de cette espèce de phénomène.

Le cuivre rouge ou de rosette est un métal simple, & le cuivre jaune est un mélange de ce même cuivre & d'environ un cinquième de zinc; dans ce mélange il se fait une pénétration du cuivre & du zinc, qui entrent mutuellement dans les pores l'un de l'autre, & il en résulte nécessairement que le composé est spécifiquement plus pesant que ne l'exigent les densités particulières des deux matières composantes; & en second lieu, qu'il résiste plus à la pression que le cuivre rouge, parce que ses pores étant remplis, ses molécules ne peuvent pas se rapprocher si aisément, ce qui fait que dans ce dernier cas, le cuivre rouge qui se laisse plus aisément comprimer, devient spécifiquement plus pesant, dans un plus grand rapport que le cuivre jaune.

Le fer a été soumis aux expériences de M. Briffon, dans quatre états différens; dans l'état de fer fondu, dans celui de fer en barre, écroui ou battu à froid, & enfin battu à chaud.

Le ponce de fonte de fer très-pure, a pesé 4 onces 5 gros 27 grains, & le pied cube 504 livres 7 onces 6 gros 52 grains.

Le ponce cube du fer en barre a pesé 5 onces 0 gros 28 grains, & le pied cube 545 livres 2 onces 4 gros 35 grains.

La densité du fer en barre n'augmente pas sensiblement en l'écrouissant: bien loin de-là, elle diminue si la barre est battue en deux sens, M. Briffon en fait apercevoir la raison; le fer est composé de lames, & le martinet qui l'a réduit en barres, les a appliquées fortement les unes sur les autres, comme les feuillets d'un livre bien battu; il est donc presque

impossible de les ferrer davantage de ce sens, mais si on les bat à froid de l'autre sens, on écarte ces lames, on les courbe, & on forme dans la substance du fer une infinité de vides qui en augmentent le volume & en diminuent la densité; d'où il suit encore qu'en battant le fer à froid, on court risque de l'affoiblir & d'y produire des gerfures; les mêmes barres ayant été rougies & fortement battues à chaud, ont repris la densité que l'écoui, en deux sens, leur avoit fait perdre; ce qui confirme encore l'explication qu'a donnée M. Briffon de ce phénomène.

Non-seulement le fer se trouve dans l'état de fonte & dans celui de barre, mais on le fait encore passer, au moyen d'une opération connue, de ce dernier état, dans celui d'acier. Sous cette dernière forme il acquiert la propriété singulière de se durcir très-considérablement, si l'ayant fait rougir, on le trempe subitement dans l'eau froide.

M. Briffon a éprouvé l'acier, sans être écoui ni trempé, étant écoui & non trempé, étant trempé & non écoui, & enfin étant écoui & ensuite trempé.

Le pouce cube de l'acier dans son état naturel, a pesé 5 onces 0 gros 44 grains, & le pied cube 548 livres 5 onces 0 gros 41 grains.

Le pouce cube du même acier, bien écoui, a pesé 5 onces 0 gros 47 grains, & le pouce cube 548 livres 13 onces 1 gros 71 grains.

Le pouce cube de ce même acier écoui, trempé ensuite de tout son dur, a pesé 5 onces 0 gros 39 grains, & le pied cube 547 livres 4 onces 1 gros 20 grains; d'où il suit que la trempe diminue la densité de l'acier beaucoup plus que l'écoui ne l'augmente.

Le pouce cube du même acier trempé de toute dureté, sans avoir auparavant été écoui, a pesé 5 onces 0 gros 38 grains & le pied cube 547 livres 2 onces 2 gros 3 grains.

L'acier perd donc constamment par la trempe de la densité; en même temps qu'il acquiert de la dureté, mais il est, avant qu'on le trempe, spécifiquement plus pesant que le fer, ce

qui semble indiquer que les matières étrangères qu'on emploie pour le rendre acier, le pénètrent & remplissent les vides qu'il contenoit dans l'état de fer; sans cette pénétration, elles devroient, étant plus légères que le fer, rendre l'acier spécifiquement moins pesant que ce métal, aussi l'acier offre-t-il les deux caractères des métaux alliés, la plus grande fusibilité & la plus grande dureté.

Le plomb a été éprouvé, d'abord simplement fondu, & ensuite fortement battu à coups de marteau.

Le pouce cube de plomb simplement fondu, a pesé 7 onces 2 gros 62 grains, & le pied cube 794 livres 10 onces 4 gros 44 grains, mais on a eu beau le battre, il n'a pas acquis sous le marteau le moindre degré sensible de densité; dans une seule des expériences, il se trouva  $\frac{1}{348}.$ <sup>c</sup> d'augmentation de densité, ce qui venoit probablement de quelques soufflures qui s'étoient trouvées dans le plomb simplement fondu, & que les coups de marteau avoient fait disparaître.

Le dernier des métaux examiné par M. Briffon, a été l'étain, il en a éprouvé six sortes différentes, d'abord simplement fondu, & ensuite bien écroui.

Les six espèces d'étain soumises à ses expériences, ont été l'étain pur de Cornwall en Angleterre, dont M. Duhamel lui avoit donné un morceau, qu'il avoit obtenu par le crédit de Mylord Duc de Richemond; l'étain de Malac, & les quatre espèces d'étain des Potiers, savoir; l'étain neuf, l'étain fin, l'étain commun & la *claire-étouffe*; le pouce cube de l'étain de Cornwall, pèse 4 onces 5 gros 58 grains, & le pied cube 510 livres 6 onces 2 gros 68 grains.

Le pouce cube de cet étain bien écroui, a pesé 4 onces 5 gros 61 grains, & le pied cube 510 livres 15 onces 2 gros 45 grains.

Le pouce cube de l'étain de Malac, simplement fondu, a pesé 4 onces 5 gros 60 grains, & le pied cube 510 livres 11 onces 6 gros 61 grains.

Le pouce cube du même étain, fortement écroui, a pesé 4 onces 5 gros 64 grains, & le pied cube 511 livres 7 onces 2 gros 17 grains.

Le ponce cube de l'étain neuf des Potiers, s'est trouvé peser 4 onces 5 gros 62 grains, & le pied cube 511 livres 1 once 3 gros 47 grains.

Le ponce cube du même étain, fortement écroui, a pesé 4 onces 5 gros 66 grains, & le pied cube 511 livres 12 onces 7 gros 3 grains.

Le ponce cube d'étain fin des Potiers s'est trouvé peser 4 onces 6 gros 56 grains, & le pied cube 523 livres 8 onces 2 gros 68 grains.

Le ponce cube du même étain, fortement écroui, a pesé 4 onces 6 gros 71 grains, & le pied cube 526 livres 5 onces 5 gros 59 grains.

L'étain commun a donné pour poids du ponce cube 5 onces 1 gros 5 grains, & pour celui du pied cube 554 livres 6 onces 3 gros 14 grains.

L'étain nommé *clair-étouffé*, a donné pour poids du ponce cube 5 onces 4 gros 0 grains, & pour celui du pied cube 594 livres 1 once 2 gros 45 grains.

Ces deux dernières sortes d'étain n'ont pas sensiblement changé de densité en les écrouissant, peut-être la quantité de plomb qui entre dans leur alliage en est-elle la cause; d'ailleurs, selon la remarque de M. Briffon, l'étain lui-même augmente peu de densité par l'écroui, qui n'augmente presque pas non plus l'élasticité de ces deux métaux.

Tel est le résultat des expériences de M. Briffon, sur la pesanteur spécifique des Métaux, elles sont bien propres à faire desirer de voir publier promptement la suite de ce travail intéressant, & à faire voir à quel prix on achète l'exactitude dans les Recherches Physiques.

## SUR LE VARECH.

V. les Mém. p. 25. L'ACADÉMIE a rendu compte, en 1771\*, du Voyage de M.<sup>rs</sup> Tillet & Fougereux sur les côtes de Normandie, & de la circonstance qui y avoit donné lieu; elle y ajoutoit que les deux Académiciens qui s'étoient empressés de répondre

\* Voy. Hist. de 1771, p. 25.



à ce qui intéressoit le plus le Gouvernement, dans l'objet de leur mission, réservoient pour un autre Mémoire les observations qu'ils avoient faites sur la nature du Varech, & dont quelques-unes même pouvoient être utiles à l'objet qui avoit principalement occasionné leur voyage; c'est de cette promesse qu'ils s'acquittent dans le Mémoire dont nous avons à parler.

Nous prions le Lecteur, de se souvenir que le principal objet du Voyage de M.<sup>rs</sup> Tillet & Fougeroux, étoit de décider si on devoit permettre aux Habitans des côtes de la Normandie, de récolter le varech pour le brûler, & en tirer une espèce de soude extrêmement utile aux Verreries : on prétendoit, qu'ôter le varech, étoit priver les poissons d'une retraite utile pour leurs œufs, & pour les jeunes poissons qui en devoient éclore, & que la fumée des fourneaux où l'on brûloit cette plante, pouvoit introduire, dans le canton, des maladies épidémiques très-dangereuses.

L'examen le plus scrupuleux des deux Académiciens, n'a pu leur faire apercevoir la moindre réalité dans aucune de ces objections; ils se sont pleinement convaincus que les poissons ne se servoient point du varech pour y déposer leur frai, ni pour y chercher une retraite dans leur jeune âge, & que la fumée n'avoit d'autre inconvénient que la mauvaise odeur d'herbes brûlées, sans qu'elle n'ait jamais pu causer aucune maladie, ni aux Habitans voisins, ni aux ouvriers qui y sont continuellement plongés, ni à eux-mêmes qui l'ont expressément affronté assez long-temps pour en avoir dû ressentir les mauvais effets si elle avoit été capable d'en produire; & le résultat de toutes leurs expériences, a été de laisser subsister la récolte de cette plante marine, & la conversion en soude devenue un objet de travail & de commerce pour les Habitans de ces cantons, & de nécessité pour les Verreries qui en sont à portée.

La récolte du varech étant reconnue pour utile; il devenoit important de s'assurer des moyens de la rendre plus abondante, & d'empêcher sur-tout qu'une mauvaise manière de

la faire, ne pût la faire diminuer, c'est ce qui ne pouvoit se faire sans connoître la nature de ces plantes, & la manière dont elles se multiplient.

Nous disons de ces plantes, car sous le nom de *varech*, *Sar* ou *Goëmon*, on comprend plusieurs espèces, M.<sup>rs</sup> Tillet & Fougeroux en ont trouvé jusqu'à huit dans le nombre de celles qui composent le grand varech, qui est celui qu'on brûle de préférence; ces huit espèces sont toutes du genre des *fucus*; ces plantes ne viennent, ni sur la vase, ni même sur le sable, on ne leur trouve aucune racine, mais une espèce d'empatement, quelquefois formé en griffe, par lequel elles s'attachent aux rochers, aux pierres éboulées des falaises ou bords escarpés de la mer, à des coquilles; en un mot, à des corps incapables de leur fournir aucune nourriture, mais seulement de les garantir de l'agitation des vagues, qui malgré ce secours, en arrachent cependant une assez grande quantité qu'elles jettent & laissent au rivage.

Ces plantes ne se soutiennent droites sur leurs tiges, que lorsqu'elles sont couvertes d'eau, lorsque la mer les découvre en se retirant, elles se couchent sur le rocher qui les porte, & alors il est très-difficile d'y marcher, ces plantes ayant une certaine viscosité qui rend le chemin très-glissant.

Pour être en état de prescrire les moyens les plus propres à favoriser la multiplication des plantes qui composent ce qu'on nomme *varech*, il étoit nécessaire de connoître leurs graines, & par conséquent les organes de la fructification; ce travail avoit autrefois été commencé sur quelques-unes de ces plantes qui croissent sur les côtes d'Aunis & de Poitou, par feu M. de Reaumur, & il avoit consigné ses observations dans les Mémoires de l'Académie de 1711\*.

\* Voy. Hist.  
1771, p. 55.

Dans le nombre de ces plantes, il s'en trouve une dont les feuilles sont garnies de filets blancs, qu'on peut regarder comme la partie mâle de la plante, il est vrai que ces filets n'offrent pas, à leur extrémité, les sommets que portent les étamines des plantes terrestres, & d'où sort la poussière fécondante, mais il y a d'autres plantes du même genre qui ont

ont des filets semblables, & qui sont cependant bien reconnus pour organes féconds ; vers le mois de Septembre, nos Observateurs ont aperçu aux extrémités des feuilles, des petits tubercules qu'on pourroit prendre pour les capsules des graines.

Dans une autre plante, ces capsules sont bien mieux marquées, celle-ci les porte aux extrémités de ses feuilles, elles y paroissent sous la forme de vessies plus ou moins grosses, placées aux extrémités des feuilles ; on n'y voit point de filets, ce qui a fait croire à M. de Reaumur, & à quelques autres Naturalistes, que la première plante, dont nous avons parlé, est l'individu mâle, & celle-ci l'individu femelle ; mais les boutons ou tubercules que M.<sup>rs</sup> Tillet & Fougeroux ont observés sur le prétendu individu mâle, les porteroient à croire qu'il rentre plutôt dans la classe la plus générale des plantes, & qu'il est hermaphrodite.

Dans une autre de ces plantes, ils trouvèrent aussi des vésicules, mais celles-ci n'étoient pas constamment placées aux extrémités des feuilles, elles étoient semées çà & là sur leur surface ; celles-ci ne contenoient ni la graine ni l'espèce de mucilage qui l'accompagne dans toutes ces plantes, & nos Observateurs ne peuvent leur assigner d'autre usage que de contribuer à faire tenir la plante droite, en la rendant beaucoup plus légère que le volume d'eau qu'elle déplace ; aussi celles qui paroissent le plus chargées de ces vésicules sont précisément celles qui ont le plus de besoin de ce secours.

Une autre espèce porte aux extrémités de ses branches des siliques qui sont comme composées d'articulations.

A en juger par l'analogie de ces siliques, avec celles des plantes terrestres, on seroit tenté de chercher la graine de la plante dans l'intérieur de ces siliques, on ne l'y trouveroit cependant pas, quoique les siliques la contiennent, elle y est placée sous l'enveloppe extérieure, & les loges de la silique ne sont remplies que par des filets déliés.

Il paroît en général que, conformément au sentiment de Donati, le système de la fructification des plantes marines,

diffère de celui de la fructification des plantes terrestres, en ce que, dans ces dernières, la partie fécondante est une poussière qui a l'air pour véhicule, & que les graines destinées à rouler, ou à être emportées par le vent, ont des formes relatives à cet usage, au lieu que dans les plantes marines, la partie fécondante est une liqueur visqueuse qui procure le double avantage de féconder les graines, & de les coller ensuite aux corps durs sur lesquels elles doivent germer & croître.

Les plantes qui composent le varech, qu'on brûle sur les côtes de Normandie, se trouvent souvent chargées de polypiers de différentes espèces, M.<sup>rs</sup> Tillet & Fougeroux y en ont trouvé quelques-unes, la plupart connues des Naturalistes.

La fructification de ces plantes étant connue, il auroit été bien avantageux, pour trouver le moyen de les multiplier, de connoître la germination de leurs graines, ou ce qui est la même chose, la manière dont elles se développent, mais ce développement, qui se fait vraisemblablement sous les eaux de la mer, doit être extrêmement difficile à saisir, aussi a-t-il échappé aux recherches les plus assidues de nos Observateurs.

Au défaut de cette connoissance, ils se sont tournés d'un autre côté, & ont cherché à connoître s'il étoit plus avantageux de couper le varech que de l'arracher.

L'Ordonnance rendue à ce sujet, prescrit de le couper, & elle s'exécute dans quelques provinces, mais dans la Normandie on l'arrache, & la raison qu'en donnèrent les ouvriers aux deux Académiciens, c'est qu'en arrachant les plantes au mois d'Avril, on ménage les jeunes qui donnent une seconde récolte au mois de Septembre, & que d'ailleurs les tiges cassées ou coupées, ne produisent plus rien, & nuisent à la pousse des jeunes plantes; ils en firent en effet voir plusieurs de cette espèce.

Ces raisons méritoient d'autant mieux d'être écoutées, que la méthode usitée en Normandie, d'arracher le varech, au lieu de le couper, est plus longue & plus pénible que cette

dernière, & que par conséquent, ce ne pourroit être l'intérêt qui les fit parler.

Pour n'avoir cependant rien à se reprocher sur un article si important, ils résolurent de consulter le véritable oracle des Physiciens, l'expérience.

Pour cela ils choisirent, vers la fin d'Avril, un canton de varech qui fut partagé en trois; dans la première partie, le varech fut arraché entièrement; dans la seconde, plusieurs rangées furent coupées à deux pouces de l'empattement, d'autres à quatre, & enfin les dernières aux trois quarts de la hauteur de la plante; dans la troisième enfin, on laissa le varech sans y toucher, avec ordre exprès de le respecter; le but de M.<sup>rs</sup> Tillet & Fougeroux étoit de s'assurer du temps jusqu'auquel le varech peut croître sans se détériorer, mais des circonstances imprévues les mirent hors d'état de pouvoir rien prononcer sur cet article; revenons aux deux autres, c'est-à-dire, au varech coupé & au varech arraché.

Les deux Observateurs étant revenus le 25 Septembre, ils trouvèrent que la partie où le varech avoit été arraché entièrement, étoit garnie de nouvelles plantes qui avoient deux à trois pouces de hauteur, & qui au 25 Novembre se trouvèrent crûes jusqu'à six pouces, & quelques-unes jusqu'à neuf.

Dans le canton où le varech avoit été coupé, il étoit encore dans le même état, au moins pour celui qui avoit été coupé près de l'empattement, la partie de tige demeurée, étoit devenue plus noire, & principalement près de la section; on ne voyoit dans toute cette partie, que quelques jeunes plantes venues de graine dans les endroits éloignés des tiges coupées; les plantes coupées plus haut avoient, en quelques endroits, quelques houppes de nouvelles feuilles qui ne promettoient pas de belles productions; au 25 Novembre toutes ces tiges étoient fanées, & dans tout ce canton, il ne s'est trouvé qu'un seul pied coupé sur la racine duquel on ait vu une nouvelle tige, d'environ un pouce & demi, qui y étoit venue de graine.

Ces expériences semblent prouver que la méthode d'arracher le varech est infiniment préférable à celle de le couper, & la quantité de ces plantes qui se reproduisent sur les côtes de Normandie où l'on est dans l'usage de les arracher, est au moins une preuve sans réplique que cette opération ne nuit pas à leur reproduction, & qu'on doit réformer ou ne pas suivre à la lettre l'article de l'Ordonnance, qui ordonne de couper le varech.

Ceci même semble très-conforme à la bonne Physique ; les fucus, suivant l'idée de M. le Comte Marfigli, sont une plante toute racine, entourée de toutes parts de l'eau de la mer, dont elle tire sa nourriture ; d'où il suit qu'en coupant les feuilles, & ne laissant que la tige, on empêche nécessairement sa reproduction ; cette petite théorie parfaitement d'accord avec l'expérience, semble demander aussi que le varech soit arraché & non coupé, & qu'on ne l'arrache que dans le temps auquel il a déjà donné sa graine ; on peut s'en fier sur ce point à ceux qui font ce commerce, de l'intérêt desquels il est de favoriser la reproduction de cette matière.

## SUR LA

## SUPÉRIORITÉ DES PIÈCES D'ARTILLERIE,

*longues & solides, sur les Pièces courtes & légères.*

V. les Mém.  
P. 77.

L'OBJET de ce Mémoire est aussi singulier qu'intéressant, il semble qu'il ne doive y avoir aucune question sur ce sujet, qui devroit être très-peu soumis à l'empire de la mode, & le Mémoire de feu M. de Vallière, dont nous allons essayer de donner une idée, est destiné à présenter les véritables principes par lesquels doit être décidée cette question.

La longueur & le poids des pièces d'Artillerie, ne sont nullement arbitraires, il y a un *maximum*, s'il m'est permis d'employer ce terme, dans cette matière en-deçà ou au-delà duquel on tombe dans des inconvénients d'autant plus graves,

qu'on s'en éloigne davantage ; feu M. de Vallière le père ne se détermina pour les calibres qu'il prescrivit dans l'Ordonnance de 1732, que sur les observations sans nombre qu'il avoit eu occasion de faire pendant les vingt-huit dernières années du règne de Louis XIV, sur les effets & les inconvéniens des différentes artilleries de l'Europe, & qu'il avoit eu tout le loisir de méditer & de combiner pendant la paix qui accompagna le commencement du règne de Louis XV.

Malgré l'autorité de cet illustre Officier, si digne d'être Législateur en cette partie, le système des pièces courtes & légères qui s'étoit accrédité dans le Nord, a pénétré jusqu'en France, où il a trouvé des partisans qui ont porté leur zèle jusqu'au point de vouloir absolument supprimer les pièces longues de 12, de 8 & de 4, établies par l'Ordonnance de 1732, & leur substituer uniquement les pièces courtes & légères.

C'est à cette prétention que M. de Vallière fils a cru devoir s'opposer, & il a consigné, dans le Mémoire dont nous avons à rendre compte, les raisons qui le portent à proscrire cette nouvelle espèce d'artillerie ; essayons d'en mettre le précis sous les yeux du Lecteur.

Il est tout naturel de penser que plus une arme à feu a de longueur, plus aussi elle a de justesse & de portée ; un fusil de même calibre qu'un pistolet, porte bien plus loin avec la même charge, & la justesse du tir en est sans comparaison plus grande ; & une tradition constante assure que les coulevrines portoient beaucoup plus loin que les autres pièces.

Toutes ces assertions fondées sur des faits connus de tout le monde, se trouvent encore fondées dans la saine théorie ; il ne faut pas s'imaginer que toute la poudre de la charge d'une pièce d'artillerie, soit efficacement employée à chasser le boulet, une partie est jetée hors de la pièce sans être brûlée, & celle qui se brûle en formant ce long cylindre de feu qu'on voit sortir de la bouche des pièces, ne contribue presque point à chasser le boulet ; il est donc constant que du moins jusqu'à un terme, dont la plus longue artillerie n'approche

pas, plus la pièce sera longue, & moins il y aura de poudre consumée inutilement; c'est aussi ce que les expériences de Robins & de M. le Chevalier d'Arcy, de cette Académie, ont pleinement confirmé.

En vain allégueroit-on, comme font les partisans de l'artillerie légère, l'exemple d'une coulevrine, dont un morceau de deux pieds & demi près de la volée ayant été emporté par le boulet, la pièce chassa ensuite son boulet plus loin; l'accident même fait voir évidemment que l'ame de cette pièce n'étoit pas droite, & que la partie emportée faisoit obstacle au boulet; ce n'est pas tout, les avantages attribués aux pièces longues, leur ont été, disent-ils, attribués sans preuves, & sans être appuyés sur l'expérience: jamais assertion ne fut plus dénuée de fondement, quand les pièces longues n'auroient, pour les appuyer, que l'usage constant qu'on en a fait à la guerre, on ne pourroit pas dire qu'elles n'ont pas pour elles l'expérience, mais elles en ont de faites expressément pour décider cette question: écoutons parler M. de Montecuculi, si bien connu dans toute l'Europe militaire.

Il fit fondre quantité de pièces, depuis la plus courte jusqu'à la plus longue, & depuis la plus légère jusqu'à la plus pesante; il fit tendre ensuite des toiles d'espace en espace dans la ligne du coup; il fit aussi tirer plusieurs coups contre une terre argilleuse, pour juger de la force & de la direction des coups des différentes pièces; & d'un très-grand nombre d'expériences, il conclut que l'artillerie trop légère ne peut faire un grand effet, qu'elle recule trop, qu'elle s'échauffe en peu de temps, & qu'elle ne tire pas toujours juste, & que les coulevrines, dont l'ame a depuis trente-deux jusqu'à trente-six calibres de longueur, portent plus loin que les autres pièces. Veut-on consulter M. Robins, il établit pour maxime que, de deux pièces de même calibre de différente longueur, la plus longue avec la même charge, imprime à son boulet une plus grande vitesse que l'autre, & il cite à ce sujet une coulevrine de soixante calibres de longueur, qui ayant été réduite à vingt, ne put, avec la même charge, enfoncer son boulet qu'à



la moitié de la profondeur où elle l'enfonçoit quand elle en avoit soixante.

Veut-on encore une autorité de plus, M. d'Antoni, Directeur de l'École d'Artillerie de Turin, regarde dans son excellent ouvrage intitulé : *Examen de la poudre*, la supériorité des pièces longues comme incontestable, & elle s'y trouve démontrée par le raisonnement & par plusieurs expériences, & ce qui mérite bien d'entrer en ligne de compte, ces expériences avoient été faites dans d'autres vues.

La théorie en ce point parfaitement d'accord avec l'expérience, prononce donc en faveur des pièces longues, & fait voir qu'à charge égale, leur boulet a plus de vitesse, & va plus loin que celui des pièces courtes de même calibre.

Mais, diront les défenseurs de la nouvelle artillerie, nous pouvons parvenir au même point, en donnant plus d'élévation à nos pièces, & en diminuant le vent de leurs boulets, au lieu que les partisans de l'ancienne artillerie augmentent celui des leurs beaucoup au-delà de l'Ordonnance de 1732.

La preuve de cette dernière assertion est sur-tout singulière, on a trouvé, dit-on, dans quelques arsenaux des boulets qui avoient plus de vent que ne le prescrit l'Ordonnance; mais ces boulets ne seroient-ils point de calibre étranger? ne seroient-ils point antérieurs à l'Ordonnance? & quand ils lui seroient bien postérieurs, que seroient-ils? qu'une infraction de la loi qui auroit échappé à la vigilance des Officiers chargés de la maintenir, & qui ne peut lui porter aucune atteinte.

Quant au plus d'élévation des pièces, & à la diminution du vent, c'est-à-dire, du jeu des boulets dans les pièces, il est clair qu'on n'en pourroit tirer aucune induction en faveur de l'artillerie courte, puisque ces mêmes opérations étant ou pouvant être communes aux pièces longues & aux pièces courtes, ne donnent à ces dernières aucun avantage sur les autres, & nous allons bientôt voir que cet avantage n'existe point.

Pour faire mieux comprendre ce qui concerne l'élévation des pièces, il ne sera peut-être pas inutile de rappeler au

Lecteur, qu'un boulet de canon ne décrit point, en sortant de sa pièce, une ligne droite; la pesanteur agit sur lui en même temps que l'impulsion de la poudre, & lui fait décrire une courbe, en sorte que si la ligne de mire étoit exactement parallèle à l'ame du canon, le boulet porteroit toujours plus bas que le point qu'on auroit voulu atteindre, mais comme pour pointer on suit le dessus du canon, & que la pièce est beaucoup plus épaisse à la culasse qu'à la volée, la direction de l'ame fait, avec la ligne de mire, un angle qui compense à une certaine distance l'abaissement du boulet causé par la pesanteur.

Il suit encore de la même théorie, 1.<sup>o</sup> que plus la vitesse imprimée au boulet par la poudre, sera grande, moins il baissera par l'effet de la pesanteur; 2.<sup>o</sup> qu'en élevant la pièce on augmente sa portée jusqu'à un certain point, & ce point  
 \* *Voy. Hist. a été déterminé par M. de Borda* \*, en ayant égard à la  
 1769, p. 112. résistance de l'air à 42 degrés 10', mais dans ce dernier cas le boulet perd de sa vitesse, & n'est presque, à la fin de sa course, animé que par la seule pesanteur, aussi est-il très-rare de voir pointer le canon sous cet angle : on savoit donc bien qu'on augmentoit la portée des pièces en les élevant, & si l'on ne se servoit pas de ce moyen, c'est qu'il avoit paru plus utile de se servir de boulets vifs & dans toute leur force, que de boulets morts; on en peut dire autant de la diminution du vent, pratiquée dès le règne de Louis XIII, de laquelle les pièces longues même profiteroient plus que les courtes, parce que la poudre enflammée, retenue plus long-temps dans l'ame de la pièce, doit communiquer une bien plus grande vitesse au boulet; mais voici, selon M. de Vallière, quelque chose de bien plus fort, les pièces longues ont plus de justesse que les pièces courtes, tant du côté du pointement, que du côté du tir; du côté du pointement, parce que la collimation est d'autant plus exacte, que l'instrument est plus grand; & du côté du tir, parce que le boulet étant chassé avec plus de vitesse, arrive plus promptement au but, a moins à effuyer l'effet de la pesanteur, & pourra conserver une bien plus grande

grande force, que celui qui n'arriveroit à la même distance, qu'en élevant davantage la pièce, & qui a dans ce cas assez perdu de la sienne pour ne pouvoir faire de ricochet ; la pièce longue a donc sur la courte la supériorité de justesse.

Pour remédier à cet inconvénient, les partisans de la nouvelle Artillerie ont imaginé d'adapter une hausse mobile à leurs canons, mais M. de Vallière prétend que cette hausse ne remédie à rien, 1.<sup>o</sup> parce qu'elle sera sujette à se rompre ou à se fausser, 2.<sup>o</sup> parce qu'en la supposant dans le meilleur état, elle ne servira qu'à donner de l'élévation à des pièces qui en ont déjà trop, & à faire lancer des boulets qui retomberont au hasard, & qui dans le cas le plus favorable, ne pourroient au plus blesser qu'un homme, tandis que le boulet des pièces longues peut en mettre quelquefois, d'un seul coup, huit ou dix hors de combat par ses ricochets ; mais il y a plus, cette hausse est un moyen infaillible de détruire toute la justesse du pointement ; un champ de bataille n'est presque jamais un terrain de niveau, pour peu qu'une des roues de l'affût soit plus basse que l'autre, la hausse déclinera vers la roue la plus basse, le rayon de mire obtenu par son moyen, ne sera plus dans le même plan vertical que l'axe de la pièce, & le coup ne portera pas où l'on a pointé.

Il n'est donc pas possible de retrouver, dans les pièces courtes, une égalité de portée & de justesse avec les pièces longues, elles n'ont pour elles que leur légèreté, encore comme nous le verrons bientôt, ce prétendu avantage est-il très-illusoire, mais il en résulte un inconvénient très-réel, c'est un recul beaucoup plus grand que celui des pièces longues ; ce recul est inévitable, il est causé, tant par le moins de pesanté, que par la plus grande mobilité que l'on donne aux roues des affûts de ces pièces, en faisant les essieux de fer, & garnissant de cuivre l'intérieur des moyeux ; les expériences faites à Grenoble, prouvent que le recul de ces pièces du nouveau modèle, est plus que triple de celui des pièces de l'ancien ; inconvénient terrible, tant par l'empla-

cement, souvent précieux qu'exige ce recul, que par le danger qu'il fait courir à ceux qui servent ces pièces.

M. de Vallière ne se dissimule pas que la pesanteur de notre Artillerie est un inconvénient, mais si on ne peut la diminuer sans en diminuer aussi les effets, est-il raisonnable de vouloir l'entreprendre? & avons-nous à nous plaindre si nous comparons notre Balistique à celle des Anciens, & les effets de notre Artillerie à ceux de leurs machines?

Mais, diront les défenseurs de la nouvelle Artillerie, c'est en cela même que consiste l'avantage de nos pièces légères; des hommes les portent par-tout sans le secours des chevaux: oui, pour la pièce de quatre, car aucun des calibres supérieurs ne peut être manœuvré à bras. Mais quand on lui accorderoit cet avantage, ces pièces, dont l'effet est si médiocre, n'ont-elles pas besoin, comme les pièces longues, que leurs munitions les suivent; leur multitude n'embarrassera-t-elle pas plus qu'un train d'Artillerie ordinaire qui produiroit des effets terribles, dont celles-ci sont incapables; il y a plus, les épreuves ont décidé qu'il falloit employer la pièce de huit courte, pour remplacer celle de quatre longue, & ainsi du reste; ces pièces courtes consomment donc au moins une moitié en sus de munitions de plus que les pièces longues, ou auront un tiers de coups de moins à tirer; & c'est-là, dit M. de Vallière, ce qu'on nomme *Artillerie légère*.

Le dernier refuge des défenseurs des pièces courtes & légères, est de dire que quand les pièces anciennes auroient sur les nouvelles toute la supériorité que M. de Vallière leur attribue, cette supériorité de portée & de justesse seroit inutile à la guerre, & que la nouvelle Artillerie a de quoi satisfaire à tous les cas qui peuvent se présenter. C'est à réfuter cette assertion que M. de Vallière emploie la seconde partie de son Mémoire, dans laquelle il fait voir l'importance à la guerre, de la supériorité des pièces longues: & voici sur quoi il la fonde.

Dans tous les cas où le théâtre de la guerre se trouvera loin des frontières, il faudra y faire parvenir un double

équipage d'Artillerie, un pour les sièges, & l'autre pour la campagne, au lieu que dans l'ancien système, quelques pièces de seize & de vingt-quatre ajoutées au train d'Artillerie, remplissoient toutes les vues.

N'eût-on à attaquer qu'une bicoque, capable cependant de soutenir quelques coups de canon, il faudra s'y morfondre & perdre un temps, souvent précieux, pour attendre des pièces de sièges? & si on en surcharge l'équipage, ne sera-t-on pas exposé à les traîner, souvent inutilement, pendant toute la campagne, sans trouver une seule fois l'occasion de les employer? au lieu qu'avec l'Artillerie ordinaire, on est à portée de saisir toutes les circonstances heureuses.

Veut-on construire quelqu'ouvrage ou fortifier quelque poste, que fera-t-on avec des pièces trop courtes pour servir dans des embrasures, il en faudra donc faire venir exprès au hasard d'en être ensuite très-embarassé?

La supériorité de portée & de justesse des pièces longues, n'a-t-elle donc pas un avantage réel dans une infinité d'occasions? tant qu'on combattra Artillerie contre Artillerie; quel avantage n'aura pas celle qui portera ses coups plus juste & plus loin? auroit-on pu éteindre, avec deux seules batteries, tout le feu du front d'attaque de Berg-op-zoom, si on n'avoit eu que des pièces courtes. Des pièces longues capables de tirer de flanc, aidées de quelques mortiers, éteignirent en deux jours tout le feu que les nombreuses batteries qu'on lui avoit opposé, n'avoient pu seulement diminuer pendant plusieurs semaines.

Ce n'est donc pas toujours, comme l'a reconnu le Roi de Prusse, bon juge en pareille matière, le nombre des pièces d'Artillerie qui assure le succès des expéditions, mais la manière de les employer.

Nous dirons des batailles, ce que nous venons de dire des sièges, il faut de même que l'Artillerie y soit employée avec intelligence; mais pour qu'un moindre nombre de pièces puisse suffire, il faut qu'elles soient capables des effets qu'on leur demande. Or, c'est ce qu'on ne peut espérer d'obtenir des

pièces courtes & légères. Par les épreuves faites à Straßbourg en 1740, en présence de M.<sup>rs</sup> les Maréchaux de Broglie & d'Asfeldt, pour comparer la vivacité du feu de la pièce de quatre longue, & de la pièce de quatre courte, il fut bien reconnu, qu'à la vérité, la pièce courte tiroit onze coups dans le temps que la pièce longue n'en tiroit que neuf, mais que la première s'échauffant plus vite, il falloit interrompre son feu, tandis que l'autre continuoit encore son service, sans avoir besoin d'être rafraîchie; il n'y a donc rien à gagner pour la vivacité du feu, & tous les inconvéniens que nous avons exposés, subsistent sans la moindre compensation : revenons aux différens usages auxquels l'Artillerie peut être employée, dans une campagne, & suivons pas à pas; dans toutes ces circonstances, la comparaison des pièces longues & des pièces courtes.

Veut-on défendre ou tenter le passage d'une rivière, il s'agit, principalement dans la défense, de maîtriser par son canon l'embouchure des rivières affluentes où l'ennemi fera vraisemblablement ses préparatifs; or, en pareil cas peut-on hésiter sur l'espèce d'Artillerie qu'on doit choisir? ne fera-ce pas celle qui a la plus longue portée, & le plus de justesse dans le tir; si l'on pouvoit avoir sur ce point quelque incertitude, l'exemple que nous allons rapporter ne la laisseroit pas subsister long-temps.

M. le Maréchal de Coigny ayant ordonné d'établir une batterie de dix pièces de quatre à la rive gauche du Rhin, pour battre l'embouchure du Neckar, & couler bas les bateaux qui s'y présenteroient; on y employa des pièces à la Suédoise, c'est-à-dire, des pièces de quatre courtes & des pièces de quatre longues, qu'arriva-t-il? les premières qui ne pouvoient arriver au but qu'en les pointant fort haut, plongeoiént & ne ricochoient point, au lieu que les boulets des autres portoient beaucoup plus loin, & faisoient, sur la surface de l'eau après l'avoir touchée, plusieurs ricochets.

Si l'ennemi veut traverser une rivière, n'est-il pas avantageux de le battre dès qu'il paroît sur la rive opposée, pendant

qu'il s'embarque, & pendant le trajet, la longue portée sert pour le premier cas, & la justesse du tir pour tous les trois; le même avantage se retrouvera encore s'il s'agit de nettoyer le bord d'une rivière qu'on veut passer en présence de l'ennemi, ou s'il s'agit de lui faire abandonner, par la canonnade, un poste où l'on ne peut l'aller aborder.

Un des plus utiles usages de l'Artillerie dans la guerre de campagne, est de troubler l'ordre d'une armée ennemie qui se dispose à combattre, & d'empêcher les corps de se former; des pièces de quatre longues peuvent, sous l'élévation de quatre degrés, porter à la distance de mille toises, & y faire des ricochets, bien plus propres à troubler les manœuvres, que les coups de plein fouet; si l'ennemi se forme & s'avance, elles peuvent prendre des directions obliques, & mettre à chaque coup sept à huit hommes hors de combat, que feront-là des pièces courtes de même calibre, qui ne peuvent tirer que directement & jusqu'à cinq cents toises sans pouvoir faire des ricochets, & ne peuvent au plus mettre que trois hommes hors de combat? tandis que la pièce longue, placée avantageusement, en peut mettre quelquefois quinze à dix-huit hors d'état de nuire; une batterie de pièces longues peut être employée avec succès à démonter le canon de l'ennemi, elle peut, au gré du Général, porter le trouble & le désordre sur telle partie de la première ligne qu'il veut faire attaquer, & frayer par-là le chemin à la victoire; elle peut empêcher les bataillons ennemis de se porter secours mutuellement, & préparer à chaque instant de nouvelles attaques; les pièces courtes ne peuvent presque rien exécuter de tout cela, tant à cause de leur peu de portée, que parce que l'étendue de leur recul ne permet souvent pas de les placer, où des pièces longues le feroient très-commodément.

Si ce que nous venons d'avancer avoit besoin de preuves, les batailles de Raucoux, de Dettinghen & d'Hastembeck en fourniroient de bien fortes, quelles pièces employa Raucoux, M. le Maréchal de Saxe, pour rompre la colonne ennemie qu'il voyoit se former? des pièces de seize longues, qui eurent

bientôt décidé le gain de la bataille, & de quel poids n'est pas en cette matière le choix de ce grand Général?

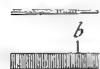
A Dettinghen, qu'eussent fait des pièces de la nouvelle Artillerie contre l'armée angloise, qui se formoit à sept cents toises de la nôtre, & bien au-delà de sa portée? une seule batterie de pièces longues, avantageusement placée, rompit toutes les mesures des ennemis, & leur fit perdre beaucoup de monde.

A Hassembeck, qu'auroit-on pu faire, s'il avoit fallu attendre que l'ennemi fût à cinq cents toises pour tirer sur lui? on lui auroit laissé le moyen de former, sans risque, une colonne formidable que les feux de front, d'écharpe & de revers, que la portée des pièces longues permirent de prendre sur lui, mirent en déroute, nous procurant une victoire complète, presque sans aucune perte.

La prééminence des pièces longues, sur les pièces courtes, se trouve donc absolument prouvée, tant à raison de leur solidité, qu'eu égard à leur plus grande portée, à leur justesse dans le tir, à la médiocrité de leur recul, &c. mais à tous ces avantages, M. de Vallière ajoute une réflexion, c'est qu'elles procurent encore de l'économie; les pièces de quatre longues font avec avantage l'office des pièces de huit courtes, & celles de huit longues, celui des pièces de douze courtes; il s'ensuit donc que dans un train d'Artillerie de pièces anciennes, il faut plus d'un tiers de poudre, & un tiers de poids de boulets moins que dans un équipage de cette Artillerie prétendue légère, & qui exige cependant un beaucoup plus grand nombre de chevaux & de voitures.

En vain les partisans de la nouvelle Artillerie objecteront-ils à M. de Vallière, que la portée de cinq cents toises est plus que suffisante, que l'excédant de portée n'est qu'une superfluité plus que compensée par la promptitude avec laquelle se manœuvre la nouvelle Artillerie; qu'au-delà de cinq cents toises on ne peut porter que des coups incertains; & qu'enfin, il faut, avec ses ennemis, se battre à armes égales, si l'on ne veut être battu.





O

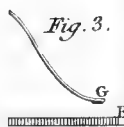
Nº I.

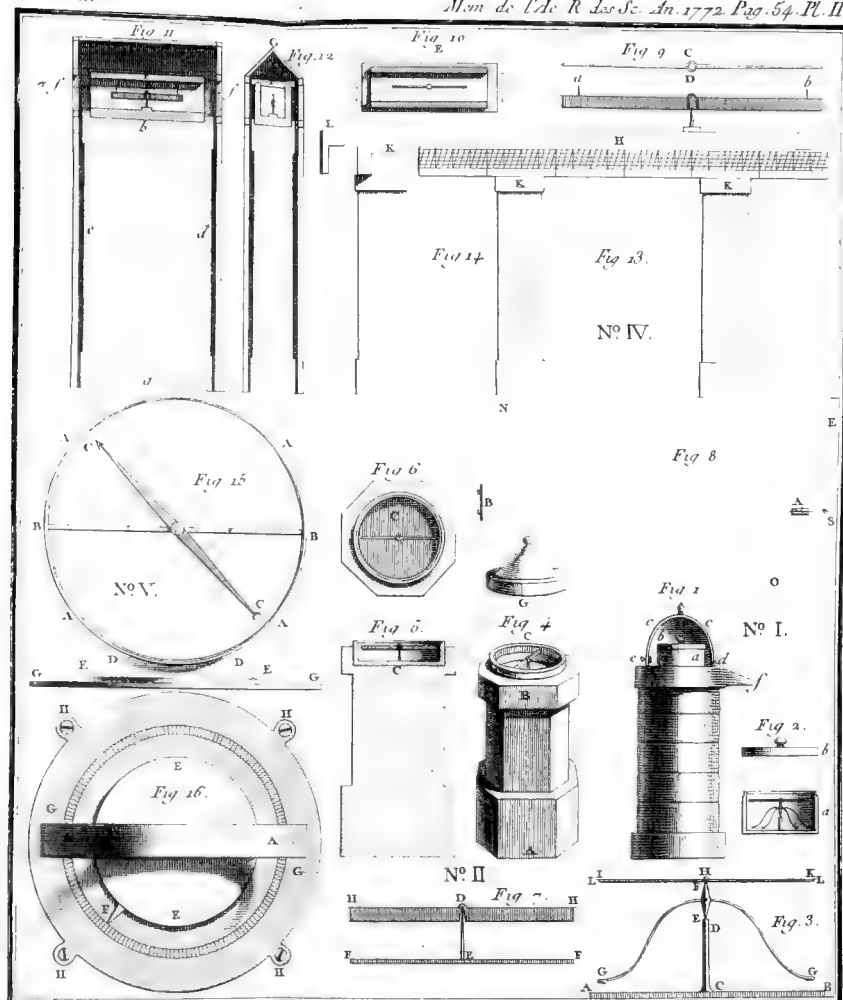
*f*

*Fig. 2.*



*Fig. 3.*





Où, répond M. de Vallière, si l'on n'en a pas de meilleures, mais si on en possède qui, à sept ou huit cents toises, atteignent vigoureusement l'ennemi, & mettent le désordre dans les troupes, comme il pourroit faire dans les nôtres à cinq cents toises, faudra-t-il attendre qu'il soit arrivé à cette distance? tandis qu'avec une Artillerie meilleure que la sienne, on peut, avec sécurité, l'empêcher d'arriver à la distance où il pourroit nuire, & de plus, le fatiguer avant qu'il puisse nous atteindre & rompre les troupes qu'il voudroit faire avancer; il y a plus, le retranchement de matière qu'on a fait dans les pièces courtes, les rend bien plus susceptibles de s'échauffer, & les empêche de pouvoir soutenir long-temps un feu vif & continu, si nécessaire dans bien des occasions.

Telles sont les judicieuses réflexions puisées dans la plus saine théorie, & appuyées de près de cinquante années d'expériences, que M. de Vallière a cru devoir déposer dans les registres de l'Académie; mais pour ne rien laisser à désirer, il a terminé, à la prière de l'Académie, ce Mémoire, par un tableau qui contient la comparaison de l'ancienne & de la nouvelle Artillerie, à nombre égal de pièces, & qui fait voir combien la dernière augmente les embarras, le nombre de voitures, de chevaux, de conducteurs, & combien elle est plus dispendieuse. Il en résulte que l'ancienne Artillerie réunit en sa faveur la plus grande justesse du tir, & sous un moindre degré d'élévation, l'étendue des portées & la force nécessaire aux effets; la simplicité dans la construction & dans le service, soit qu'on tire à barbette, c'est-à-dire à découvert, ou à embrasures, le moindre embarras dans les marches, la solidité nécessaire à la sûreté & à la durée, la légèreté réelle, l'économie de la poudre, celle du terrain pour les reculs, celle de la dépense; & enfin les succès confirmés par une longue expérience à la guerre; que de motifs pour la conserver!

*SUR LA VARIATION ET L'INCLINAISON  
DE L'AIGUILLE AIMANTÉE.*

V. les Mém.

P. 457.

\* V. 1.<sup>re</sup> Part.  
1772, Mém.  
page 157.

**M.** LE MONNIER a rendu compte, dans la première partie des Mémoires de cette année \*, des attentions scrupuleuses avec lesquelles il s'étoit assuré de la variation de l'Aiguille à Paris, & de la comparaison qu'il en avoit faite, avec quelques autres observations faites en basse Bretagne : mais voici quelque chose de bien singulier ; M. Maraldi, de cette Académie, des observations duquel l'exactitude est bien connue, a observé avec deux boussoles différentes, 8 degrés de différence entre la variation observée à Périnaldo, dans le comté de Nice, & celle qui a été observée dans le même temps à Paris.

Cette énorme différence a piqué la curiosité de M. le Monnier, il a recherché dans les observations anciennes, les différences observées entre les variations à Paris & dans les différentes villes d'Italie ; & pour s'assurer que cette différence ne venoit pas des observations de Paris, il les a comparées avec celles de Londres, & cette comparaison lui a donné une marche assez constante.

Venons aux observations d'Italie ; en 1670, selon M.<sup>r</sup> Auzout & Picard, la différence de variation entre Rome & Paris, étoit de 45 minutes ; en 1695, selon M.<sup>rs</sup> Cassini & de la Hire, cette même différence étoit de 42 minutes ; veut-on remonter plus haut, Varenius & Crescentius la donnent, l'un en 1602, & l'autre en 1610, égale à Rome & à Paris, c'est-à-dire, de huit degrés à l'Est, comme elle étoit alors ; la variation étoit donc très-peu différente à Paris & dans toute l'Italie ; voyons ce que donnent des observations plus récentes, en 1756 M. de la Condamine observa à Notre-Dame de Lorette la variation de l'Aiguille de 15 degrés 35 minutes, différente de celle qui fut alors observée à Paris, d'environ 2 degrés, ce qui se rapproche de l'observation récemment faite par M. Maraldi, mais n'en donne cependant que

que le quart de la différence qu'il a observée : on trouve \* que la variation avoit été observée à Périnaldo de 8 degrés en 1696, tandis qu'elle n'étoit que de 7 à Paris ; comment expliquer une aussi grande différence que celle que M. Maraldi vient d'y trouver ? supposera-t-on quelque mine de fer dans les montagnes qui avoisinent Périnaldo ? mais il vaut mieux remettre au temps & aux observations, l'explication de ce phénomène, que de s'efforcer d'en deviner la cause, c'est aussi ce qu'a fait M. le Monnier.

\* Voyez dans les Mémoires de l'Acad. avant 1699, p. 521.

A l'Écrit dont nous venons de parler, il a joint des remarques sur la carte Suédoise, de l'inclinaison de l'aimant, publiée par M. Wilcke en 1768 ; cette carte est une carte réduite, qui comprend les deux hémisphères, jusqu'à la mer glaciale au Nord, & jusqu'au cap Horn au Sud. V. les Mém. page 461.

Il seroit certainement à désirer que les observations de l'inclinaison de l'aiguille aimantée fussent plus multipliées, il en résulteroit vraisemblablement bien des connoissances, qui mèneraient peut-être un jour, sinon à celle de la cause physique des phénomènes de l'aimant, du moins à celle des phénomènes généraux en cette matière, & de la manière dont ils se particularisent.

Dans la disette où nous sommes de bonnes observations sur cette matière, on ne pouvoit certainement faire mieux que de rassembler sur une même carte, toutes celles que nous avons ; feu M. Halley avoit eu cette idée pour les variations horizontales, & l'avoit exécutée en 1700 ; mais il n'y avoit encore que Musschenbroëck qui eût pensé à rassembler, dans une même carte, toutes ces observations d'inclinaison, ce n'est cependant que de cette manière qu'on peut parvenir à se former une idée de l'action du magnétisme dans les différentes parties de notre globe ; tous ceux qui s'intéressent à l'avancement de la Physique, doivent donc applaudir au travail de M. Wilcke, mais en même temps que M. le Monnier s'acquitte de cette dette, en publiant de nouveau cette carte, il a cru devoir y joindre quelques réflexions relatives à des erreurs dans lesquelles il semble que soit tombé M. Wilcke, & il propose

*Hist. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

H

en même temps les observations à faire pour éclairer tous les doutes. Il les propose avec d'autant plus de raison, qu'il croit d'un côté que l'Auteur de cette carte n'a été conduit à ces erreurs, que par la suite du système des quatre pôles magnétiques, qu'il semble avoir adopté, & que M. le Monnier ne croit pas, à beaucoup près, assez solidement établi, & que de l'autre les aiguilles d'inclinaison qu'il propose d'employer, sont exemptes de plusieurs défauts qui altèrent la justesse des aiguilles ordinaires; la flexion, par exemple, que la pesanteur occasionne dans les aiguilles, lorsqu'elles sont près de la situation horizontale, est si bien compensée par le moyen qu'il propose, que le centre de gravité ne sort point de la verticale. A l'aide des observations que propose M. le Monnier, & de quelques positions qu'il a ajoutées à la carte, & sur-tout la direction actuelle de la ligne sans déclinaison qui passe par Kola, au cap Comorin, & jusque dans la nouvelle Hollande, on pourra beaucoup éclaircir cette importante matière, jusqu'ici si peu connue.

V. les Mém.  
Page 44.

Tandis que M. le Monnier s'occupoit de mettre dans un certain ordre les observations connues de l'aimant, M. Duhamel travailloit à établir, à la terre de Denainvilliers, des boussoles capables d'en procurer de très-exactes, tant sur la déclinaison que sur l'inclinaison de l'aiguille aimantée; dans la vue d'éloigner ses boussoles de tout fer, il les a soigneusement écartées du bâtiment, & les a placées dans les différens bosquets de son parc.

Nous n'entrerons point ici dans les détails de construction que M. Duhamel a exposés dans son Mémoire, où ils sont accompagnés de figures qui en facilitent beaucoup l'intelligence: nous nous contenterons de donner une idée de ce que cet exact Observateur a cru devoir y ajouter, pour rendre les observations plus précises.

Ces boussoles sont au nombre de six, quatre de déclinaison, & deux d'inclinaison.

La première est construite suivant l'idée de M. Antheaume, publiée par l'Académie en 1750 \*, que M. Duhamel a

\* Voy. Hist.  
8750, p. 6.

employée par préférence, pour donner le plus de mobilité possible à son aiguille; elle est comme toutes les autres dont nous allons parler, établie sur un pilier de pierre de taille, dans la construction duquel on a soigneusement évité d'employer ni brique ni mortier de ciment, de peur qu'un peu de fer contenu dans l'argile, & revivifié par la cuisson, ne pût agir sur les boussoles & les déranger; cette aiguille n'a que six pouces de longueur.

Celle de la seconde boussole a quinze pouces de longueur, un pouce de large, & une ligne d'épaisseur; ces dimensions lui ont été données par M. Duhamel, parce qu'ayant remarqué que des barreaux un peu forts, prenoient, en les aimantant, plus de vertu que les autres; il a voulu voir si dans une aiguille de ce volume, il y auroit plus à gagner du côté de la force magnétique qu'à perdre sur la mobilité, & comme dans une largeur aussi grande, il pourroit y avoir des parties qui s'aimantant plus que les autres, feroient détourner l'aiguille de sa direction, il a pris le parti de la mettre sur le champ.

Il a même poussé l'attention jusqu'à ôter la glace qui couvroit cette boussole, pour obvier aux dérangemens qu'on soupçonne que peut causer l'électricité, & à y substituer un fort carton, percé vis-à-vis du limbe, & dont l'ouverture, en cet endroit, étoit fermée par une lame de corne très-transparente.

Pour être même plus sûr de son fait, M. Duhamel a fait construire une boussole avec une aiguille de même grandeur, mais extrêmement légère, il s'est trouvé, par l'expérience, que l'aiguille pesante étoit au moins aussi sensible que la légère.

Pour avoir, avec plus de précision, la quantité de variation des aiguilles, M. Duhamel a employé un moyen très-ingénieux; il a fait faire une caisse oblongue de pierre, qui représente une portion d'une grande boussole, & l'a fait placer sur un pilier de pierre à peu-près dans la direction de l'aiguille, c'est-à-dire, faisant, avec la Méridienne, un angle d'environ 20 degrés à l'Ouest; les deux bouts de cette caisse sont fermés

par des glaces, & il y a mis une aiguille large, de quatorze pouces de longueur, composée de deux lames mises de champ, qui se touchent dans toute leur longueur, excepté au milieu où elles sont courbées pour recevoir la chape, & cette longue aiguille porte à sa partie supérieure deux pointes très-déliées, qui servent comme de pinnules.

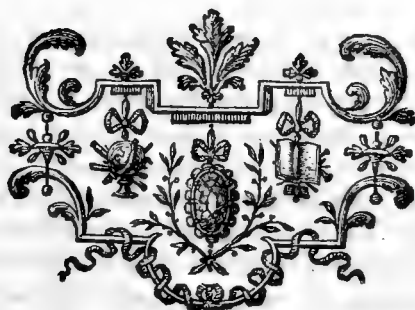
A cinquante-deux pieds de distance, & dans la direction de la longueur de cette boussole, il a fait élever perpendiculairement à cette direction, deux piliers qui supportent une pierre, dans la face antérieure de laquelle est encastrée une forte barre de fer de six pieds de long, sur six pouces de large, sur laquelle il a fait marquer les degrés d'un cercle, qui auroit pour centre le pivot de la boussole; ces degrés ont un pied, & sont divisés en 60 minutes; il est évident qu'en pointant à travers les glaces des extrémités de la boîte, par les deux pinnules de l'aiguille, on a le point où le rayon visuel se termine sur le limbe, & que la grandeur de ses divisions ne permet pas de craindre d'erreur sensible.

Les deux dernières boussoles sont d'inclinaison, les pivots de leurs aiguilles roulent sur deux feuillets d'agate très-polis, pour en diminuer le frottement, & la boîte verticale qui les enferme, est attachée sur un plateau rond horizontal qui peut tourner sur un autre plateau attaché à la pierre; le but de cette construction tient à un principe d'expérience, connu de tous ceux qui ont travaillé sur l'aimant; une boussole d'inclinaison ne donne la véritable élévation du pôle magnétique, que lorsqu'elle est placée exactement dans le plan du Méridien magnétique, ou ce qui revient au même, sur la ligne de variation; or cette ligne est variable, il falloit que la boussole la pût suivre, & c'est pour cela que M. Duhamel a rendu le plateau qui la porte mobile sur un centre, il y a ajouté un index, & au plateau fixe une division qui indique la position dans laquelle on place la boussole; ces deux dernières ne diffèrent, qu'en ce que l'aiguille de l'une est bien plus légère que celle de l'autre, & il en est arrivé ce qu'on devoit naturellement attendre: l'aiguille légère éprouvant



moins de frottement , a éprouvé plus de variations que l'autre.

Tout cet appareil , au reste , a plutôt pour but d'observer exactement les variations diurnes & accidentelles qu'on commence à remarquer dans les boussoles , que de fixer la quantité de la variation ordinaire. Il s'en faut bien que tous les phénomènes de l'aimant nous soient encore connus , & on ne peut que savoir gré à ceux qui , comme M. Duhamel , n'épargnent aucun soin pour porter le flambeau de l'expérience dans cette obscure recherche.





# ANATOMIE.

SUR LES

## CHANGEMENS QU'ÉPROUVE L'OS

*appelé le Canon, dans certains Quadrupèdes.*

V. les Mém.  
page 502.

ON trouve dans l'étude de l'Anatomie des exemples sans nombre d'Os qui s'unissent & qui se soudent ensemble, les sutures du crâne & les épiphyses des os longs en fournissent d'assez frappans, mais on n'en connoissoit aucun de deux os longs simplement contigus dans le fœtus, qui s'unissent peu de semaines après la naissance, & finissent au bout de quelques mois par former un seul os; la cloison osseuse formée par les parois réunies des deux os, se trouvant entièrement détruite.

La connoissance de ce phénomène singulier est dûe aux recherches de M. Foucheroux, il a lieu dans les os de la jambe de tous les animaux à pied-fourché, que nous connoissons, si cependant on en excepte le Cochon & le Sanglier, qui sont, pour le dire en passant, les seuls de cette classe qui ne ruminent point, du moins parmi les animaux de nos contrées: voici les remarques que M. Foucheroux a faites sur ce sujet, & principalement sur les bœufs & sur les moutons.

Dans les fœtus de Vaches & de Brebis, l'avant-dernière portion de la jambe, à laquelle les pinces sont articulées, & dont l'os se nomme *Canon*, est composée de deux os longs cylindriques, ayant chacun leur périoste, leur canal médullaire

& leurs épiphyses, alors ces os sont séparés l'un de l'autre; peu de temps après que les épiphyses sont devenues adhérentes aux os, ceux-ci se soudent eux-mêmes & deviennent adhérens, de façon qu'il est impossible alors de les séparer; si dans cet état on les scie transversalement, on voit encore distinctement, dans l'intérieur, les deux canaux médullaires séparés par une cloison osseuse, formée par la réunion des parois des deux os qui se sont soudés; quelques mois après cette cloison devient plus mince, elle ne forme plus qu'un tissu réticulaire; & enfin elle disparoît entièrement d'abord dans la partie moyenne de l'os, & ensuite vers les épiphyses; alors les deux os n'en forment plus qu'un, sans garder d'autre vestige de leur premier état, qu'un sillon assez profond à la partie antérieure; ce sillon étoit connu des Anatomistes, mais ils étoient bien éloignés d'en pouvoir assigner la cause: examinons, d'après M. Foucheroux, la marche de la Nature dans cette opération.

Les deux os destinés à former, par leur réunion, l'os du canon d'un bœuf, sont dans le fœtus de cet animal, gros chacun comme un tuyau de plume; ces os commencent à se réunir, environ quatre semaines après la naissance, alors la capacité des deux canaux médullaires est moindre qu'elle ne sera par la suite; mais lorsque la réunion est achevée, & que la cloison commence à se détruire, ce qui arrive à l'âge de neuf à dix semaines, pour lors le canal médullaire qui va devenir unique, a toutes les dimensions qu'il aura dans le bœuf devenu adulte. M. Foucheroux s'en est assuré par des observations répétées.

Ce fait mérite une attention particulière, il est assez généralement reçu parmi les Anatomistes, que dans les os longs, le canal médullaire augmente en grandeur, tant que croît l'os; l'observation de M. Foucheroux introduit nécessairement une exception à cette règle, puisque dans le bœuf l'os du canon a acquis à dix semaines toute la largeur du canal médullaire, qu'il aura dans l'âge le plus avancé de l'animal, il n'augmente plus alors qu'en épaisseur; ce même os qui à dix semaines,

n'avoit qu'environ deux lignes d'épaisseur, en acquiert jusqu'à six dans le bœuf devenu adulte.

Plusieurs questions se présentent ici à résoudre, la première est de savoir comment se fait cet épaissement de l'os; la seconde est de déterminer comment se détruit la cloison; & la troisième, de savoir comment les deux gaines médullaires qui renfermoient la moëlle dans les deux os réunis, n'en font plus qu'une après la destruction de la cloison.

Pour résoudre la première question, M. Fougereux a mis en œuvre les connoissances données par M. Duhamel & par M. Hérissant, sur la formation des os & sur leur décomposition; il a mis pour cela dans un acide adouci, un jeune os moitié d'un canon de veau non encore réuni, feu M. Hérissant a fait voir que l'acide dissolvoit la matière crétacée qui fait la dureté de l'os, en épargnant la partie membraneuse qui en forme, pour ainsi dire, le canevas. L'os que M. Fougereux avoit mis en expérience, étant ainsi décomposé, il trouva que les lames osseuses, réduites par ce moyen à leur état primitif de membranes, contournoient exactement tout le cylindre de l'os.

Il fit la même expérience sur un os semblable, mais déjà réuni avec son voisin, & dans lequel on voyoit encore la cloison, mais diminuée d'épaisseur, & qui commençoit à se perdre.

Cet os ayant été décomposé par le moyen de l'acide affoibli, M. Fougereux en examina soigneusement les couches membraneuses: & voici ce qu'il y remarqua.

Les lames extérieures enveloppoient entièrement tout le cylindre osseux, mais il n'en étoit pas de même des lames internes, elles étoient moins fortes aux endroits où se trouvoit la cloison, & on voyoit à l'endroit où cette cloison avoit été ou étoit encore, une désunion dans les fibres, telle que pourroit l'offrir une étoffe dans laquelle la trame ou la chaîne seroient interrompues sur quelques fils.

Ces observations donnèrent à M. Fougereux une solution assez plausible des deux premières questions; en effet, si l'on  
veut

reut supposer que les os longs augmentent leur épaisseur par l'addition de nouvelles couches extérieures, & que l'agrandissement du canal médullaire, se fait par l'extension des lames osseuses internes; il est aisé de comprendre que les nouvelles lames osseuses qui revêtent les deux cylindres extérieurement, interceptent le passage de la matière crétacée dans la cloison intermédiaire, & que les lames internes s'étendant en même temps pour augmenter le canal médullaire, elles distendent les fibres de la cloison, en diminuant l'épaisseur; & que cette cloison ne recevant plus d'ailleurs de matière crétacée, elle doit diminuer toujours, & enfin s'anéantir.

Il n'est peut-être pas aussi facile d'expliquer comment les deux gaines médullaires n'en font plus qu'une dans toute la partie où la cloison est anéantie; cette gaine devenue unique dans l'animal adulte, se séparant vers les épiphyses où la cloison subsiste toujours; M. Fougereux a constaté ces faits, mais il n'en a pas trouvé jusqu'à présent de raison plausible, & c'est un problème dont il propose la solution aux Anatomistes.

Toutes ces observations n'indiquant pas encore assez clairement à M. Fougereux, comment se faisoit la réunion de ces deux os en un, il résolut de faire d'autres expériences, en introduisant entre les deux os une lame de plomb avant leur réunion; cette opération étoit très-délicate, & plusieurs jeunes agneaux qui y furent soumis, y périrent; cependant l'adresse de M. Dupas, Chirurgien de Pithiviers, & les soins qu'il se donna pour les pansemens, en sauvèrent trois desquels M. Fougereux fait mention dans ce Mémoire : voici le résultat des expériences.

Le premier de ces animaux fut opéré deux jours après sa naissance : on tenta d'introduire une lame de plomb mince entre les deux os qui devoient composer l'os du canon d'une des jambes de derrière, l'animal fut soigneusement pansé, & la plaie guérit heureusement. Deux mois après M. Fougereux le fit tuer, & il examina l'os du canon de la jambe opérée, auquel l'os semblable de l'autre jambe, auquel on n'avoit pas touché, servoit de pièce de comparaison.

*Hist. 1772. II<sup>e</sup> Partie.*

Dans cette dernière, les deux os étoient déjà réunis, & n'en paroissent former qu'un seul, mais en le sciant, M. Fougereux y trouva la cloison dans toute l'étendue de l'os, elle étoit seulement un peu diminuée d'épaisseur.

Dans la jambe à laquelle on avoit fait l'opération, M. Fougereux trouva que l'expérience n'avoit pas réussi comme il le desiroit, au lieu d'avoir placé la lame entre les deux os, on avoit ouvert un des deux os, sans le percer de part en part, l'ouverture se trouvoit un peu à côté de la cloison; l'os étoit beaucoup plus épais à l'endroit où il avoit été piqué, & il s'étoit formé une masse d'ossification qui bouchoit presque entièrement le canal, & se confondoit avec la cloison, en un mot, M. Fougereux ne remarqua dans cet os, que ce qu'on remarque dans les os piqués ou fracturés, & il n'en put tirer aucune instruction sur ce qu'il desiroit savoir.

Dans cette circonstance, il crut devoir répéter l'expérience; l'agneau qui en fut le sujet fut opéré, comme le premier, deux jours après sa naissance, l'ouverture fut plus large, la lame de plomb plus grande, elle fut placée, autant qu'on le pût, à l'endroit où l'on jugeoit que devoit être la cloison, & on laissa l'animal vivre jusqu'à trois mois; ayant alors été tué, on examina l'os du canon de la jambe saine, & celui de la jambe sur laquelle l'opération avoit été faite.

Dans la première l'os du canon avoit presque entièrement perdu sa cloison, du moins dans la partie moyenne, mais dans la jambe opérée, le canal médullaire étoit presque entièrement rempli par une nouvelle substance osseuse, occasionnée par le corps étranger introduit dans l'os, & la cloison, si elle y existoit encore, étoit si bien confondue dans cette masse, qu'il étoit impossible de l'y distinguer.

M. Fougereux voyant donc que l'interposition des lames de plomb ne lui pouvoit donner aucune connoissance de la manière dont s'opéroit la réunion des deux os, il pensa que si cette réunion & la destruction de la cloison, s'opéroient par la pression des deux os l'un contre l'autre, en emportant une partie de l'un des deux os, il n'y auroit plus de pression

dans cet endroit, & que la cloison ne s'y détruiroit pas, tandis qu'elle se détruiroit dans le reste de l'os. Il fit donc enlever de l'un des deux os du canon d'un agneau, né depuis vingt-quatre ou trente heures, une portion d'environ huit lignes, la plaie fut pansée soigneusement jusqu'à l'entière guérison, & on laissa vivre l'animal environ six mois, il ne fut tué qu'au bout de ce temps : & voici ce qu'offrit l'examen de ses jambes.

Le canon du pied sain avoit presque entièrement perdu sa cloison, on n'en apercevoit de vestiges qu'au voisinage des deux épiphyses, encore étoient-ils très-minces.

Dans l'autre jambe, la partie emportée de l'os s'étoit régénérée, mais cette partie reproduite étoit moins épaisse que le reste de l'os; la cloison étoit presque entièrement détruite dans le haut, mais au-dessous de la plaie, elle étoit restée beaucoup plus longue & plus épaisse que dans l'autre jambe : on voyoit aisément que la plaie faite à l'os, avoit nui à la destruction de la cloison, & que peut-être même la cloison eût subsisté sans la régénération de la partie d'os emportée.

Quelque variées qu'aient pu être les expériences de M. Foucheroux, elles ne lui ont pas encore dévoilé le secret de la Nature dans cette réunion de deux os en un; mais en attendant que de nouvelles tentatives qu'il se propose de faire, & qu'il invite les Anatomistes à essayer de leur côté, aient pu l'éclairer suffisamment sur ce point, il pense que la Nature dans cette occasion ne s'écarte pas de son plan général; que les os contigus ont une facilité très-grande à se réunir; que dans ceux qui doivent conserver du mouvement les uns avec les autres, elle y a interposé une graisse particulière qu'on nomme *sinovie*, & que lorsqu'elle manque, ce qui arrive dans quelques maladies, les deux os ne manquent pas de se souder, & peut-être, avec le temps, n'en formeroient plus qu'un; & qu'enfin la graisse dont les pores abondent est vraisemblablement l'obstacle qui empêche, dans cette espèce, les deux os du canon de se réunir en un; comme ils sont dans tous les autres animaux à pied-fourché que nous connoissons :

on pourroit peut-être s'imaginer que l'ingénieux moyen employé par M. Duhamel, de teindre les couches d'os des animaux avec la garance qu'on mêle dans leur nourriture, auroit pu être utilement employé dans cette occasion, mais on se tromperoit en le croyant, il ne s'agit pas ici, comme dans l'expérience de M. Duhamel, de l'accroissement des os, mais de leur destruction; & d'ailleurs, comment mettre à cette nourriture des animaux aussi jeunes que ceux que M. Fougeroux a employé, & qui ne vivoient presque encore que du lait de leurs mères. Mais quoi qu'il en soit, l'observation & le travail qu'il a fait sur cette matière, offrent une nouvelle carrière aux recherches des Anatomistes.

---

## S U R L E S

## SECOURS QU'ON PEUT TIRER DE L'ART;

*Pour corriger ou prévenir les difformités de la taille, soit dans l'enfance, soit dans un âge avancé.*

V. les Mém.  
p. 468.

LA juste proportion des membres & l'élégance de la taille ont été regardées, par presque tous les peuples policés, comme des avantages, & tous en ont fait assez de cas, pour chercher les moyens de se les procurer.

Ils auroient été bien plus animés à cette recherche, s'ils avoient su combien de maux peut causer le dérangement de l'épine dans le corps animal, que ce dérangement peut arriver à tout âge, & que l'art offre des moyens de s'en garantir ou de le réparer; c'est à la discussion de tous ces points qu'est destiné le Mémoire de M. Portal, duquel nous avons à rendre compte.

Pour peu qu'on soit au fait de la structure du corps humain, on sait quel rôle y joue l'épine ou colonne vertébrale, plusieurs muscles y ont leurs attaches; elle seule maintient les différentes capacités du corps dans la proportion qui leur est nécessaire.



& le moindre dérangement, dans cette partie, peut produire des accidens quelquefois mortels, & toujours d'autant plus graves, qu'on n'en soupçonne pas même la cause, & qu'on tourmente inutilement le malade par des remèdes incapables de le guérir.

M. Portal en rapporte plusieurs exemples très-singuliers : nous nous contenterons d'en citer quelques-uns ; croiroit-on, par exemple, que le déversement de l'épine eut pu causer des douleurs dans les cuisses ? cependant un fait rapporté par Marcus Aurelius Severinus, ancien Professeur d'Anatomie à Naples, fait voir la possibilité de ce fait, & que la Dame qui en fut le sujet, ne fut guérie de ses douleurs, que lorsqu'on eut opéré le redressement de son épine ; une autre se plaignoit d'une douleur vive au bout du pied gauche, trois ou quatre heures après avoir mangé, & n'avoit pu être guérie de ses douleurs par aucun remède ; l'ouverture du cadavre après sa mort, fit voir que ses douleurs n'avoient d'autre cause que le déversement de l'épine, & la compression, que les fausses côtes dérangées par ce déversement, & l'intestin colon, lorsqu'il étoit plein, faisoient sur les nerfs lombaires.

Non-seulement le dérangement des vertèbres peut produire des douleurs & des maladies organiques, par le déplacement des parties qui en dépendent, mais ces maladies peuvent devenir très-graves, & quelquefois même mortelles.

Il est vrai cependant qu'elles ne vont que bien rarement à ce point lorsque le dérangement de l'épine est arrivé dans l'enfance ; alors les nerfs, les muscles & les viscères, encore très-flexibles, se proportionnent en quelque façon dans leur développement, au dérangement de la charpente osseuse, & le sujet n'éprouve que des incommodités supportables ; mais quand le dérangement de l'épine arrive dans l'âge plus avancé, & auquel toutes les parties ont pris leur accroissement & leur solidité, alors elles éprouvent des tiraillemens & des compressions capables de produire les accidens les plus fâcheux ; & d'interrompre ou d'altérer toutes les opérations de l'économie animale.

Mais ce déversement de l'épine est-il possible dans un âge avancé ? oui sans doute, nous allons, d'après M. Portal, constater le fait par quelques observations, puis nous tenterons d'assigner les causes de ce dérangement.

Une Dame de Province âgée d'environ quarante-huit ans, d'une bonne constitution, & d'une assez belle taille, étant venue à Paris, il y a peu d'années, y tomba malade d'une fièvre putride, dont la convalescence fut très-longue, M. Portal qui l'avoit vue pendant sa maladie, apprit six mois après qu'elle étoit devenue bossue, & tellement inclinée du côté droit, que sa tête & sa poitrine y penchoient considérablement, & qu'elle ne pouvoit marcher sans se soutenir l'épaule avec une béquille, il l'examina, & ayant trouvé que la cause de ces accidens n'étoit que le déversement de l'épine, il essaya d'y remédier par une machine, dont le point d'appui étoit une ceinture de buffle, & qui, au moyen d'une tige surmontée d'un croissant bien rembourré & passé sous le bras, soutenoit l'épaule ; & comme il auroit peut-être été difficile de la faire revenir tout d'un coup à la hauteur convenable, la tige avoit une crémaillère, au moyen de laquelle cette réduction se fit peu-à-peu ; on aidoit l'effet de cette machine par des frictions faites, tantôt à sec, tantôt avec des liqueurs spiritueuses dans lesquelles on avoit dissous du savon, elle reprit son embonpoint, & n'eut, en assez peu de temps, besoin que d'un corps ordinaire pour maintenir sa taille, encore le quittoit-elle lorsqu'elle se couchoit.

La même chose arriva quelque temps après à une vieille fille qui servoit chez un des Élèves de M. Portal, mais celle-ci n'eut pas besoin de machine, l'usage d'un corps ordinaire qu'elle prit par son conseil, suffit pour la mettre en état de continuer ses fonctions.

Un noble Napolitain fut subitement attaqué d'une douleur vers l'un des deux os ischion ou de la hanche, qui l'empêchoit de marcher librement ; on essaya beaucoup de remèdes inutilement : Severinus, dont nous avons parlé, fut appelé, & trouva

par la recherche, que la cause de tout ce désordre, étoit le déplacement des vertèbres qu'il travailla à redresser.

On trouve dans les Œuvres de M. Morgagni, un autre exemple plus funeste, des suites que peut avoir le dérangement de l'épine, celui qui en fut le malheureux sujet, mourut après avoir été affligé de deux tumeurs considérables, & de convulsions violentes; à l'ouverture du corps, on trouva que ces fâcheux accidens n'étoient dûs qu'au déverlement de l'épine. Le déverlement latéral des vertèbres lombaires, produit des phénomènes encore plus singuliers; le tiraillement du muscle *psoas* qui a son attache dans le voisinage, & qui sert au mouvement de la cuisse, souvent celui des nerfs, causent au malade une difficulté de marcher sans tenir la cuisse un peu fléchie, souvent la compression que les vertèbres & les fausses côtes déjetées font sur les nerfs, causent des stupeurs & des engourdissemens dans les endroits où ils se rendent; en un mot, il est une infinité de maladies fâcheuses & d'incommodités désagréables, qu'occasionnent le déverlement de l'épine, & qu'on ne s'aviserait pas de lui attribuer.

Mais quelle peut être la cause du dérangement de l'épine dans des personnes qui l'ont toujours eue très-droite, & qui n'ont essuyé aucun accident qui ait pu la courber?

La structure de cette partie, bien examinée par M. Portal, lui a fourni la réponse à cette question.

L'épine ou colonne vertébrale est composée de trente vertèbres posées les unes sur les autres, & séparées néanmoins par des cartilages intermédiaires; elles sont soutenues par un ligament commun qui les revêt toutes, & par des ligamens particuliers, & de plus, les muscles du dos qui y ont leurs attaches, achèvent de les maintenir dans leur position.

Il résulte évidemment de cette structure, que si quelques-uns de ces agens sont altérés, il est impossible que la position des vertèbres ne le soit aussi; c'est effectivement ce qui arrive, & nous allons voir que l'âge les altère tous.

1.<sup>o</sup> Il est de fait qu'à mesure qu'on avance en âge, les

ligamens se raccourcissent; or ce raccourcissement ne peut avoir lieu sans tirer l'épine en avant, parce que le ligament antérieur est beaucoup plus fort que les postérieurs; 2.<sup>o</sup> les cartilages intermédiaires perdent, en se desséchant, une partie considérable de leur épaisseur, les vertèbres se rapprochent l'une de l'autre, & pour peu que l'épaisseur de ces cartilages se trouve plus diminuée d'un côté que de l'autre, il en résulte nécessairement une flexion dans l'épine; 3.<sup>o</sup> enfin les muscles du dos qui devroient, en ce cas, agir avec plus de force pour contenir les vertèbres, plus difficiles alors à mouvoir, parce qu'elles sont plus serrées, perdent au contraire une partie de leur force, & agissent moins vigoureusement; en sorte que toutes les causes concourant à faire courber l'épine en avant, & quelquefois sur le côté, il est très-rare que ce dérangement n'ait plus ou moins lieu dans un âge avancé, & que souvent il ne cause des maladies dangereuses.

C'est donc principalement dans ce cas qu'il faut aider la Nature, soit par des machines, soit par de simples corps baleinés; mais il faut bien se souvenir que ces machines ou ces corps ne doivent pas être tous faits de même, & que leur forme doit être appropriée à la maladie de chaque sujet qu'on a à traiter. Toutes ces discussions seront l'objet d'un second Mémoire, que M. Portal se propose de donner sur cette importante matière.

Il suit encore de ce que nous venons de dire, qu'à moins d'une menace de dérangement, les corps baleinés sont assez inutiles dans l'enfance & dans la jeunesse, les muscles alors sont dans leur force, & les ligamens ont toute leur souplesse; mais non-seulement ils sont alors inutiles, ils sont encore nuisibles par l'inaction dans laquelle ils tiennent les muscles du dos, qui en oblitère les mouvemens, en sorte que lorsqu'on veut les quitter dans un âge plus avancé, ce que ne manquent pas de faire beaucoup de Dames, on risque de s'exposer à la courbure de l'épine, & à tous les inconvéniens qu'elle peut occasionner; il faut donc, quand on est accoutumé à l'usage des corps, le continuer.

Mais

Mais pour tirer pour la santé tout le parti possible de l'usage des corps, même dans l'enfance, ou dans la jeunesse, il faudroit consulter plus qu'on ne fait la structure du corps humain, pour ne la pas contrarier. La poitrine est naturellement plus large par le bas que par le haut, & les corps tendent à lui donner une forme toute opposée; le bas-ventre est naturellement plus saillant que la poitrine, ou tout au moins à son niveau; les corps tendent à le rendre moins saillant, sur-tout par le bas, ils repoussent par ce moyen les viscères, & les refoulent contre le diaphragme qui, de son côté, s'élève dans la poitrine, & gêne les poumons; l'épine, dans une personne bien faite, doit avoir quatre courbures, & les corps tendent à la mettre en ligne droite, de-là une infinité de dérangemens dans l'économie animale, de compressions & de maladies organiques, souvent dangereuses & quelquefois mortelles, qu'on éviteroit en se conformant un peu plus aux vues de la Nature. On ne trouble pas impunément ses opérations.

## SUR

## L'ANATOMIE DES OISEAUX.

L'ANATOMIE comparée a toujours fait une grande partie des occupations des Anatomistes, si quelque chose en effet est capable de découvrir en certains points le secret de la Nature, c'est la manière dont elle a été comme forcée de varier les parties analogues dans les différentes espèces, pour les rendre propres aux usages particuliers auxquels elles sont destinées; c'est dans cette vue que le scalpel des Anatomistes s'est si souvent exercé sur les quadrupèdes, dont la structure est plus rapprochée de celle du corps humain; mais on étoit fort en arrière sur les Poissons & sur les Oiseaux. M. de Vicq-d'Azyr a entrepris la discussion de l'un & de l'autre objet; il avoit communiqué son travail sur les Poissons, à l'Académie, avant même qu'il en fût Membre, & elle l'avoit publié dans

V. les Mém.  
page 617.

Hist. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.

K

\* Voy. Sav.  
Étr. T. VII,  
p. 233.

le VII.<sup>me</sup> volume des Savans Étrangers \*. Il lui a depuis donné celui qu'il a fait sur les Oiseaux, dont le Mémoire duquel nous avons à rendre compte, contient le plan général, & les deux premiers articles de l'exécution, savoir ; une partie de l'histoire du squelette & des muscles : nous allons essayer de présenter une légère idée de l'un & de l'autre.

Bellonius a décrit le squelette des oiseaux, & dans la vue de mieux remarquer ce qu'il avoit de commun avec l'homme & les autres animaux, & ce en quoi il en différoit, il l'a redressé sur ses pieds ; ce moyen si simple & si ingénieux étoit certainement le plus propre de tous à produire l'effet qu'il desiroit, mais il s'est contenté de nommer les pièces qui composent ce squelette, sans décrire les variétés qui se trouvent dans les différens oiseaux, sans entrer dans aucun détail sur leur mécanisme, & sans parler des muscles qui doivent leur donner le mouvement.

\* Voy. anc.  
collect. T. III,  
1.<sup>re</sup> & III.<sup>me</sup>  
Partie.

L'Académie, dès les premiers temps de son institution, s'étoit occupée de la dissection des oiseaux : on trouve dans la collection de ses Mémoires avant 1699 \*, des descriptions très-bien faites de plusieurs oiseaux, mais on s'y est principalement attaché aux viscères, & la structure des muscles paroît y avoir été extrêmement négligée ; d'autres savans Anatomistes ont suivi la même carrière, mais ils semblent tous avoir formé le dessein de négliger absolument l'anatomie des muscles, à peine en trouve-t-on quelques vestiges dans leurs ouvrages.

Borelli qui traitoit spécialement du mouvement des animaux, semble être celui dans les ouvrages duquel on devoit trouver plus de détail sur les muscles des oiseaux, il s'est pourtant si peu étendu sur cette partie, qu'il n'en a décrit que deux dont il a déterminé l'action, & qu'il a comparés à ceux de l'homme ; mais malgré la subtilité du calcul qu'il a employé, il n'a pu parvenir à expliquer convenablement l'action du vol, & il n'a pas traité, d'une manière plus satisfaisante, le marcher des oiseaux, le jeu de leurs côtes, & celui de leur sternum.

Stenon seroit, de tous les Anatomistes, celui qui auroit

approché le plus près du but en cette partie, s'il n'y avoit des embarras qui rendent son travail presque inutile ; il a décrit les muscles de l'Aigle ; & comme ceux de tous les oiseaux se ressembloit, une nouvelle description deviendroit inutile, s'il n'avoit trop multiplié les muscles de quelques parties, s'il n'avoit presque par-tout négligé de les comparer avec ceux des quadrupèdes ; & si au lieu de distinguer seulement ces muscles par des nombres, il leur avoit donné des noms, ou les mêmes, ou à-peu-près semblables à ceux qu'ont dans l'homme & les autres animaux, ceux auxquels ils sont analogues. Ces défauts rendent ses descriptions d'ailleurs très-détaillées, presque inutiles, en sorte que la matière peut être regardée comme absolument neuve, & il est, selon la remarque de M. de Vicq-d'Azyr, bien singulier que dans un siècle où l'on connoît jusqu'aux moindres muscles de la Chenille, ceux des Oiseaux ne soient pas mieux connus ni mieux décrits.

Pour réparer cette espèce d'omission, M. de Vicq-d'Azyr a entrepris de les décrire, & de les comparer à ceux de l'homme & des quadrupèdes, desquels ils tiennent lieu dans les oiseaux.

On juge bien qu'il ne s'est pas imposé la loi de disséquer indistinctement tous les oiseaux. Ceux qui sont au fait des ouvrages de la Nature, savent qu'elle les a rangés sous de certaines classes dans lesquelles on reconnoît un certain système de structure qui se rencontre, avec très-peu de différence, dans tous les individus qui les composent, en sorte que quelques-uns des êtres de ces classes, une fois connus, donnent infailliblement la connoissance de tous les autres de la même classe ; c'est aussi la voie qu'a pris M. de Vicq-d'Azyr.

Personne ne connoît mieux les caractères distinctifs de ces classes, que les Naturalistes, c'est pour cela que M. de Vicq a concerté son travail avec M. Daubenton, de cette Académie, plus à portée que qui que ce soit de l'aider dans cette circonstance ; ils ont établi neuf grandes familles qui comprennent tous les oiseaux connus.

Cette division une fois établie, il a choisi dans chacune des

familles, quelques individus qui, au moyen de leur grosseur; ou de quelques qualités particulières, pussent donner plus de prise à ses recherches. Les sujets choisis par M. de Vicq ont été dans la première famille, le Perroquet & le Coucou; dans la seconde, le Chat-huant & la Chouette; dans la troisième, l'Aigle, l'Épervier & la Buse; dans la quatrième, qu'on peut diviser en deux ordres, la Corneille & le Gros-bec pour le premier, l'Hirondelle & la Mésange pour le second; dans la cinquième, le Coq & le Pigeon; dans la sixième, la Grue & la Bécasse; dans la septième, la Poule-d'eau; dans la huitième, le Plongeon, l'Oie & le Canard; dans la neuvième enfin, l'Autruche & le Cafoar.

La méthode que M. de Vicq a cru devoir adopter, pour la description des muscles, est celle d'Albinus, elle éloigne tout préjugé sur leurs usages; elle présente les parties par ordre, & fixe leur situation, & sur-tout elle favorise beaucoup la connoissance des rapports anatomiques, qui sont, comme nous l'avons dit, le principal but qu'il s'est proposé dans cette recherche.

Cette méthode consiste à diviser le corps animal en un certain nombre de régions: on conçoit aisément que cette division n'est nullement arbitraire, & qu'elle doit être faite de manière que chaque région comprenne tous les muscles destinés à un certain usage, autrement on retomberoit infailliblement dans la confusion; c'est ce qui a engagé M. de Vicq à partager le corps des oiseaux en vingt-quatre régions, qui comprennent séparément tous les muscles destinés à exécuter les différens mouvemens dont ils sont susceptibles; il n'en examine que trois dans ce Mémoire, qui, comme on voit, n'est que le commencement d'un travail très-étendu, & ces trois sont la région thorachique antérieure, la région de la clavicule, & celle de l'omoplate.

La région thorachique antérieure s'étend depuis l'extrémité antérieure du sternum, jusqu'à la postérieure, & de chaque côté, jusqu'au pli que font les côtes sur elles-mêmes; au milieu de leur longueur un des os de cette partie le plus remarquable



2



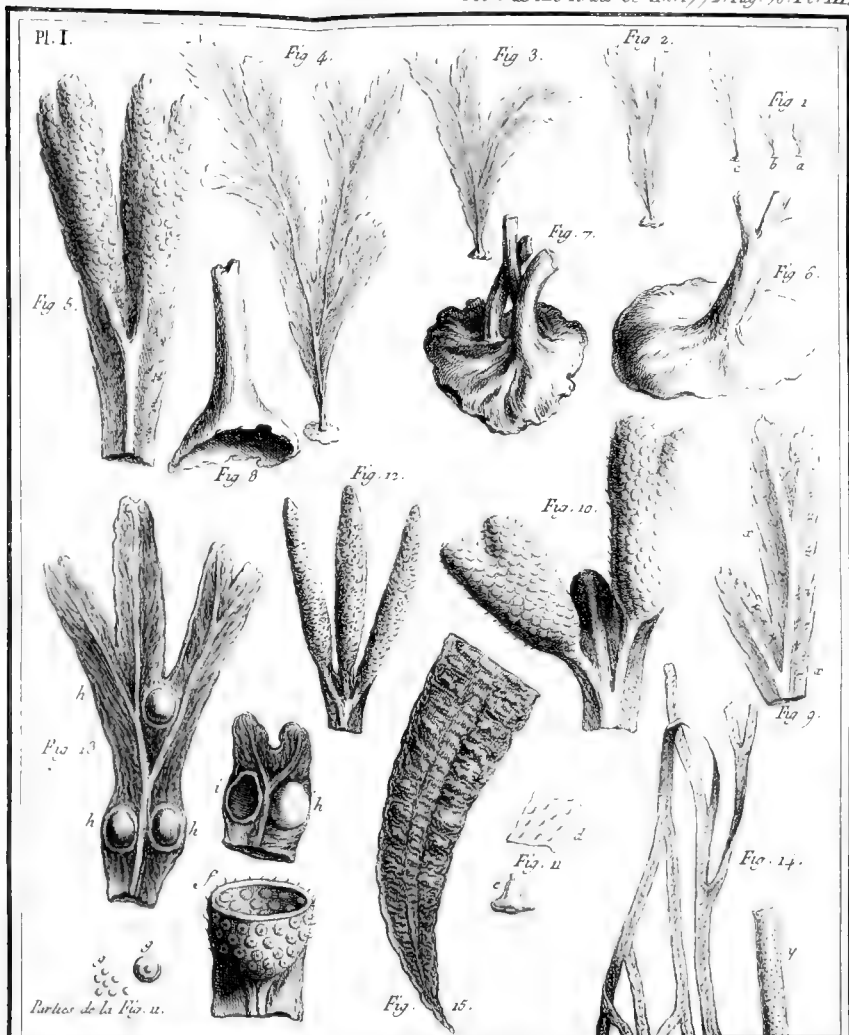
a

6.



x

9.



6.

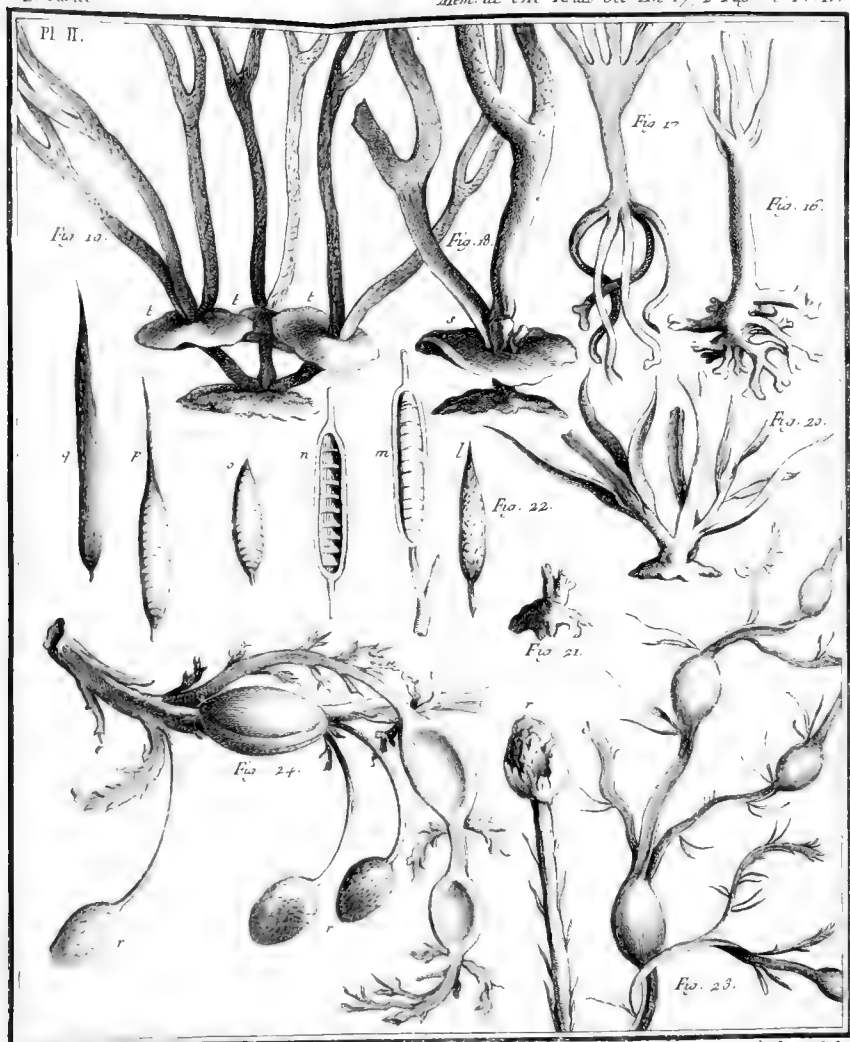
17

17

20.



Sculp.



Poncelet del.

y le Courte Sculp.

est le sternum, à cause de la crête très-saillante qui le distingue dans tous les oiseaux, & qui l'a fait comparer à la quille d'un navire; les côtes qui s'y joignent dans la partie latérale ont dans cette articulation un mouvement assez marqué; on y observe de plus une apophyse en forme d'anse, & vers les parties latérales deux autres apophyses, que M. de Vicq nomme *claviculaires*.

Quoique ce que nous venons d'exposer, existe dans tous les oiseaux, il ne faut pas croire que tous ces os soient précisément de la même forme dans tous, on y observe des variétés assez remarquables, & M. de Vicq rend un compte exact de celles qu'il a rencontrées; il paroît en général que le sternum des oiseaux, très-différent de celui de l'homme, ne doit cette différence qu'à la nécessité de voler qu'ont ces animaux, & s'en rapproche d'autant plus, qu'ils sont destinés à faire moins d'usage de leurs ailes.

On retrouve dans cette région les mêmes muscles que dans l'homme, mais variés & appropriés à la fonction du vol, tant pour leur grandeur, que pour leur force & leurs différentes insertions. Dans l'homme, par exemple, l'omoplate est susceptible de certains mouvemens, & ces mouvemens s'exécutent par le moyen de certains muscles, & sur-tout du petit pectoral, qui y ont des attaches; dans les oiseaux, au contraire, où cette partie doit être fixe pour résister aux efforts du grand pectoral, ces mêmes muscles ont leur attache à l'os de l'humérus, des mouvemens duquel ils augmentent considérablement la force.

On observe dans les oiseaux un muscle particulier qui ne se trouve point dans l'homme, & que M. de Vicq-d'Azyr nomme *moyen pectoral*; l'usage de celui-ci est de tirer en dessous la partie de l'aile qui répond au bras de l'homme, & de donner au mouvement de l'aile le développement & l'horizontalité; par ce moyen, le moignon des oiseaux se trouve le plus à nu & le plus léger possible, ce qui contribue à placer le centre de gravité de l'oiseau, le plus avantageusement possible.

La région de la clavicule est la seconde de celles que M. de Vicq examine dans ce premier Mémoire, elle renferme tout l'espace compris entre les deux clavicules.

Ces deux os varient peu dans les différentes espèces d'oiseaux, ils s'appuyent sur les deux extrémités d'un os, connu sous le nom de *fourchette*. Cette disposition permet aux clavicules des oiseaux un léger mouvement qui facilite beaucoup l'action du vol, & procure en même temps aux clavicules la faculté de se replacer par le ressort des branches de cet os; aussi cet os de la fourchette est-il bien plus libre, bien plus élastique & bien plus isolé dans les espèces qui font un grand usage de leurs ailes, comme, par exemple, dans l'Aigle, que dans celles qui ne s'en servent pas pour voler comme l'Autruche & le Casoar.

On trouve dans cette région, un muscle souclavier; interne & un externe, le premier est comme un accessoire du pectoral moyen, & le second est celui du grand pectoral; ce muscle est unique dans l'homme, ou son principal usage est très-différent, il y sert à des mouvemens qui auroient été très-inutiles dans les oiseaux; aussi les attaches de ces deux souclaviers y sont-elles différentes de celles du souclavier unique de l'homme.

A ces muscles s'en joignent encore plusieurs autres qui semblent moins destinés à produire des mouvemens, qu'à assujettir les clavicules & l'omoplate avec la plus grande sûreté, ces deux os ne pouvant l'être trop pour résister aux efforts considérables qui tendent à les déplacer.

La troisième & dernière région du corps des oiseaux, que M. de Vicq-d'Azyr examine dans ce Mémoire, est celle de l'omoplate; elle comprend la face supérieure & inférieure de cet os, & l'espace contenu entre son bord interne & l'épine; c'est peut-être de tous les os des oiseaux, celui qui diffère le plus de son analogue dans l'homme; il est droit, alongé, étroit, un peu courbé vers le bas, légèrement concave en dessus, presque égal en dessous, & tranchant dans ses bords; cette structure est, à peu de différence près, la même dans tous les oiseaux.

Ce changement de figure tient, comme nous le verrons dans un moment, aux usages auxquels l'omoplate est destinée, & qui dans l'homme & dans les oiseaux sont bien différens; c'est aussi la raison pour laquelle on trouve dans cette région du corps, des muscles qui n'existent point dans l'homme, & que ceux même qui sont analogues à ceux de l'homme, paroissent y avoir des usages souvent différens.

Le muscle, par exemple, qu'on nomme *trapèze* dans l'homme, se retrouve dans les oiseaux, mais avec des différences très-marquées, & qui semblent dépendre de l'immobilité que nous avons fait voir, que cette dernière avoit chez eux.

Il s'en trouve un particulier que M. de Vicq nomme *sus-scapulaire*, qui a plusieurs de ses fibres continues avec le trapèze, & avec celui duquel nous parlerons dans un moment qui tient lieu de celui qui, dans l'homme, se nomme *grand dorsal*; ce muscle s'insère à la partie inférieure & interne de la tête de l'humérus, il sert à tirer le bras en arrière & un peu en dessus, il le rapproche de l'omoplate, & s'il est élevé, il l'abaisse avec assez de force. Comme l'omoplate des oiseaux n'a ni crête ni épine, on n'y trouve point les deux muscles connus dans l'homme sous le nom de *sus-épineux* & *sous-épineux*; le muscle connu dans l'homme sous le nom de *grand dorsal*, se retrouve dans les oiseaux, mais bien plus petit, & divisé en trois parties, dont une s'attache à l'épine, une à la pointe de l'omoplate, & la troisième à l'humérus au-dessous de son articulation supérieure, & cette dernière sert à porter le bras en dedans & en dessus.

Un autre muscle est destiné à étendre la membrane postérieure de l'aile, ce muscle est très-petit, & dans quelques oiseaux, fait partie du grand dorsal, il est aidé dans sa fonction par deux autres muscles qui appartiennent à la quatrième région.

Le dernier des muscles de la région de l'omoplate, est celui que M. de Vicq nomme *sous-scapulaire*, & qui tient lieu de celui qui, dans l'homme, est connu sous le nom de *grand dentelé*, son usage est d'éloigner un peu l'omoplate de l'épine,

de la maintenir dans une distance déterminée & de la fixer; il est aidé dans cette fonction par la portion scapulaire du grand dorsal, ce qui le rapproche encore du muscle grand dentelé.

Ce que nous venons d'exposer, met M. de Vicq en état de déterminer l'usage de l'os de la fourchette dans les oiseaux, & de donner une raison très-plausible de la grande longueur & du peu de largeur de l'omoplate dans ces animaux.

L'usage de la fourchette est d'empêcher que les deux clavicules, qui sont jointes à ses extrémités, ne puissent s'écarter ou s'approcher plus qu'il ne faut, & de leur laisser cependant, par son élasticité, une espèce de vibration très-utile dans l'action du vol; elle fournit aussi, par l'ouverture de ses branches, un passage commode pour la trachée artère, pour les muscles internes & inférieurs, pour l'œsophage, & pour sa dilatation qu'on nomme *poche*, & enfin une insertion nécessaire au grand pectoral, dont il dirige l'action.

A l'égard de la figure longue & étroite de l'omoplate : voici, selon M. de Vicq, quelle en est la raison; deux muscles très-forts sont destinés aux mouvemens de l'aile, ces mouvemens s'exécutent dans la cavité articulaire, creusée dans l'angle commun de la clavicule & de l'omoplate; ces muscles tendent donc par leur action à déplacer ces deux os : la clavicule est, comme nous l'avons vu, très-solidement arrêtée; il falloit donner à l'autre branche du levier recourbé une force égale, & empêcher que l'effort des pectoraux ne lui fit faire la bascule, & c'est à quoi l'Auteur de la Nature a pourvu en augmentant sa longueur; l'omoplate de l'homme qui n'avoit pas les mêmes efforts à soutenir, n'avoit pas besoin de cet allongement.

Tel est le précis très-abrégé des observations de M. de Vicq, sur les trois premières parties de l'Anatomie des os & des muscles des Oiseaux. Elles sont bien propres à faire désirer la suite qu'il promet de ce travail intéressant.



## OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

## I.

DANS le cadavre d'un enfant mort à la suite de convulsions assez vives, peu après sa naissance, M. de Vicq-d'Azyr trouva dans la poitrine une tumeur considérable; voulant en connoître la nature, il ouvrit le bas-ventre & s'aperçut que le foie étoit déplacé, & formoit une hernie considérable au travers des fibres droites du diaphragme; cette tumeur très-volumineuse rejetoit le poumon tout-à-fait à gauche, & elle avoit eu d'autant plus de facilité à le déplacer, que dans le fœtus le poumon n'est pas développé; le sac herniaire qui contenoit une partie considérable du foie, étoit plus étroit à son entrée qu'au fond, en sorte que ce viscère y étoit comme étranglé; aussi les veines & les conduits biliaires y étoient-ils gonflés outre mesure, cette portion étoit mollassée & comme spongieuse, & la vésicule du fiel vide & affaissée. La veine ombilicale étoit très-distendue & relevée vers l'orifice du sac herniaire.

Cette tumeur étoit si considérable, & occupoit une si grande place dans la poitrine, qu'elle devoit même gêner le cœur dans ses mouvemens, & c'est-là vraisemblablement la cause de la mort de l'enfant; le cœur déjà très-gêné dans ses mouvemens, a reçu une nouvelle gêne à la naissance de l'enfant par l'entrée de l'air dans le poumon, les organes de la respiration & ceux de la circulation se sont opposés de mutuels obstacles par la gêne où les tenoit la tumeur: de-là les convulsions & la mort.

M. de Vicq a recherché dans les auteurs Anatomiques; s'il ne se trouveroit point d'exemple de cette conformation, Paré, Sénac, Faucon, Morgagni, font mention de viscères abdominaux passés dans le thorax à la suite de plaies du diaphragme; Morgagni même cite un estomac qui avoit passé le long de l'œsophage dans le thorax; Stéhélin & Soltius ont

*Hist. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

L

vu des déplacemens à-peu-près pareils à celui qui fait le sujet de cette observation; mais aucun n'a donné le détail des parties intéressées, ni la manière par laquelle cette espèce de hernie avoit causé la mort du sujet. C'est ce qui a engagé l'Académie à publier l'observation de M. de Vicq-d'Azyr avec toutes ses circonstances.

## I I.

Le même M. de Vicq trouva dans un cadavre qu'il alloit disséquer, la jambe fléchie sur la cuisse & le pied extrêmement étendu; cette attitude peu naturelle excita sa curiosité, il crut d'abord pouvoir l'attribuer à quelque défaut de mouvement dans les articulations, mais ayant fait mouvoir la cuisse dans la cavité cotyloïde, & la jambe dans le pli du genou, il trouva ces mouvemens dans l'état où ils devoient être, & il fallut chercher ailleurs la cause de cette attitude singulière. Dans cette vue il ouvrit la peau de la cuisse pour découvrir l'état des muscles, mais il fut bien surpris de ne trouver au-dessous qu'un tissu graisseux & fibreux qui les remplaçoit tous, du moins si on en excepte un petit nombre, & il s'assura que tous ceux de cette extrémité avoient subi la même métamorphose.

Elle ne s'étendoit cependant qu'à la partie inférieure, les muscles du dos, & même le grand fessier, étoient dans leur état naturel, mais tous les muscles situés au-dessous étoient ou détruits ou tellement pâles, qu'on n'y remarquoit plus aucune rougeur; les aponévroses même avoient perdu cet air luisant & satiné qu'elles ont naturellement; cette différence étoit sur-tout marquée dans le tendon du *triceps tribial*, & dans celui du *fascia lata*, dans la portion sciatique du *demi-nerveux* & du *biceps*, dans les *extenseurs des doigts & du pouce*; & dans le *jambier antérieur*, on retrouvoit encore quelques fibres dont la direction étoit marquée, les autres étoient si parfaitement détruits, qu'à peine pouvoit-on en trouver quelques vestiges en les cherchant dans la place qu'ils avoient dû occuper; le tissu même du nerf paroissoit plus mou qu'il

n'est ordinairement, l'artère étoit offeufée en quelques endroits; mais ce que l'état de cette partie offroit de plus curieux, étoit la manière nuancée dont s'étoit fait le changement de la fibre musculaire en tissu cellulaire: on voyoit parfaitement cette dégradation dans le muscle appelé *le couturier*, en l'examinant depuis son insertion à l'os des îles jusqu'au tibia: l'extrémité supérieure conservoit encore une partie de son premier état, tandis que l'inférieure étoit absolument confondue avec la graisse qui environne le genou. Cette graisse qui remplaçoit les muscles, étoit si parfaitement moulée dans leur place, que le membre recouvert de la peau paroissoit dans son état naturel.

Le sujet de cette observation étoit vieux, & M. de Vicq n'a trouvé, dans les grandes cavités, aucune cause à laquelle il ait pu attribuer ce singulier accident; les perquisitions qu'il a faites lui ont appris qu'il s'étoit long-temps également servi de ses deux jambes, mais qu'après une maladie, le côté gauche s'étoit de plus en plus affoibli sans se déformer; de façon qu'il avoit été à la fin contraint de marcher avec une béquille, ce qu'attestoit en effet l'impression que cet instrument avoit laissée à l'aisselle de ce côté.

Il étoit assez naturel que M. de Vicq recherchât dans les Auteurs, les exemples de semblables accidens qui pouvoient s'y trouver, & voici quel a été le fruit de ses recherches.

Aristote dans l'histoire des Animaux, dit formellement; que la chair se change en graisse quand elle reçoit trop de nourriture.

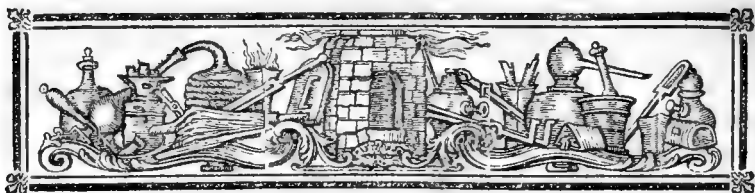
Parmi les Anatomistes modernes, Salzmaun dans sa Dissertation sur l'altération & le défaut de plusieurs muscles, dit avoir vu les fibres charnues écartées, & pour ainsi dire écrasées par un amas de graisse; Leuwenhoëck cité à ce sujet par M. Haller, a vu la graisse en faire autant, même à l'égard des tendons; Albinus après avoir considéré le muscle en général, dit ces propres paroles: *Pinguedine ita dislenditur aliquando ut reliqua musculorum suffocet, tendines verò pinguedini tam facile non cedunt.* Cette espèce de destruction des muscles

par la graisse, n'est donc pas tout-à-fait inconnue, mais elle est très-rare, & on les voit bien plus souvent détruits par l'atrophie ou le défaut de nourriture, la paralysie, la suppuration, que par la graisse; aussi M. Haller, dit-il, de cet accident, *in morbis rarum in monstris vulgare vitium est.*

De cette observation il résulte : 1.<sup>o</sup> que la fibre musculaire peut, par un vice particulier, être réduite à un simple canevas non contractile : il paroît que cette maladie est aux muscles, ce que le ramollissement est aux os; dans l'un le suc osseux plus délayé, est transporté dans d'autres couloirs; dans l'autre la substance élastique & irritable est altérée, & le tissu qui lui est propre est absolument changé : 2.<sup>o</sup> que le défaut de mouvement accélère beaucoup le progrès de la maladie, car le sang étant nécessaire à l'action musculaire, ce fluide s'y porte avec d'autant plus de force, que l'exercice est moindre : 3.<sup>o</sup> que dans le cas particulier dont il s'agit, les muscles postérieurs de la jambe ayant plus long-temps conservé leur force à cause de leur épaisseur, le pied dont ils sont les extenseurs devoit être resté étendu, & que les muscles de la cuisse avoient dû résister plus long-temps à leur destruction, & c'est aussi ce qu'a montré la dissection : 4.<sup>o</sup> que la fibre musculaire dépouillée de sa partie rouge, & paroissant continue avec la fibre tendineuse, fait voir évidemment que les fibres des muscles & celles des tendons, sont précisément de même nature, quoique Muys ait avancé le contraire : 5.<sup>o</sup> que dans l'espèce de désorganisation, qui fait le sujet de cette observation, la graisse contenue dans les muscles, n'en divise ni n'en écarte les fibres, comme Albinus & M. de Haller l'avoient avancé, mais qu'elle est contenue dans les petites cellules & entre les élémens de la fibre musculaire devenue blanche, très-différente, en cela, de la graisse qui accompagne les muscles dans l'état ordinaire, qui est déposée entre les trousseaux de fibres charnues; il semble qu'elle remplace une autre substance qui manque, & que, suivant la doctrine de Kaw, Boërhave, elle ait transudé par les ouvertures d'une infinité d'artérioles destinées, dans l'état naturel, à porter des sucs

dans les muscles, & qui, suivant l'observation de M. Haller, en contiennent d'autant moins, qu'elles contiennent plus de graisse : 6.° Enfin, qu'à ce canevas qui n'est plus ni contractile ni irritable, il ne manque peut-être qu'une plus grande quantité de sang ou une certaine disposition pour le recevoir convenablement ; & qu'enfin dans un muscle bien constitué, le sang est peut-être principalement destiné à la sécrétion d'une matière douée d'une élasticité particulière, dont tous les phénomènes de l'irritabilité dépendent. Ce ne sont encore ici que des conjectures, mais ce n'est que dans les dérangemens de l'ordre ordinaire de la Nature, qu'on peut espérer de trouver la connoissance de certaines parties de sa marche ordinaire, qu'elle semble avoir voulu dérober à nos recherches.





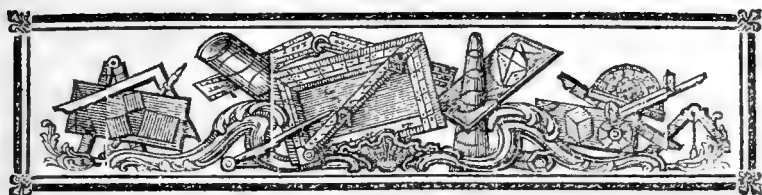
## CHIMIE.

---

V. les Mém. **N**ous renvoyons entièrement aux Mémoires :  
page 465.

L'Écrit de M. de Laffone, intitulé : *Réponse à quelques Remarques critiques, relatives à un fait consigné dans un de mes Mémoires, imprimé parmi ceux que l'Académie a publiés pour l'année 1757.*





# ALGÈBRE.

## *SUR LE CALCUL INTÉGRAL,*

### *ET SUR LE SYSTÈME DU MONDE.*

**L**E Calcul intégral a toujours été regardé comme un des plus importants objets de l'Analyse : on sait que dans le nombre des équations différentielles qui sont soumises à ce calcul, il y en a dont l'intégration absolue est possible, & d'autres qui ne peuvent s'intégrer que par approximation. C'est à faciliter l'intégration de ces dernières, qu'est destiné le Mémoire de M. de la Place, duquel nous avons à rendre compte : on doit à M. de la Grange les premières recherches sur cette matière, & depuis M.<sup>rs</sup> d'Alembert & de Condorcet ont donné des méthodes très-ingénieuses pour le même objet.

V. les Mém.  
pages 267 &  
333.

Celle que propose ici M. de la Place, consiste à faire varier les constantes arbitraires dans les intégrales approchées, il seroit peut-être difficile d'en donner une idée plus juste & plus détaillée sans calcul ; nous croyons donc devoir inviter le Lecteur à recourir au Mémoire même, ou à un Éclaircissement que l'Auteur a joint à l'*errata* de son ouvrage : nous nous contenterons de faire observer ici deux grands avantages que cette nouvelle méthode nous paroît avoir.

Le premier est d'être extrêmement simple, & de donner, avec la plus grande facilité, les intégrales approchées qui exigent des calculs très-complicés, par les méthodes déjà connues ; le second est de faire disparaître, par une seule

équation, les arcs de cercle, quel que soit d'ailleurs le degré d'approximation.

Pour rendre plus sensibles les avantages de la nouvelle méthode, M. de la Place l'applique à la détermination du mouvement des Planètes, il donne une théorie complète de leurs inégalités, tant séculaires que périodiques, & il démontre que, dans le système de l'attraction Newtonienne, leurs moyens mouvemens, & par conséquent leurs moyennes distances au Soleil sont invariables. Ce résultat, au reste, n'est pas nouveau; M. de la Place y étoit déjà parvenu par une autre méthode, dans un autre Mémoire imprimé, dans le VII.<sup>me</sup> volume des Savans Étrangers\*; mais celle dont il fait usage ici est beaucoup plus simple; d'ailleurs ces deux différentes méthodes conduisant au même résultat, il en résulte un degré de certitude auquel il est difficile de se refuser, & cela étoit d'autant plus nécessaire, que tous les Géomètres qui, avant M. de la Place s'étoient occupés de cette recherche, avoient trouvé une variation séculaire dans les mouvemens moyens des Planètes.

M. de la Place recherche ensuite & détermine le mouvement des Planètes, en supposant qu'elles se meuvent dans un milieu très-peu résistant pendant un temps quelconque illimité, ce que personne n'avoit fait encore; enfin, dans une addition à son Mémoire, il recherche *à priori* la figure que doit prendre un sphéroïde homogène de révolution, infiniment peu différent de la sphère, pour être en équilibre en vertu de l'attraction mutuelle de toutes ses parties, & de sa rotation autour de son axe de révolution. L'analyse l'a conduit, pour déterminer la figure du Méridien, à une différentielle d'un degré infini, & dont l'équation à l'ellipse est une intégrale particulière; il parvient à exclure du cas de l'équilibre, un grand nombre de figures, mais il n'ose assurer, malgré cela, que la figure elliptique soit en ce cas la seule figure possible; au reste, si les recherches de M. de la Place ne l'ont pas conduit à donner une détermination précise & générale de la figure du Méridien, dans le sphéroïde

\* Voy. Savans  
Étran. T. VII,  
page 37.



sphéroïde proposé, elles lui ont toujours fait connoître la loi de la pesanteur, & l'ont mené à ce théorème remarquable, savoir; *que sur un sphéroïde homogène, quelle que soit sa figure, pourvu qu'elle tienne le sphéroïde en équilibre, la variation de la pesanteur de l'Équateur au Pôle, suit précisément la même loi que sur le sphéroïde elliptique homogène.*

M. de la Place ne pouvoit pas faire voir plus clairement l'utilité de la méthode qu'il propose, que par l'application heureuse qu'il en a fait à l'important objet de la théorie des Planètes & de leur figure.

## S U R L A

## MANIÈRE DE DISTINGUER À PRIORI,

*la réalité & le signe des racines des Équations.*

L'ACADÉMIE a déjà été deux fois occupée de cet objet; la première à l'occasion d'un Mémoire lû par M. l'abbé de Gua en 1743 \*; & la seconde relativement à un Ouvrage de M. Fontaine.

V. les Mém.  
p. 377.

\* Voyez Hist.  
1743. Pages  
92 & 95.

La méthode employée par M. l'abbé de Gua n'a rien de commun avec celle dont nous avons à parler ici d'après le Mémoire de M. du Séjour; M. l'abbé de Gua emploie dans le sien la considération des lignes paraboliques, & l'on y voit briller ce génie vraiment original qui fait regretter aux Algébristes de ne connoître qu'un petit nombre de ses productions.

La méthode de M. du Séjour a plus de rapport à celle de M. Fontaine, elles s'appuient toutes deux sur les mêmes principes; mais la marche des deux Académiciens est différente; tous deux cherchent les conditions qui doivent avoir lieu entre les coëfficiens d'une équation proposée, dans le cas où deux facteurs de systèmes deviennent semblables; cette condition trouvée, M. Fontaine en conclut que la fonction des variables, alors égale à zéro, est positive pour un des systèmes, & négative pour l'autre, & il détermine, par un

*Hist. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

M

exemple particulier, celui des systèmes où elle est positive, & celui où elle est négative : cette méthode suppose que la fonction est continuellement du même signe dans chacun des deux systèmes, toujours positive dans l'un, & toujours négative dans l'autre ; M. Fontaine ne démontroit pas cette proposition générale, mais il est aisé de voir, en y réfléchissant, que, puisque la condition trouvée est une fonction rationnelle des coefficients de la proposée, elle est aussi une fonction semblable de toutes les racines, & que, puisqu'elle devient nulle au point où se confondent deux systèmes qui embrassent un certain nombre de racines de l'équation, elle le sera également lorsque la même condition aura lieu pour les combinaisons semblables des autres racines de l'équation. Il faudra donc que les facteurs ne puissent changer de signe, sans que le système de racines ne change de forme ; l'identité qu'on suppose entre deux systèmes d'un certain nombre de racines, ne peut donc, étant appliquée aux autres combinaisons semblables de racines, produire que des identités de systèmes absolument semblables à ceux qu'on a considérés ; & en effet, il ne peut y avoir aucun changement de signe qui ne change la forme des racines de l'équation sous le point de vue où on les a examinées. Par exemple, si le facteur de la fonction, qui se rapporte au système, change de signe lorsque les racines passent de l'imaginaire au réel, il faut qu'aucun facteur de la fonction ne change de signe, que quand des racines passent de l'imaginaire au réel : de même si le facteur change de signe lorsqu'une racine de l'équation en change aussi, il faut que tous les autres facteurs ne puissent changer de signe, sans que des racines de l'équation n'en changent en même temps ; il seroit aisé de prouver qu'il y a des cas où cela arrive nécessairement, & d'autres où cette condition ne peut avoir lieu.

Ce que nous venons de dire, sembleroit devoir détruire toute la théorie de M. Fontaine, mais il est toujours facile, d'après la condition cherchée, d'exprimer en fonction des racines, la quantité dépendante des coefficients qu'on suppose

devoir être positive dans un système, & négative dans l'autre, & il le fera toujours dans chaque cas de savoir si cette disposition est légitime ou non ; ainsi la méthode de M. Fontaine fournit elle-même le moyen de la corriger lorsqu'elle en a besoin.

Il y a donc des cas où la fonction trouvée n'a pas constamment le même signe dans le même système de facteurs, & M. Fontaine en a observé d'autres où elle étoit du même signe pour les deux systèmes.

Ainsi, pour que cette méthode fût générale, il faudroit que toutes les fois qu'une fonction égale à zéro, lorsque les deux systèmes se confondent, n'est pas constamment positive dans un système, & négative dans l'autre ; il existât une autre fonction qui eût ces propriétés, & non-seulement M. Fontaine n'a pas prouvé cette proposition ; mais un très-grand Géomètre, M. de la Grange, a trouvé plusieurs cas particuliers où une telle fonction paroît ne pouvoir pas exister.

Mais comme les exceptions ont précisément la même cause que nous avons développée ci-dessus, il arrivera que la méthode de M. Fontaine donnera elle-même le moyen de reconnoître *à priori*, quels peuvent être les cas exceptés, & qu'ainsi elle n'induera jamais en erreur lorsqu'on saura l'employer avec précaution : nous avons cru nécessaire de donner ici cette légère idée de la méthode de M. Fontaine, pour mettre le lecteur à portée de juger en quoi elle diffère de celle de M. du Séjour.

Quoique celle-ci soit fondée sur le même principe que celle de M. Fontaine, cependant elle en diffère absolument par la manière de trouver les fonctions qui sont zéro lorsque deux systèmes se confondent, & dans celle de vérifier si elles doivent être continuellement positives dans un système, & négatives dans l'autre.

La marche que suit M. du Séjour ne peut égarer, il ne part d'aucune hypothèse générale, & dans chaque cas, il cherche, par une méthode directe & sûre, le signe des

quantités qu'il considère; sa méthode le conduit à des fonctions qui contiennent des radicaux pairs. De telles fonctions peuvent devenir imaginaires, & alors on ne peut les regarder ni comme positives, ni comme négatives; M. du Séjour analyse ce cas en particulier, & trouve les conditions qui conviennent alors pour les différens systèmes de facteurs, dont le cas est susceptible, il n'a appliqué sa méthode qu'aux équations des troisième, quatrième & cinquième degrés; le Mémoire inséré dans ce Volume ne contient même que celles du troisième & du quatrième; celles du cinquième feront l'objet d'un autre Mémoire.

Il seroit à désirer que M. du Séjour démontrât que, lorsqu'il s'agit seulement de la réalité des racines des équations, il existe toujours une fonction nulle lorsque les racines passent de l'imaginaire au réel, positive lorsqu'elles sont réelles, & négative quand elles sont imaginaires; car il nous paroît que sans cela on peut faire à cet égard contre la généralité de cette méthode, la même objection que contre celle de M. Fontaine; aussi l'Auteur ne la donne-t-il pas comme générale, il se borne à observer que lui ayant réussi pour le cinquième degré, dont la solution générale n'est pas connue, il est probable qu'elle s'étend à tous les autres.

Peut-être faudroit-il qu'il l'appliquât aux équations du sixième & du huitième degré; en effet, si l'on étoit parvenu à bien distinguer entr'eux les cas de toutes les racines, celles de quatre & de huit imaginaires, & semblablement celles de deux & de six imaginaires, il deviendrait très-probable que la méthode pourroit s'étendre à un nombre quelconque parement pair, ou impairement pair de racines, ou imaginaires ou négatives. Il est vrai que le travail seroit immense, mais il y a long-temps que les Mémoires qu'a donnés M. du Séjour, ont prouvé qu'il ne pouvoit être rebuté, ni par la longueur, ni par la difficulté du Calcul.





# ASTRONOMIE.

SUR

## L'ASTRONOMIE DES INDIENS.

PENDANT le séjour de près de deux ans, que M. le V. les Mém. Gentil a eu occasion de faire à Pondichery, il apprit page 169. que les Brames, qui font la première Tribu, ou comme ils la nomment la première *Caste* de ces Peuples, pratiquoient plutôt qu'ils ne la cultivoient, une certaine partie de l'Astronomie; c'en fut assez pour piquer la curiosité, & pour l'engager à rechercher quelles étoient leurs méthodes, & jusqu'où ils avoient pu pénétrer.

Il ne lui fut pas aussi aisé qu'on pourroit peut-être se l'imaginer de réussir dans son dessein; la présomption & le mystère sont dans l'Inde, comme dans l'Europe, le partage de l'ignorance, & il lui fut extrêmement difficile d'entrer dans quelque commerce avec ces espèces d'Astronomes Indiens, dont nous allons essayer, d'après M. le Gentil, de présenter une idée.

La presqu'île de l'Inde, en-deçà du Gange, est habitée par deux Nations très-différentes; la côte occidentale l'est par les Malabars qui lui ont donné leur nom, & la côte orientale nommée aussi la *côte de Coromandel*, l'est par les Indiens Tamouls.

Ceux-ci ne sont pas originaires du pays, ils disent qu'ils viennent du Tanjaour & du Maduré, leur langue est effectivement la même qu'on parle dans ces royaumes, & très-

différente de celle des Malabars ; ils ont en quelque sorte civilisé les anciens habitans du pays qui vivoient en Sauvages dans les bois & les forêts , avec lesquels ils ne font aujourd'hui qu'un corps de Nation ; mais ils leur ont fait payer cher ce service , car ces gens forment encore aujourd'hui la dernière Caste ou Tribu de cette nation ; ils y sont dans le dernier mépris , & employés aux plus vils travaux , sans qu'ils puissent jamais espérer de sortir de cet état d'avilissement , parce que , suivant leurs loix , le passage & les mariages d'une Caste à l'autre sont absolument défendus.

Ces Tamouls adoroient anciennement une Divinité qu'ils nommoient *Baouth* , ce prétendu Dieu a paru à M. le Gentil si semblable au *Sommonacodom* des Siamois , & à l'idole *Foë* des Chinois , qu'il ne doute point que ce ne soit la même Divinité ; quoi qu'il en soit , les Brames qui vinrent dans le Tanjaour & dans le Maduré , y apportèrent leurs Idoles , leur Religion & l'Astronomie , & renversèrent les autels du Dieu *Baouth*.

On n'a rien de certain sur le temps de l'arrivée des Brames , dans le Tanjaour & le Maduré ; les Tamouls conviennent seulement que sous le règne d'un de leurs Rois , qu'ils nomment *Salivagera* ou *Sulivaganam* , il se fit une très-grande réforme dans l'Astronomie , science à laquelle ce Prince accordoit une grande faveur ; aussi son règne a-t-il fait , chez les Indiens , une époque aussi fameuse que l'étoit celle de Nabonassar chez les Chaldéens ; M. le Gentil a tiré du calcul des Brames , que l'année de la mort de ce *Salivagera* , répondoit à l'an 78 de l'Ere Chrétienne ; M. Holwell la place à l'an 79 ; il en résulte incontestablement qu'il y a seize cents quatre-vingt-dix-huit ans que les Brames étoient établis dans cette partie de l'Inde , & qu'on y savoit déjà calculer des Éclipses de Soleil & de Lune ; les Peuples qui habitoient alors nos contrées , étoient bien éloignés d'en pouvoir faire autant ; mais aussi , soit cause physique occasionnée par le climat , soit cause morale , les Brames qui nous avoient précédés de tant de siècles , n'ont pas avancé depuis si long-temps d'un seul pas , & sont maintenant infiniment éloignés

du degré de perfection auquel l'Astronomie a été portée en Europe.

Il y a plus, la persuasion où ils sont qu'ils n'ont plus aucun progrès à faire en cette partie, met un obstacle invincible au progrès de leurs connoissances ; ils ne font aucune observation astronomique, ni aucune recherche, ils regardent celles que nous faisons comme une suite de notre ignorance, & pensoient que le soin que M. le Gentil prenoit de s'informer de leurs principes, étoit une preuve qu'il n'étoit venu que pour s'instruire avec eux d'une Science qu'il ignoroit ; il est vrai cependant, que les prédictions qu'il leur fit de l'apparition & de la réapparition, après le passage par le périhélie, de la Comète de 1769, fit prendre aux Brames une idée un peu plus avantageuse de son savoir ; mais ils n'en furent ni moins vains, ni moins mystérieux avec lui, & il n'en put tirer d'éclaircissement, que sur cinq points de leur Astronomie, qui sont l'usage du gnomon, la longueur de l'année, la précession des Équinoxes, la division du Zodiaque en vingt-sept constellations, & le calcul des Éclipses du Soleil & de la Lune : nous allons examiner successivement tous ces points.

Le gnomon est sans doute le plus ancien instrument d'Astronomie ; il est tout naturel que les premiers qui ont travaillé à l'Astronomie solaire, & à régler par conséquent la longueur de l'année, se soient servis des ombres méridiennes des corps, dont les variations sont en effet le signe le plus frappant du mouvement du Soleil en déclinaison.

Il paroît, par un passage d'Hérodote, que les Chaldéens faisoient usage de cet instrument, mais il ne dit point de quelle façon ils s'en servoient ; la manière dont les Brames l'emploient peut servir à réparer cette omission, car il est très-probable qu'ils ont tiré leurs connoissances astronomiques des anciens Bracmanes, qui les tenoient certainement des Chaldéens.

Les Brames se servent du gnomon pour tracer la ligne Méridienne, lorsqu'il s'agit d'orienter une pagode, car ces espèces de temples doivent, suivant leur religion, l'être

régulièrement, & M. le Gentil s'est assuré qu'ils l'étoient effectivement.

Le second usage qu'ils font du gnomon est la recherche du plus ou moins de longueur des jours, comparés à celui de l'Équinoxe : on conçoit aisément que la longueur de l'ombre équinoxiale à midi, est la tangente de la distance de l'Équateur au zénit, ou, ce qui revient au même, de la hauteur du pôle, & que cette hauteur une fois connue, fournit les élémens nécessaires pour avoir la longueur des jours à l'entrée du Soleil dans chaque signe, ou même à tel point de chaque signe qu'on voudra le supposer.

Cette manière de déterminer la latitude est, comme on voit, assez grossière; cependant M. le Gentil desireroit que les Brames eussent fait beaucoup de ces observations, il est certain que l'extrême difficulté de discerner le terme de l'ombre les rend incertaines, mais l'erreur qu'elle occasionne est toujours à peu-près la même, & les différences de latitude obtenues par ce moyen, peuvent être regardées comme exactes; en sorte qu'une seule latitude étant bien observée, il est facile d'en déduire celles de toutes les autres, avec une précision assez approchée pour la Géographie; au moins cette méthode est-elle plus exacte que celle qu'on fait par l'estime des routes parcourues. Comment en effet, compter sur des routes faites par des Voyageurs, qui souvent dorment dans leur palanquin, & dont les porteurs vont d'un pas très-inégal, & s'arrêtent de temps en temps, plus ou moins long-temps pour se reposer; aussi M. le Gentil ne fait aucun cas des Cartes de l'intérieur du pays, toutes faites de cette manière, & il a recueilli, avec soin, toutes les observations des ombres équinoxiales qu'il a pu avoir pour déterminer la position de quelques villes, sur laquelle il croit pouvoir compter; au reste, cette défectuosité dans les Cartes n'a lieu que pour l'intérieur de la presqu'île; les côtes sont très-bien représentées dans les Cartes marines, & sur-tout dans celles du Neptune oriental, publiées par M. Daprès de Manneville.

La durée de l'année solaire, dont se servent les Indiens  
Tamouls



Tamoult est, selon eux, de  $365^{\text{h}} 15^{\text{h}} 31' 15''$ , mais il y a ici deux observations à faire; la première, qu'ils comptent leurs jours astronomiques d'un lever du Soleil à l'autre lever, ce qui, dans de plus grandes latitudes, pourroit les rendre inégaux, mais ne produit chez eux presque aucune erreur, à cause de la proximité où ils sont de l'Équateur; 2.<sup>o</sup> qu'ils ne partagent pas comme nous cet intervalle en vingt-quatre parties, leurs heures sont au nombre de soixante; ils partagent ensuite chaque heure en  $60'$ , chaque minute en  $60''$ , en sorte que les  $15^{\text{h}} 31' 15''$  doivent se réduire, suivant notre façon de compter, à  $6^{\text{h}} 12' 30''$ ; mais il faut observer que l'année des Brames est *sydérale*, c'est-à-dire, comptée depuis la jonction du Soleil à une étoile, jusqu'à son retour à la même étoile; & comme, selon eux, le mouvement des étoiles, suivant la suite des signes, est de  $54''$  par an, il faut encore ôter  $21' 36''$  pour la partie du cours du Soleil qui répond à cet espace, pour avoir l'année tropique ou mesurée par le retour du Soleil à un des points équinoxiaux, ce qui la donne de  $365^{\text{h}} 5^{\text{h}} 50' 54''$ , de deux minutes seulement plus grande que celle que les Astronomes admettent aujourd'hui, mais plus petite d'environ  $4\frac{1}{2}$  minutes que celle d'Hipparque, adoptée par Ptolémée; les anciens Brames connoissoient donc la longueur de l'année solaire, beaucoup mieux que ces deux célèbres Astronomes.

Ils partagent, comme nous, l'espace annuel en douze mois; dont le premier répond à notre mois d'Avril.

Ces mois sont inégaux comme les nôtres, mais ils le sont bien plus singulièrement; les nôtres sont toujours composés de jours entiers, les leurs contiennent des jours, des heures & des minutes, & il paroît que ces divisions inégales répondent au temps que le Soleil met à parcourir chaque signe; ceux qui ont établi cette division avoient donc connoissance de l'inégalité du mouvement du Soleil, & ne se bornoient pas à celle des périodes; leur semaine est, comme la nôtre, de sept jours: chacun de ces sept jours porte le

nom d'une planète, & cela précisément dans le même ordre que les nôtres.

Jusqu'ici M. le Gentil n'avoit eu à rechercher les vérités astronomiques, que sous la forme bizarre & obscure que les Astronomes Indiens donnent à leur calcul : nous allons maintenant le voir occupé à les démêler dans l'amas de fables dont il a plu aux Brame d'envelopper, ou plutôt de défigurer leur chronologie.

Le monde, selon eux, doit durer 4 millions 320 mille ans, desquels il y avoit déjà 3 millions 887 mille 870 ans d'écoulés en 1762.

Ils partagent, comme les Grecs & les Latins, la durée du monde en quatre âges, dont le premier a commencé à la création, & a duré 1 million 728 mille ans : ils le nomment *l'âge d'innocence*.

Le second a duré un quart moins que le premier ; c'est-à-dire 1 million 296 mille ans.

Le troisième a duré un tiers de moins que le second ; c'est-à-dire 864 mille ans.

Le quatrième, dans lequel nous vivons, ne doit durer que la moitié du troisième, c'est-à-dire 432 mille ans, desquels il y en avoit en 1762, 4 mille 863 ans d'écoulés ; ils le nomment *âge d'infortune*, ou en leur langue *calyougam*.

Il ne faut que jeter les yeux sur de telles assertions, pour en reconnoître le ridicule & la fausseté, mais il a fallu que M. le Gentil employât toute sa sagacité & toute la connoissance qu'il avoit des anciennes périodes astronomiques, pour découvrir ce qui avoit pu donner lieu à un calcul fondé sur des faits manifestement fabuleux, & qui cependant servoit en quelque sorte de base à leur calcul astronomique : voici le fil très-délié qu'il employa pour sortir de ce labyrinthe.

Il se ressouvint que les Brame connoissoient, dans les Étoiles, un mouvement en longitude de 54 secondes par an ; il soupçonna que tous ces âges prétendus du monde pouvoient bien n'être qu'un certain nombre de révolutions de l'Équinoxe ;

& en effet, il trouva que tous ces nombres étoient divisibles par 24 mille, qui, en supposant la-précession de 54 secondes par an, fait une révolution entière de l'Équinoxe; d'où il suit que ces âges ne sont que des périodes astronomiques, qu'on peut faire remonter aussi loin qu'on voudra, & qui n'ont aucun rapport, ni à l'époque de la création, ni à la durée future de l'Univers.

Outre les périodes dont nous venons de parler, les Brames en ont encore deux autres qui dérivent vraisemblablement de la même source, puisqu'elles sont elles-mêmes des diviseurs exacts de la grande période de 24 mille ans; la première est de soixante ans, l'autre de 3 mille 600 ans; la première leur sert à marquer les faits les plus mémorables, ou les époques de leur histoire; mais il ne faut pas s'imaginer, qu'avec le secours même de ces périodes qui devroient y jeter tant de certitude, elle en soit moins embrouillée; l'ignorance toujours mystérieuse, & l'envie de se réserver à eux seuls la connoissance de tout ce qui peut avoir trait à l'Astronomie, les a engagés à donner à leurs nombres des dénominations & des origines si peu relatives à leur objet, qu'il a fallu que M. le Gentil usât de toutes ses connoissances pour reconnoître leur véritable source & leur véritable usage; il est vrai qu'ils en sont punis par la longueur que ces formes bizarres jettent dans leur calcul, qu'il fait voir être, dans certains cas, cinq ou six fois plus long qu'il ne seroit sans cela; mais ils ont aussi l'avantage de ne laisser pénétrer leurs mystères à personne, peut-être ne les pénètrent-ils pas trop eux-mêmes; car quoique leur Astronomie soit très-bonne en elle-même, les Brames, qui n'en ont qu'une pratique aveugle & bornée à un petit nombre de cas, sont assez passablement ignorans, & n'en imposent au peuple que par ce faux air de mystère qu'ils savent jeter sur leurs opérations. Revenons à nos périodes & à leur véritable origine.

Les Étoiles avancent annuellement, selon les Brames, de 54 secondes, elles avancent donc en soixante ans, de 54 minutes, & en 3 mille 600 ans, de 54 degrés; c'est-là le

principe de toutes leurs périodes, la première année forme le premier cycle, le second est soixante fois plus long, & le troisième soixante fois plus long que le second.

Il y a même bien de l'apparence que le cycle ou grande année de 600 ans, cité par l'historien Joseph, & si bien accueilli par Jean-Dominique Cassini, est encore une suite de la période de 24 mille ans, produite par la précession annuelle de 54 secondes, puisqu'elle la divise exactement & sans fraction: on peut dire la même chose des périodes Chaldaïques de 600 & de 3 mille 600 ans, rapportées par Bérose, elles paroissent essentiellement les mêmes que celles des Indiens, du moins si on en retranche les absurdités ajoutées par les Brame, touchant l'ancienneté & la durée du monde, & celle de leur dieu Brama, qui ne méritent que d'être mis au rang des fables les moins pourvues de vraisemblance.

Mettant à part toutes ces rêveries, il résulte cependant de l'examen de M. le Gentil, que du temps de *Salivaganam*, c'est-à-dire, au premier siècle de l'ère chrétienne, la période de soixante ans étoit en usage chez les Brame & les Philosophes de l'Inde; qu'elle n'y étoit point alors regardée comme une nouveauté, & que, comme elle dérive de la grande période de 24 mille ans, fondée sur la précession annuelle de l'équinoxe de 54 secondes, il est clair que les sages Indiens connoissoient cette précession, lorsqu'Hipparque ne faisoit que la soupçonner; ils la connoissoient même plus exactement que Ptolémée qui la faisoit, on ne sait pourquoi, d'un degré en cent ans; les 54 secondes des Brame la donnent d'un degré en soixante-sept ans, & nos plus exactes observations la déterminent d'un degré en soixante-dix ans.

Il y a donc une grande apparence que ces connoissances astronomiques avoient pris naissance dans un pays plus au Nord de l'Asie; car il faut avouer que l'extrême chaleur du climat de l'Inde, ne permet guère aux habitans cette application suivie qu'exigent les recherches Mathématiques; qu'elles s'étoient ensuite répandues de proche en proche chez

les Chaldéens & chez les anciens Bracmanes ; que ceux-ci aussi mystérieux que les Brames, qui se disent en descendre, avoient gardé pour eux-mêmes ces résultats, fruits, comme on voit, d'un long travail qu'ils n'avoient pas fait, & que Hipparque & Ptolémée n'en font pas moins inventeurs, pour avoir déterminé depuis, ce que les Bracmanes avoient si bien tenu caché.

Il résulte encore, qu'en accordant à ces anciens Asiatiques un degré de confiance, que le peu de leurs connoissances, que les Brames en ont transmis, semble mériter, il est très-vraisemblable, que la durée de l'année solaire est aujourd'hui un peu plus courte, & la précession des équinoxes un peu plus lente, qu'elles n'étoient de leur temps ; il semble même que les Brames s'en soient aperçus, car dans leur calcul des Éclipses, dès qu'ils ont obtenu ce qui répond à la longitude moyenne du Soleil & de la Lune, ils ôtent de ces nombres une quantité constante ; il est très-vraisemblable que les Éclipses, seules observations qu'ils fassent, parce qu'un motif de religion les y force, leur aurent fait remarquer que leurs calculs ne cadroient plus avec les observations, & qu'ils n'ont pas trouvé d'autre moyen d'y remédier, que cette soustraction, qui est pour eux une vraie équation empyrique, dont ils ignorent entièrement la cause & la raison.

Telles sont les connoissances astronomiques des Brames dans cette partie qui concerne les révolutions des corps célestes. Voyons présentement jusqu'où ils les ont portées dans la connoissance des Étoiles & des Constellations.

Ils connoissent, comme nous, le Zodiaque qu'ils nomment en leur langue, *Sodi mandalam* ou *Cercle des astres*, ils le divisent, comme nous, en douze parties, qui reviennent à nos signes ; & ce Zodiaque, dont la division semble remonter à une très-grande antiquité, paroît avoir un grand rapport avec le Zodiaque Egyptien, du moins quant aux signes, car les Constellations ne sont pas toujours formées des mêmes Étoiles, il n'y a, quant aux noms, de différence bien marquée,

que dans le Capricorne, qui est représenté dans le Zodiaque Indien, par une espèce de poisson.

La connoissance qu'ils ont de la précession de l'équinoxe, leur fait admettre, comme à nous, deux Zodiaques, l'un fixe & purement intellectuel, & l'autre composé des Constellations, & qui avance tous les ans vers l'orient de 54 secondes; mais les Astronomes Européens & les Brame ne sont d'accord que jusque-là; nous comptons les mouvemens célestes, à partir du premier point du Zodiaque fixe & intellectuel, & ils les comptent du premier point du Zodiaque mobile ou étoilé, ce qui exige, comme on voit, une opération de plus pour connoître le lieu de ce premier point dans le ciel.

Quoique ce calcul soit extrêmement simple, & n'exige que deux ou trois opérations d'Arithmétique très-faciles; les Brame, suivant leur coutume, l'ont si bien embrouillé, que pour le faire à leur manière, on est obligé d'employer onze ou douze opérations, & de se donner beaucoup de peine pour en trouver le rapport aux mouvemens célestes.

Outre la division du Zodiaque en douze signes, les Brame le partagent encore en vingt-sept parties, qu'ils nomment *Constellations* ou *lieux de la Lune*, comptés dans les douze signes; il semble que les premiers Auteurs de cette division aient eu en vue d'en introduire deux, l'une qui représentât le mouvement du Soleil pendant un mois, & l'autre qui répondît à celui de la Lune pendant un jour; le mouvement de cette dernière étant beaucoup plus prompt que celui du Soleil, il est assez naturel de croire qu'il a aussi été remarqué le premier, qu'on aura cherché à déterminer les Étoiles auxquelles elle paroïssoit répondre chaque jour, & que la voyant, au bout de vingt-sept jours, reparoître aux environs des mêmes Étoiles, ils auront classé ces Étoiles en Constellations pour les reconnoître & pour s'en souvenir.

Ces Constellations ne sont désignées, dans le Catalogue qu'a rapporté M. le Gentil, que par le nombre des Étoiles qu'elles contiennent, & ce qui est assez singulier, c'est qu'elles n'en contiennent pas, à beaucoup près, toutes celles que nous

connoissons dans le Zodiaque, & en contiennent beaucoup d'autres qui n'y sont pas comprises.

M. le Gentil penche à croire que les inventeurs de ce Zodiaque, qui a précédé certainement de beaucoup celui qui a été divisé en douze signes, étant dépourvus d'instrumens, ne comparoient la Lune aux Étoiles, que par le moyen des alignemens; ce sentiment même se trouve appuyé par l'espèce de planisphère qu'a rapporté M. le Gentil, dans lequel toutes les Étoiles se trouvent liées entr'elles par des lignes qui pouvoient faciliter cette opération; cela supposé, lorsqu'ils ne trouvoient dans le Zodiaque que de petites Étoiles, ils en alloient chercher plus loin qui fussent plus brillantes; ce qui fait qu'on ne trouve dans ce Zodiaque aucune des Étoiles des Poissons, & peut-être aussi peu de celles du Cancer, qui sont suppléées par celles de l'Aigle, du Dauphin, de Pégase & d'Andromède.

Ce Zodiaque est vraisemblablement, comme nous l'avons dit, beaucoup plus ancien que le Zodiaque Égyptien; le Bélier du Zodiaque Indien, est non-seulement composé des trois Étoiles de la tête du Bélier, mais il comprend encore celles de la Mouche, deux du Triangle, & le pied austral d'Andromède; or, ces trois Constellations sont visiblement très-modernes, relativement à ce Zodiaque, & il y a bien de l'apparence que les anciens Astronomes ne les avoient insérées dans le premier signe de leur Zodiaque, que parce que du temps de sa rédaction, ces Étoiles se trouvoient, selon la remarque de M. le Gentil, avoir à peu-près la même ascension droite que la première Étoile du Bélier & les points équinoxiaux : nous disons la même ascension droite, car dans ces premiers temps de l'Astronomie, on ne la distinguoit pas trop de la longitude, & on ne faisoit guère attention qu'au mouvement diurne ou en ascension droite.

Lorsque les Sciences passèrent de l'orient de l'Asie dans l'Occident, les Astronomes mieux instruits par plusieurs siècles d'observations, réformèrent ce Zodiaque qu'ils avoient reçu des Orientaux, & en retranchèrent les Étoiles qui

s'éloignoient trop du cours des Planètes; ces Étoiles demeurèrent sans être classées jusqu'au temps des Grecs qui s'en emparèrent, pour ainsi dire, dans la vue d'y faire lire à la postérité l'histoire de leurs principaux héros; aussi voyons-nous qu'à l'exception d'un petit nombre de Constellations, dont la dénomination est assez moderne pour n'être ignorée de personne, comme Antinoüs, la chevelure de Bérénice, &c. toutes les autres sont absolument relatives à l'Histoire ou à la Mythologie Grecque, & ne paroissent pas même remonter au-delà de l'expédition des Argonautes.

Nous ne pouvons quitter cet article, sans faire observer combien il est surprenant que ces anciens Astronomes aient pu, sans instrumens, & avec des observations vraisemblablement assez grossières, obtenir le degré de précision que nous admirons dans les Élémens que les Brame nous ont conservés; c'est encore une preuve de l'ancienneté de cette première Astronomie, puisqu'il faut que le grand intervalle écoulé entre les observations comparées, ait suppléé au défaut des instrumens qui contribuent tant aujourd'hui à la justesse & à la précision des nôtres.

L'Astronomie des Brame a pour but principal, le calcul des Éclipses; la prédiction de ces phénomènes, qui tiennent à la religion du pays, est un des moyens dont ils se servent pour s'attirer la confiance & le respect des peuples.

Les Brame de la côte de Coromandel où étoit M. le Gentil, se servent, pour le calcul des Éclipses, d'une méthode qu'ils nomment en leur langue *vaquiam*, c'est-à-dire nouvelle; ceux du Bengale en emploient une autre qu'ils nomment *sittandum*, c'est-à-dire ancienne. M. le Gentil n'a pu se procurer aucune connoissance de cette dernière; ainsi nous ne parlerons que de la nouvelle qui est seule en usage sur la côte de Coromandel.

Les Brame ont, comme nous, une partie du calcul des Éclipses commune aux Éclipses de Lune & de Soleil, & qui sert, pour ainsi dire, de préparation aux unes & aux autres,

Les temps pour lesquels ils calculent sont toujours complets; & ils



& ils recherchent le lieu du Soleil ou de la Lune pour la fin de la journée complète, ou pour le lever du Soleil du jour suivant, parce que leur jour ne commence ni à midi ni à minuit, mais au lever du Soleil.

L'époque depuis laquelle ils comptent leurs moyens mouvemens, est celle du commencement du quatrième âge ou du *calyougam*; ce commencement prétendu remonte 3 mille 102 ans au-delà de l'Ère chrétienne, il est donc facile d'y réduire nos années, en y ajoutant cette quantité constante de 3 mille 102 ans; & pour savoir quel rang tient l'année proposée dans la période de soixante ans, on divise cette somme par 60, & sans avoir égard au quotient, le reste indique l'année complète de la période qui précède celle pour laquelle on calcule.

En multipliant ce nombre par la durée de l'année solaire que nous avons dit être de  $365^j 15^h 31' 15''$ , on aura le nombre des jours écoulés depuis le commencement du *calyougam*, on en ôtera  $2^j 8^h 51' 15''$ , parce que cet âge avoit commencé le second jour de la semaine à cette heure, & divisant le surplus par 7, le reste de la division indiquera le jour de la semaine; M. le Gentil donne un exemple de l'application de toutes ces règles, au calcul de l'Éclipse totale de Lune, du 23 Décembre 1768.

Cette première opération faite, ils travaillent à rechercher l'âge de la Lune.

Pour cela, il faut commencer par trouver à quel point du Zodiaque étoilé, doit répondre le Soleil dans le temps donné; l'année astronomique des Brames commence à l'entrée du Soleil dans la constellation du Bélier, ou au 1.<sup>er</sup> Avril, car dans leur façon de diviser le Zodiaque & l'année, les signes ont la même valeur que les mois; les degrés, la même que les jours; les heures, la même que les minutes: d'où il suit que si l'on ôte du temps trouvé depuis l'époque, le temps écoulé, jusqu'au 1.<sup>er</sup> Avril, le reste deviendra la longitude moyenne du Soleil, en changeant seulement la dénomination des mois en signes, celle des jours en degrés, celle des heures en minutes, &c.

ils appliquent ensuite à cette longitude moyenne, une équation calculée pour chaque mois, de huit jours en huit jours, & ils obtiennent le vrai lieu du Soleil, & son mouvement diurne pour le temps proposé.

Le lieu de la Lune est extrêmement facile à trouver, ils se servent pour cela de quatre périodes, au moyen desquelles ils trouvent des jours semblables en valeur, à ceux du Soleil dont nous venons de parler, & qui, comme eux, se réduisent en signes, degrés, minutes & secondes, ils supposent qu'au bout de la quatrième période, qui est de 248 jours, la Lune revient au même point du ciel; les périodes servent à diviser successivement le temps écoulé depuis l'époque : on multiplie ensuite les quatre quotients qu'on a obtenus par quatre autres périodes, les produits qui en résultent, joints à ce qu'on trouve dans une Table du mouvement journalier de la Lune, dans la période de 248 jours, & qui répond au reste de la quatrième division, donnera le lieu de la Lune.

Ce lieu a encore besoin de deux corrections, l'une qui dépend du mouvement journalier de la Lune dans les différens points de la période, & l'autre qui paroît être produite par la différence du Méridien du lieu & de celui de *Tirvalour* pour lequel les Tables ont probablement été faites. Le lieu de la Lune étant alors connu, on en ôte celui du Soleil, & ce qui se trouve au-delà de six signes étant connu, on le réduit en parties du mouvement diurne de la Lune au Soleil, & on a, au moyen d'une règle de trois, qu'ils font probablement, sans le savoir, l'instant de l'opposition; & pour en être plus sûrs, ils recommencent, pour ce moment, le calcul des lieux du Soleil & de la Lune, pour voir s'ils se trouvent réellement distans de six signes.

Le lieu de la Lune, celui du Soleil, & l'instant de l'opposition étant trouvée, il faut avoir la latitude de la Lune, & pour cela le lieu du nœud ascendant.

Ce nœud ascendant de la Lune se nomme en leur langue, *Ragon-floutham* ou *lieu de Ragon*, car c'est le nom qu'ils donnent à ce serpent qu'ils disent devoir dévorer la Lune dans ses

Éclipses; c'est-là vraisemblablement l'origine de la dénomination de *Tête* & de *queue du Dragon*, qu'on a depuis donné \* & qu'on donne encore dans la plupart des Traités élémentaires d'Astronomie aux nœuds ascendant & descendant de la Lune : par quelle fatalité une absurdité de cette espèce a-t-elle pu se conserver jusqu'à nous au milieu des débris de tant de choses utiles, dont nous regrettons aujourd'hui la perte ?

\* Voyez  
Longomontan.  
Astron. Dan.  
édit. in-4.<sup>o</sup> de  
1622, page  
161.

Les Brame trouvent le lieu de ce nœud, comme celui de la Lune, au moyen d'une période qui ramène, au bout d'un certain nombre d'années, le lieu du nœud au même point du ciel; en ôtant le lieu du nœud de celui de la Lune, ils trouvent la distance de la Lune à son nœud; & comme cette distance règle la quantité de l'Éclipse, ils la nomment *Patona-chandren* ou *Lune offensée par le serpent*; le complément à six signes de cette distance, donne l'argument de la latitude avec lequel on la trouve dans une Table calculée.

Pour avoir présentement la grandeur de l'Éclipse, il faut trouver les demi-diamètres de la Lune & celui de l'ombre; la recherche du demi-diamètre de la Lune tient à un principe assez singulier, ils supposent toujours ce diamètre la vingt-cinquième partie du reste de son mouvement journalier, divisé par 25, ce qui effectivement s'éloigne peu de l'hypothèse elliptique simple.

Par la même raison, le diamètre de la Lune qui a un rapport nécessaire avec la parallaxe, puisque l'un & l'autre dépendent des distances de cet astre à la Terre, peut, en le multipliant par un certain nombre, donner à peu-près le diamètre de l'ombre : nous disons à peu-près, car dans le calcul ordinaire & exact, le demi-diamètre du Soleil est un élément nécessaire, & ce demi-diamètre n'est pas constant; mais les Brame n'en savent pas davantage, le nombre par lequel ils multiplient le diamètre de la Lune est 5, & le diamètre de l'ombre qu'ils obtiennent par ce moyen, & auquel ils ajoutent, comme nous, une minute pour l'augmentation que cause l'atmosphère, est assez exact pour l'usage qu'ils en font.

Le demi-diamètre de l'ombre & celui de la Lune, étant

connus, ils en font, comme nous, la somme, & en ôtent la latitude pour avoir la grandeur de l'Éclipse, qu'ils réduisent ensuite par un calcul assez simple en parties du diamètre de la Lune. Jusque-là notre calcul & le leur ne diffèrent pas essentiellement, & leur méthode n'offre rien de bien remarquable.

Mais l'article suivant dans lequel ils recherchent les instans du commencement & de la fin de l'Éclipse, présente une singularité historique que nous ne devons pas passer sous silence.

Tous ceux qui sont au fait du calcul astronomique, savent que lorsqu'on a déterminé la latitude, le diamètre de l'ombre & l'instant du milieu de l'Éclipse, il se forme un triangle rectangle, composé de la latitude, de la somme des deux demi-diamètres de la Lune & de l'ombre, & de la partie de son orbite, comprise entre le point où est le centre de la Lune au moment de son contact avec l'ombre, & celui où il sera au milieu de l'Éclipse, & que ce dernier côté s'obtient, en résolvant le triangle, par le calcul ordinaire de la Trigonométrie.

Les Bramez qui ne paroissent avoir aucune connoissance de ce calcul, s'y prennent d'une autre manière, ils carrent la somme des demi-diamètres de l'ombre de la Terre & de celui de la Lune, & la latitude, ils ôtent le carré de l'un de celui de l'autre, & tirent la racine carrée du reste qui leur donne la partie de l'orbite de la Lune, comprise entre l'attouchement de la Lune & de l'ombre.

Il ne faut pas beaucoup examiner ce calcul, pour voir qu'il est absolument fondé sur la quarante-septième proposition d'Euclide, où l'on prouve que le carré de l'hypothénuse de tout triangle rectiligne rectangle, est égal à la somme du carré des deux autres côtés; la Géométrie étoit donc cultivée chez les très-anciens Astronomes, dont les Bramez tiennent leurs méthodes, & cette proposition, dont on a fait honneur à Pythagore, qui, peut-être l'avoit trouvée de son côté, étoit connue dans l'Asie, & on y en faisoit usage bien des siècles

avant ce Philosophe. Telle est en général la méthode employée par les Brames pour calculer les Éclipses de Lune : voyons présentement comment ils s'y prennent pour calculer celles du Soleil, bien plus compliquées que celles de la Lune, à cause des parallaxes dont ils n'ont aucune connoissance.

Nous ne répéterons point ici ce que nous avons dit de leur manière de trouver les lieux du Soleil & de la Lune, & l'instant de l'opposition ; ce calcul est absolument le même dans les Éclipses de Soleil & de la Lune, si ce n'est que dans les dernières, on calcule pour le moment de l'opposition, & dans les premières pour l'instant de la conjonction.

Il est bon, avant tout, de se rappeler que les Brames ne comptent pas comme nous la longitude du Soleil, en partant de l'intersection de l'Équateur & de l'Écliptique, mais du premier point de la constellation du Bélier ; il faut donc réduire le lieu du Soleil au premier point du Zodiaque immobile, que la constellation du Bélier précède aujourd'hui de plusieurs degrés, & cela d'autant plus, que leur année commence toujours à l'entrée du Soleil dans cette constellation, tandis que l'Équinoxe précède ce moment de dix-huit à dix-neuf jours.

Nous venons de dire que les Brames ne paroissent avoir aucune connoissance de l'effet que produit la parallaxe de la Lune dans les Éclipses de Soleil, ils en tiennent cependant compte sans le savoir ; mais avant que d'exposer cette opération, il ne sera peut-être pas inutile de donner une très-légère idée de la manière dont on remédie à l'effet de la parallaxe dans le calcul des Éclipses de Soleil, lorsqu'on n'emploie pas la méthode des projections inventée par Jean-Dominique Cassini.

Le demi-diamètre de la Terre ayant un rapport très-sensible avec sa distance à la Lune, il en résulte nécessairement qu'un spectateur placé sur un point de sa surface, ne voit pas la Lune répondre au même point du ciel où la verroit un spectateur placé au centre.

C'est cependant pour ce spectateur placé au centre, que

le calcul donne le lieu de cette Planète, qu'on nomme le *vrai lieu*, & il faut le réduire au lieu apparent où la voit le spectateur placé à la surface.

Pour cela, on calcule quelle est la hauteur du Soleil au moment de la conjonction, & on voit de combien la parallaxe qui affecte la Lune, l'abaisse à cette hauteur; on décompose ensuite cette parallaxe, pour voir combien elle a fait varier le lieu de cette Planète en longitude & en latitude, & on a, pour ce moment, son lieu apparent, ou tel que le voit le spectateur placé sur la surface de la Terre. Il est bon de remarquer que l'écliptique ayant toujours une moitié de son cercle au-dessus de l'horizon, le 90.<sup>me</sup> degré de cette moitié, se trouve coupé perpendiculairement par un vertical, & que par conséquent la parallaxe qui ne fait qu'abaisser la Lune, ne changera pas sa longitude si elle se trouve dans ce degré, & la changera d'autant plus qu'elle en sera plus éloignée. Ceci supposé, voyons comment les Brame, sans s'en apercevoir, font entrer la parallaxe de la Lune dans le calcul.

Ils ne cherchent pas, comme nous, la position de ce 90.<sup>me</sup> degré de l'écliptique, mais bien celle du degré de ce même cercle, qui se trouve à l'horizon au moment de la conjonction, ce qui revient absolument au même, & y comparant le lieu du Soleil à ce moment, ils obtiennent sa distance à l'un ou à l'autre, au moyen de laquelle ils trouvent la différence entre le point de la conjonction, & le milieu de l'Éclipse, ou pour parler plus juste, la différence entre la conjonction vraie & la conjonction apparente, causée par la parallaxe de longitude, & ils réduisent le lieu du Soleil & celui de la Lune à cette dernière.

La conjonction apparente étant déterminée, ils calculent, comme pour les Éclipses de Lune, le lieu du nœud auquel ils ajoutent pour les Éclipses de Soleil, la précession de l'équinoxe, & recherchent, comme pour les Éclipses de Lune, la latitude; mais cette latitude a besoin d'être corrigée par la parallaxe, & ils ont un calcul particulier pour trouver cette correction, par le moyen de la différence entre l'heure du

milieu de l'Éclipse, & celle du passage du Soleil au Méridien. Cette correction étant appliquée, ils obtiennent aisément la grandeur de l'Éclipse, par un calcul assez semblable à celui par lequel ils obtiennent celle des Éclipses de Lune, il n'y a de différence, que la substitution du diamètre du Soleil à celui de l'ombre; le calcul du commencement & de la fin, ne diffèrent pas non plus sensiblement de celui par lequel ils obtiennent le commencement & la fin des Éclipses de Lune.

Il est évident que par ce moyen les Brames n'obtiennent que des corrections en ascension droite & en déclinaison, au lieu de celles en longitude & en latitude qu'il faudroit avoir, mais il ne paroissent avoir aucune idée de ces dernières; & c'est-là vraisemblablement ce qui rend leur calcul défectueux plus que l'erreur de leurs périodes qui paroissent assez justes.

Celle de deux cents quarante-huit jours, sur-tout, dont ils font usage pour obtenir le lieu de la Lune, a semblé à M. le Gentil digne d'une attention particulière; il paroît qu'elle est absolument fondée sur l'hypothèse elliptique simple, & que les Astronomes qui l'ont imaginée, ont supposé, pour plus de facilité, l'apogée de la Lune immobile, en attribuant à cette Planète le mouvement de l'apogée; par ce moyen, si l'on suppose, par exemple, la Lune à son apogée, au midi du 1.<sup>er</sup> Janvier, elle y sera encore le 5 Septembre à midi, qui sera le deux cents quarante-huitième jour; mais ce qui est singulièrement digne de remarque, c'est qu'en prenant la vingt-cinquième partie du mouvement diurne de la Lune, dans les différens points de la période, ils obtiennent assez précisément le diamètre de cette planète; car quoique ce calcul ne soit pas absolument exact, il est cependant vrai qu'il approche beaucoup de la précision dans le seul cas où l'hypothèse elliptique simple peut être employée; c'est-à-dire, dans les syzygies, qui sont les seuls points où les Brames le considèrent.

De tout ce que nous venons de dire, on est en droit de conclure qu'il n'y a aucune nation Orientale, sans même en excepter les Chinois, si vantés par leurs anciennes connois-

fances en Astronomie, chez laquelle on trouve autant de vestiges de l'antiquité de cette Science, que chez les Indiens; mais tout semble tendre à prouver que les Brames ne possèdent aujourd'hui que les débris d'une Science cultivée avec succès, long-temps avant l'Ere Chrétienne. Il y a grande apparence qu'on doit attribuer à la chaleur du climat, l'indolence qui les a empêchés de faire le moindre pas en avant pour perfectionner des connoissances dont ils sont dépositaires depuis tant de siècles, & qu'ils tiennent vraisemblablement d'un peuple asiatique plus septentrional; aussi les Indiens Tamouls assurent-ils que les Brames viennent originairement du Nord: la théorie de la Lune, dont ils se servent sans la connoître, ne peut être que le fruit de méditations profondes, dont ils ne paroissent guère capables, elle est du moins infiniment plus savante que les règles astronomiques dont se servent les Siamois, que M. de la Loubère rapporta au retour de son voyage, & que le célèbre Jean-Dominique Cassini a si ingénieusement expliquées\*.

\* Voyez *anc. Mém. de l'Ac.*  
Tome VIII.

## SUR UN

VOYAGE FAIT EN PORTUGAL  
ET À MADÈRE.

V. les *Mém.*  
pages 115 &  
145.

\* *Voy. Hist.*  
1768, p. 164.

Nous avons rendu compte en 1768\* d'un Voyage fait par M. de Bory, pour déterminer la position des caps Finistère & Ortégal: nous avons à parler ici d'un autre Voyage du même Académicien, dans la double vue de déterminer la position de quelques points importants de la côte du Portugal & celle de Madère, & de faire l'observation de l'Éclipse de Soleil du 26 Octobre 1753, qu'on soupçonnoit pouvoir être totale dans ces parages.

Ce double but exigeoit un double appareil d'instrumens, puisque l'observation de l'Éclipse demandoit que les diamètres du Soleil & de la Lune fussent observés avec précision; dans  
cette



cette vue M. de Bory crut devoir joindre aux instrumens qu'il avoit portés dans le premier voyage, un héliomètre de la construction du sieur Canivet, adapté à une lunette de douze pieds, dont les verres étoient du sieur Georges.

Le Vaisseau sur lequel s'embarqua M. de Bory, fut la Frégate du Roi *la Comète*, & il s'y trouvoit avec M.<sup>rs</sup> les Chevaliers de Goimpy & de Diziers-Guyon, qui devoient participer à ses observations.

Il partit de Brest le 20 Septembre 1753, & mouilla devant Lisbonne le 3 Octobre; M. le Comte de Baschy, Ambassadeur de France, informé par la Cour du projet de M. de Bory, en avoit déjà informé le Ministre Portugais, & les passeports nécessaires auroient été expédiés dès le même jour, sans l'absence du Roi, qui avoit été passer quelques jours à *Mafra*, château bâti par le Roi Jean V, mais ils le furent peu de jours après, au retour de ce Prince, & Don Joseph de Carvalho son Ministre, leur procura toutes les facilités possibles pour exécuter leur projet.

Les Officiers François partirent donc de Lisbonne le 13 Octobre pour se rendre à Aveiro, leur voyage se fit, partie en chaloupe sur le Tage, & partie dans des chaises à deux, traînées par des mulets, & qui sont les voitures ordinaires du pays; il est bon d'observer ici deux choses, la première, que le Tage, qui, à son embouchure, reçoit les plus grands vaisseaux, ne peut, à quelques lieues au-dessus, recevoir que des canots & des bateaux plats, parce que son grand volume d'eau ne lui vient que de la mer; & la seconde, que lorsqu'on voyage par terre en Portugal, il faut porter avec soi des lits, des provisions & des ustensiles de cuisine, parce qu'on ne trouve, dans les lieux où on s'arrête, que le pain & le couvert, ils arrivèrent le 19 à Aveiro.

Cette petite ville est située dans la province de Beira, sa position est très-agréable, elle a un port peu profond, mais sûr, & des salines assez abondantes, qui sont séparées de la haute-mer par une langue de sable élevée, le ruisseau qui y passe peut se remonter en bateau cinq ou six lieues dans les

terres; on y trouve communément des gens qui savent assez bien parler françois; un de ces derniers nommé *Don Juan d'Eguès*, s'étoit procuré plusieurs volumes des Mémoires de cette Académie, & les avoit étudiés: espèce de phénomène, si l'on fait attention que la philosophie d'Aristote n'étoit pas encore bannie du Portugal.

Le calcul de l'Éclipse de Soleil la dommoit totale à Aveiro, & M. de Bory & ses Associés, n'avoient que le temps de se préparer à l'observation; ils commencèrent par vérifier leur instrument, dont l'erreur fut trouvée de 42 secondes dont il augmentoit les hauteurs; plusieurs hauteurs méridiennes de la Polaire, de quelques autres étoiles, & du bord supérieur du Soleil, leur donnèrent la hauteur du pôle d'Aveiro, de 40<sup>d</sup> 38' 20".

Les deux jours qui précédèrent l'Éclipse, ils prirent plusieurs hauteurs correspondantes du Soleil, pour avoir la marche de leur pendule, qui se trouva retarder de 48 secondes par jour.

Le 26 Octobre, jour de l'Éclipse, arriva enfin, & il arriva accompagné d'un fort beau temps, M. de Bory & ses Associés, persuadés que l'Éclipse devoit être totale à Aveiro, s'occupèrent à mesurer, avec l'héliomètre, les diamètres du Soleil, mais cette opération qui leur devint presque inutile, parce que l'Éclipse ne fut pas totale dans cet endroit, dont la position étoit probablement mal connue, leur fit encore manquer l'observation du commencement de l'Éclipse, qui anticipa de quelques minutes l'instant marqué dans le calcul.

L'Éclipse ne fut pas absolument totale, & elle offrit aux Observateurs un phénomène singulier; dans un instant assez voisin du milieu de l'Éclipse, les cornes se trouvèrent subitement dans une direction contraire à la précédente, effet cependant très-naturel, & dont la raison se présente d'elle-même. L'obscurité fut assez grande pour laisser apercevoir Jupiter & Mars, mais pas assez pour empêcher d'écrire avec un crayon, elle avoit à peu-près l'apparence d'un beau crépuscule, qui est à la moitié de sa durée; ils n'aperçurent

aucune trace de l'atmosphère solaire, ce qui restoit de lumière étoit apparemment encore assez grand pour l'effacer.

L'observation de cette Éclipse fournit aux observateurs le moyen de reconnoître l'erreur des Tables & la longitude d'Aveiro; ils la comparèrent, pour cela, à celle qui avoit été faite à Paris, par M. de Thury, suivant la méthode indiquée par M. de la Caille \*; l'erreur des Tables dans le sens de la longitude, fut trouvée de 2' 9", 4, & la différence de longitude géographique entre Paris & Aveiro, de 43' 17" d'heure, ou 10<sup>d</sup> 49' 15", dont Aveiro est plus occidental que Paris. \* Voy. les Mém. 1744, page 191.

M. de Bory & ses Associés n'ayant plus rien à faire à Aveiro, en partirent dès le 30 Octobre, & prirent, pour retourner à Lisbonne, la route qui leur offroit à voir le plus de choses intéressantes.

Les villes du Portugal ne renferment ordinairement point d'édifices plus remarquables que les Couvents, & ils doivent presque tous leur fondation à quelque vœu fait dans des occasions périlleuses, par les Rois de Portugal. La première que M. de Bory trouva sur sa route, fut celle de Coimbre, située sur le fleuve Munda, autrefois le séjour des Rois de Portugal, avant qu'ils l'eussent transporté à Lisbonne, & maintenant le siège de la première Université du royaume; fondée par Denys, surnommé le *Libéral & le père de la Patrie*.

Cette ville contient le célèbre monastère des Religieux de Sainte-Croix, fondé par Alphonse Henriquez, premier Roi de Portugal, pour des Chanoines réguliers de Saint-Augustin, unis depuis par le Pape Benoît XIV, aux Chanoines de Saint-Jean de Latran.

Ces Religieux observent exactement la clôture, & ne sortent jamais; cette loi leur a été imposée par le Père Gaspard de Govéa leur réformateur, & Ministre, quoique sans titre, du Roi Jean V.

Cette clôture devenue chez eux un point essentiel de leur règle, les a engagés à cultiver les Sciences, & il en est résulté

un prompt avancement qui s'est fait sentir de proche en proche à toute la Nation : leur Général est, par sa place, Chancelier de l'Université, & en 1753 il en étoit encore Recteur, par la nomination du Roi.

M. de Bory eut l'avantage d'être conduit dans tout l'intérieur de cette magnifique maison, par M. Magalhaëns, ou comme le prononcent les Portugais, Magellan, dernier descendant de celui qui a donné son nom au détroit du Sud de l'Amérique, alors Chanoine régulier de cette maison, dont il est sorti en 1744, en vertu d'un Bref du Pape Benoît XIV, & qui est actuellement résidant à Londres où il est Membre de la Société royale, & que l'Académie compte au nombre de ses plus dignes Correspondans.

De Coimbre, M. de Bory alla à Baralha, où les Dominicains ont un magnifique couvent; ce couvent est l'accomplissement d'un vœu fait par le Roi Jean I.<sup>er</sup>; au moment de donner la bataille d'*Aljubarotta*, il promit de fonder, pour l'Ordre de Saint-Dominique, le plus beau monastère qui fut dans le monde, & il choisit, après la victoire, le lieu de Baralha, qui étoit dans le voisinage où il fit bâtir une ville à laquelle il donna, en mémoire de cet évènement, le nom de *Baralha*, & un magnifique monastère, dont l'église passe pour être la plus haute qui soit en Portugal : on y admire encore la salle du Chapitre, elle est carrée, & a cinquante-six pieds de côté, & la voûte en arc de cloître se soutient sans pilier : on assure que l'Architecte appelé *Mathieu Fernandès*, qui l'avoit manquée plusieurs fois, étant enfin venu à bout de la fermer, voulut coucher pendant quatre mois sous la clef de la voûte, pour faire voir qu'il n'en craignoit plus la chute. Cette église avoit été destinée pour la sépulture des Rois ; mais ces Princes, en transférant leur siège de Coimbre à Lisbonne, ont aussi transféré leur sépulture de chez les Dominicains de Baralha, chez les Jéronimites de Belem, où elle est aujourd'hui : on y voit cependant encore à Baralha quelques-uns de leurs tombeaux, & entr'autres celui du Roi Jean II, mort en 1495.

De Baralha, M. de Bory alla visiter un autre couvent nommé *Alcobaca*, desservi par cent cinquante Bernardins, & fondé en 1135, par le Roi Alphonse Henriquez, après la victoire qu'il remporta à la célèbre bataille d'Ourraque, sur cinq Rois Maures; évènement qui fut suivi de l'érection du Portugal en royaume; car jusqu'alors ses Souverains n'avoient porté que le titre de Comtes.

On voit dans l'église de ce couvent quelques tombeaux de Rois de Portugal, entr'autres celui de Pierre le Justicier, & un monument très-simple & sans inscription, qu'on assura les Officiers François être celui de la malheureuse Inès de Castro, maîtresse, puis femme de ce Prince, ce qui contredit formellement tous les historiens François & Portugais, qui disent tous que Don Pedre fit faire à Inès un tombeau magnifique. La route que faisoit M. de Bory le conduisoit naturellement à *Caldas*, lieu ainsi nommé à cause d'une source d'eau chaude qui s'y trouve, & sur laquelle est bâti un très-bel Hôpital, fondé en 1488, par la Reine Léonore de Portugal, femme de Jean II, rebâti en 1747, & fini en 1750, par les ordres & aux dépens du Roi Jean V.

Ces eaux sont très-renommées par la singulière propriété qu'elles ont de guérir les maladies vénériennes les plus invétérées, les paralysies, & généralement toutes les maladies qui attaquent les nerfs; elles sont assez abondantes pour que leur écoulement fasse continuellement tourner un moulin placé à deux cents pas de leur source; elles sont claires, cependant si on les fait reposer dans un réservoir, elles y déposent une boue noire & épaisse, & si on les reçoit après cela dans un autre bassin, elles y déposent un sédiment blanc, & semblable à de la chaux.

Les eaux de *Caldas* agissent ou intérieurement lorsqu'on les boit, ou extérieurement lorsqu'on s'y baigne; & ces bains sont de deux espèces, l'un de l'eau claire ou courante, & l'autre de la boue noire. Pour composer ces derniers bains, on prend cette dernière dans le réservoir, & on la délaie avec l'eau même de la source, on y fait entrer les malades,

& quand ils y ont resté assez de temps, ils vont se laver dans le bain clair; il s'exhale de cette eau une vapeur chaude & sulfureuse, qui noircit en peu d'instans les métaux & les galons.

De Caldas, après une journée de marche fort rude, M. de Bory & ses Collègues arrivèrent au monastère royal de Mafra.

Ce couvent a été, comme tous ceux dont nous venons de parler, établi à l'occasion d'un vœu; les Religieux de Saint-François, de la province d'Arrabida, desiroient d'avoir un hospice à Mafra, mais le Conseil de Conscience leur en refusoit la permission; un de ces Religieux sachant le desir qu'avoit Jean V de se voir des enfans, osa lui en promettre s'il fondeoit à Mafra le couvent que les Frères desiroient: ce Prince en fit le vœu, & ses desirs ayant été accomplis, il y bâtit d'abord l'hospice qui lui avoit été demandé, mais il n'en demeura pas là, & voulut y élever un monument qui surpassât l'Escurial en grandeur & en magnificence: trois cents Capucins sans barbe y sont logés aussi magnifiquement que le Monarque, qui partage ce Palais avec eux, & qui peut y loger la Reine, les Infans & toute sa Cour.

La Chapelle qui partage en deux ce vaste édifice, a été commencée en 1717, & finie en 1730; elle est de la plus grande magnificence, le marbre y est prodigué, & la beauté de l'ouvrage répond à la richesse des matériaux; le dôme, dont la légèreté surprend, a cent soixante-seize pieds de hauteur, & les clochers deux cents seize pieds; l'un deux contient un des plus beaux carillons de toute l'Europe; c'est dans cette Chapelle que sont ces belles grilles faites à Paris en 1733, par le sieur Destriches: malheureusement les ornemens & les vases sacrés ne répondent pas à la richesse de l'édifice; il semble qu'on ait voulu placer dans le bâtiment, la magnificence qui devoit être sur les Autels, & qu'on y ait substitué la pauvreté & la simplicité que la règle de Saint-François exigeoit qui fût dans le reste de l'édifice: on peut monter sur le haut de l'église, où l'on trouve des terrasses de brique, d'où l'on a la vue la plus étendue.

Le parc de Mafra est très-grand, & renferme une longue suite de montagnes, il est ordinairement très-abondant en gibier, mais quand M. de Bory y alla, il étoit dénué d'arbres.

De Mafra à Lisbonne il y a un très-beau chemin ; le premier objet qu'on trouve sur cette route, est le château de Ceintra, bâti par le Roi Emmanuel, & qui a servi, presque de nos jours, de prison à Alphonse V après sa déposition, & au haut du cap la Roque, qui joint cet édifice, un couvent de Jéronymites.

Près de Ceintra est un couvent de Capucins qu'on nomme *le couvent doublé de liège*, parce que ce couvent étant taillé dans le roc, on a, pour prévenir les mauvais effets de l'humidité, doublé tout l'intérieur de liège ; il est singulier de voir, à quatre lieues les uns des autres, des Religieux du même Ordre, logés les uns dans un magnifique Palais, & les autres dans une espèce de tanière : ce contraste singulier n'étoit pas échappé à M. de Bory.

Du haut du cap la Roque, on aperçoit les bois voisins de Ceintra & de Colares ; c'étoit au milieu de ces bois à *Pinhra verde*, que le célèbre Don Juan de Castro s'étoit retiré à son retour des Indes, & où ce Héros s'occupoit à défricher sa demeure, & à y pratiquer des terrasses, qui en font encore aujourd'hui l'ornement ; cette montagne du cap la Roque est absolument composée de pierres placées les unes sur les autres sans aucun ordre, & telles qu'elles pourroient être, si un volcan les eût jetées de son sein.

De Ceintra à Lisbonne il n'y a plus que quatre à cinq lieues ; on trouve le long du chemin plusieurs *Quintes* ou maisons de campagne, dont la plus belle est celle de M. l'abbé de Mendoza, Secrétaire d'État ; entre toutes les raretés dont cette superbe maison abonde, on admire sur-tout une grotte absolument composée de cristal de roche & de porcelaine du Japon.

M. de Bory arriva à Lisbonne le 7 Novembre, dès le 13, lui & ses Collègues eurent une audience du Roi, dans laquelle

ils lui rendirent compte de leur Voyage, & lui demandèrent le passeport nécessaire pour être reçus dans les îles Açores & à Madère ; ce passeport leur fut délivré le 18, par M. l'abbé de Mendouça, & ils mirent à la voile le 26 Novembre.

Dès le 4 Décembre ils eurent la vue des îles de Sainte-Marie & de Saint-Michel des Açores, le Pilote Portugais, que leur avoit donné M. l'abbé de Mendouça, s'étoit toujours fait beaucoup plus de l'avant que les Officiers François, & cependant on vit encore la terre bien plutôt qu'il ne comptoit, ce qui venoit probablement de la mauvaise position de ces îles sur les Cartes, & prouve bien la nécessité de les rectifier.

Le banc de Roches, appelé *les Fourmis*, qui se trouve entre ces deux îles, n'a pas paru plus exactement placé dans les Cartes, elles le mettent trop près de Saint-Michel, & il se trouve réellement dans le Nord-est de la pointe du même nom de l'île Sainte-Marie, il rétrécit beaucoup le canal entre les deux îles, qui, sans cela, auroit environ dix-huit lieues de large.

Jusque-là M. de Bory n'avoit pas eu à se plaindre des vents, ils cessèrent bientôt de lui être favorables, ils se rangèrent dans le Sud & le Sud-ouest, & la mer devint bientôt impraticable, il trouva cependant moyen d'aller à terre à l'aide d'un Pilote du lieu, mais il ne put y transporter aucun instrument ; & les temps devenant de jour en jour plus mauvais, & la mer plus grosse & plus dangereuse, M. de Chefac se trouva forcé de faire voile pour Madère, n'ayant pu tirer d'autre fruit de la croisière involontaire qu'il avoit faite autour de l'île de Saint-Michel, que la détermination de la position du banc des Fourmis, & d'une vigie nommée *la Baleine*, qu'il place de 35 minutes plus au Nord que ne le font les Cartes ; il seroit bien à désirer qu'on fit un voyage dans cet archipel, on pourroit en tirer de grands avantages pour la Navigation.

A mesure que nos Observateurs s'éloignoient des Açores, en tirant vers le Sud, la violence du vent diminuoit, la mer devenoit plus douce, le ciel plus serein, & l'air moins froid ;

en



en un mot, on commençoit à ressentir l'agréable température qu'on éprouve au voisinage des vents alisés ; c'est probablement à ce voisinage que Madère doit en grande partie l'agrément de son climat.

M. de Bory découvrit cette île le 21 Décembre après avoir eu connoissance de celle de *Porto-santo*, qui en est peu éloignée & des trois îles appelées *Désertes*, qu'on aperçoit quand on vient à Madère, par la partie de l'Est ; mais les vents ne lui permirent pas de gagner la rade de *Funchal*, capitale de l'Isle, avant le 23 Décembre.

Dès le 24, M. de Bory se rendit à Funchal, où il rejoignit M.<sup>rs</sup> de Goimpy & de Diziers qui l'avoient précédé ; ils avoient présenté les ordres du Roi de Portugal, dont ils étoient chargés, à M. le Comte de Saint-Michel, Gouverneur de Madère, & avoient, de son agrément, choisi une maison propre pour les observations, située à peu-près au milieu de l'espèce de croissant que forme, en cet endroit, le rivage de la mer.

L'île de Madère a dix-sept ou dix-huit lieues de long, sur sept à huit de largeur, elle a tant de montagnes, qu'on peut dire qu'elle n'est elle-même qu'une montagne coupée d'un grand nombre de précipices ; seulement du côté du midi, la pente s'adoucit & se termine en une plage au bord de la mer ; c'est au bas de cette pente, & dans une plaine longue & étroite, qu'est bâtie la ville de Funchal, capitale de l'Isle : cette ville est arrosée de deux ruisseaux qui lui fournissent une eau excellente ; mais dans les grandes pluies & dans les fontes de neige, ces ruisseaux deviennent des torrens qui mettroient la ville en danger, si on n'avoit pratiqué dans les rues des canaux pour conduire ces eaux sauvages à la mer ; elle est entourée d'une simple muraille, mais à chaque extrémité de la plage est un fort garni d'artillerie, & elle a à l'Ouest une citadelle élevée, construite, comme le reste des fortifications, par les Espagnols.

L'île de Madère est très-peuplée, on y compte au moins sept mille habitans, elle ne pourroit pas leur fournir du blé

pour plus de trois mois; l'abondance de ses excellens vins y supplée; les Anglois qui en enlèvent la plus grande partie, y laissent en échange du blé & des ouvrages de leurs manufactures; Madère en reçoit encore de l'île de Saint-Michel, très-fertile en cette denrée; cette dernière fournit encore à Madère une grande quantité de bestiaux.

La rade de Funchal est ouverte, mais elle est de bonne tenue, le fond en est de sable vaîart, il y a beaucoup plus d'eau dans des endroits que dans d'autres, ce qui annonce un banc fait en dos d'âne, qui va en augmentant du côté de la terre, comme du côté du large; on peut essuyer dans cette rade, sans aucun risque, les plus violens coups de vent venant de la terre, mais on doit se garder des vents qui viennent du large, ils rendent la mer d'une grosseur terrible, & on doit appareiller promptement si on veut éviter le naufrage : on assure cependant que des Navires y ont bravé ces vents, & que ceux qui ont été brisés, ne l'ont été que par la faute de leurs cables ou de leurs ancrs.

Le voyage à Madère n'étoit entrepris que pour y faire des observations qui pussent servir à constater la position de cette Isle, & toutes les reconnoissances que les Vaisseaux peuvent avoir à son approche.

De ce nombre étoit la variation de l'Aiguille aimantée, elle fut trouvée à bord du Vaisseau mouillé dans la rade, de  $1^{\text{d}} 45'$ .

Par un grand nombre de hauteurs méridiennes du Soleil & d'Étoiles, prises avec un sextant bien vérifié, la hauteur du pôle a été trouvée à Funchal de  $32^{\text{d}} 37' 40''$ .

Les observations qui ont servi à en déterminer la longitude; sont deux immersions du premier satellite de Jupiter, une du troisième, & une occultation d'une Étoile voisine de  $\Delta$  du Taureau par la Lune, leur résultat moyen place Funchal à  $1^{\text{h}} 16' 40''$  à l'occident de Paris.

Quoique ces observations fussent plus que suffisantes pour déterminer la longitude de Funchal; cependant M. de Bory & ses Collègues crurent devoir y en employer d'autres d'un

genre différent; c'est-à-dire, les observations des distances de la Lune au Soleil & à des Étoiles, & comme M. de Bory entre à ce sujet dans une discussion astronomique qui peut être d'une très-grande utilité à ceux qui seroient dans le cas d'employer cette méthode; nous avons cru que le Lecteur seroit peut-être bien aise d'en trouver ici une légère idée.

La rapidité du mouvement de la Lune qui parcourt sur son orbite environ 13 degrés par jour, est telle, qu'une différence de 2 minutes de degré dans son lieu apparent, répond à 4 minutes de temps, ou à un degré de longitude.

Sur ce principe, les Astronomes ont imaginé de déterminer le lieu de la Lune par observation pour un instant donné sous le Méridien inconnu où l'on est, & de trouver ensuite par le calcul l'instant auquel, sous un Méridien connu, elle aura dû se trouver au même point; la différence entre ces deux instans donnera celle des Méridiens.

On peut obtenir le lieu de la Lune par trois moyens; le premier est par l'heure observée de son passage par le Méridien; cette heure se détermine à terre, ou directement au moyen d'un quart-de-cercle mural placé dans le plan d'un Méridien, ou par des hauteurs correspondantes : on voit aisément que la première manière est impossible à la mer; nous en disons autant du passage de la Lune par un vertical connu, voisin du Méridien; cette méthode facile à terre, ne peut être d'aucun usage dans un Vaisseau.

Les hauteurs correspondantes ne sont pas impossibles à prendre dans un Vaisseau, mais elles exigent quelques attentions que ne demandent pas celles qu'on prend à terre; dans ce dernier cas, il suffit de les prendre vers le cercle de six heures, ou au moins le plus loin du Méridien qu'il est possible, sans tomber dans les vapeurs de l'horizon; mais à la mer, il faut quelque chose de plus, il faut les prendre lorsque la Lune est entre 5 & 15 degrés de hauteur; plus haut que 15 degrés, l'horizon de la mer seroit trop obscur & ne se distingueroit pas assez; plus bas que 15 degrés, la hauteur de la Lune seroit trop & trop inégalement affectée par la

réfraction : on doit observer cette même règle lorsqu'on veut déterminer le lieu de la Lune par une hauteur absolue , à moins que l'opération ne se fit dans le crépuscule ou de jour , cas où l'horizon seroit toujours assez éclairé.

Quant aux distances de la Lune au Soleil ou à des Étoiles connues , il est évident qu'après le Soleil , auquel on doit , autant qu'il est possible , comparer la Lune , on doit donner la préférence aux Étoiles Zodiacales ; mais entre celles-là même , il y a un choix à faire : on doit prendre de préférence celles qui sont dans la perpendiculaire à la ligne des cornes ; c'est-à-dire , à très-peu-près dans le plan de l'orbite de la Lune , parce qu'alors on a , sans aucun calcul , la distance en longitude de la Lune à l'Étoile.

Au défaut de celles-là , on prendra d'autres Étoiles , même de celles qui sont hors du Zodiaque ; mais dans ce cas il faudra prendre , le plus promptement possible , la distance de la Lune à deux Étoiles différentes : enfin , si l'on est maître du temps de l'opération , il faudra choisir celui où le mouvement propre de la Lune sur son orbite sera le plus vif.

Les calculs nécessaires pour déduire le lieu de la Lune de ces observations , sont expliqués dans presque tous les livres d'Astronomie qui ont été publiés depuis dix-huit ou vingt ans , & notamment dans l'État du Ciel de 1755 , publié par M. Pingré , & dans le Discours qui est à la tête du cinquième volume des Éphémérides de M. de la Caille.

De toutes les méthodes dont nous venons de parler , la seule à laquelle s'arrêtèrent nos Observateurs , fut l'observation de la Lune & de quelques Étoiles au même fil d'une lunette placée dans un vertical proche du Méridien ; ils prirent , de cette manière , le passage de la Lune & de plusieurs Étoiles des Hyades , dont elle étoit assez proche , mais ils attendent , pour faire usage de cette observation , une Carte des Hyades sur laquelle on puisse sûrement compter.

Avant de finir cet article , nous devons donner une idée des observations que M. de Bory & ses Collègues firent à Madère sur les vents.

Le vent de Nord-est est celui qui règne le plus ordinairement dans l'intérieur de l'île; dès qu'il est décidé, voici la route qu'il tient dans la rade qui est à son Sud; au Soleil levant, le vent d'Est se fait sentir; à midi on a la brise de l'Ouest; & le soir le calme ou le vent de terre.

Le vent de Nord-est amène des nuages qui, ne pouvant passer au-dessus des montagnes de l'île, ni de celles des Désertes qui ne sont guère moins élevées, s'y arrêtent, & ces terres embrumées sont un signe infailible de beau temps.

Si au contraire la brume se dissipe, on peut être assuré que le vent va souffler du Sud, mais ce dernier vent ne dure ordinairement que trois ou quatre jours, parce que le vent alisé n'étant qu'à 4 degrés de Madère, & soufflant dans une direction opposée, l'aliment manque bientôt au vent de Sud, il se fait un calme, & le vent de Nord-est reprend jusqu'à ce qu'un orage ou quelque autre cause ramène le vent de Sud.

Les observations étant absolument finies, les Observateurs se rembarquèrent le 11 Janvier, & mirent à la voile pour Lisbonne, où leurs ordres leur enjoignoient de se rendre. Le mauvais temps les obligea de faire le tour de l'île par l'Ouest, & ils en profitèrent pour en relever toutes les pointes, ils la perdirent de vue le 13 au soir, & le 16 au coucher du Soleil, ils aperçurent le cap la Roque, à dix lieues d'eux, dans l'Est quart de Sud-est du monde. Ce cap qui est très-élevé, rassemble toutes les vapeurs que le vent de Nord-est, très-fréquent dans ces parages, amène avec lui & il en est presque toujours enveloppé, mais cette enveloppe qui se remarque aussi facilement que le cap, ne l'empêche pas de servir de point de reconnoissance. M. de Bory, après l'avoir reconnu, entra dans le Tage, dont l'entrée n'est pas extrêmement facile. Le courant de cette rivière suspendu par le flot montant, y a formé vers son embouchure deux bancs appelés *cachopes*, qui ne laissent que deux passes, dont celle du Sud même, qui est la plus fréquentée,

est assez étroite ; ils la franchirent cependant , & le 20 ils étoient mouillés à Lisbonne , sous le palais du Roi.

Lisbonne , capitale du royaume de Portugal , est comme la ville de Rome , située sur sept montagnes , & cette situation singulière , fait qu'elle présente le plus agréable spectacle à ceux qui la voyent des Vaisseaux mouillés dans le Tage , elle contient une infinité d'édifices & plusieurs belles places , la plus remarquable est celle qui porte le nom de place du Palais , & où se fait le couronnement du Monarque à son avènement au trône. On y admire encore son aquéduc , remarquable par sa longueur , qui est de plus de deux lieues , & par la hauteur & la hardiesse des arches qui le soutiennent en quelques endroits.

M. de Bory auroit bien désiré profiter de l'offre que lui avoit fait M. le comte de Baschy , de placer son observatoire portatif , sur la terrasse de son hôtel , pour faire à Lisbonne , quelques observations astronomiques ; mais le peu de solidité de cette terrasse , & la violence du vent qui arrêtoit à chaque instant sa pendule , ne le lui permirent pas ; il se rembarqua le 12 Février , & arriva le 21 dans la rade de Brest. Les côtes occidentales de Bretagne , sont terminées par un banc , qui permet de sonder & de trouver fond assez avant en mer , & long-temps avant qu'on puisse apercevoir les côtes. M. de Chefac , qui commandoit l'Escadre , voulut connoître l'extrémité de ce banc , & fit pour cela jeter le plomb à une assez grande distance , pour voir à quelle distance on commenceroit à trouver fond ; il résulte de toutes ses observations , qu'à cinquante lieues & demie dans l'Ouest , quart du Sud-ouest , 5 degrés à l'Ouest de l'île d'Ouessant , on commence à trouver le fond à quatre-vingt-quinze brasses , ce qui fixe l'étendue du banc de ce côté , & fournit un point assuré de reconnoissance. Cette utile détermination peut être regardée comme un fruit surnuméraire du voyage des Officiers-observateurs.



## SUR

## L'USAGE DE L'ESPRIT-DE-VIN

*dans l'Analyse des Eaux Minérales \*.*

LES Eaux minérales sont des remèdes que la Nature offre tout préparés, & qui produisent des effets admirables; mais pour pouvoir les administrer avec succès, il faudroit souvent connoître de quels ingrédiens elles sont composées, & c'est un secret qu'elle s'est réservé; c'est à l'art qu'il appartient de le lui arracher, par une analyse savante & exacte; il est seulement étonnant que ce ne soit que depuis environ cinquante ans que les Chimistes aient pris cette unique voie, de s'assurer de ce que contenoient ces eaux, & d'éclairer ainsi la Médecine sur les différens usages auxquels elle peut les appliquer.

V. les Mém.  
P. 555.

Une des grandes difficultés de cette analyse, est d'en séparer les différentes substances qu'elles contiennent, & d'en purifier les sels qu'on en retire, qui sont souvent imprégnés d'eau-mère, de matières extractives ou de parties bitumineuses.

C'est donc un service essentiel que rend M. Lavoisier, que de donner, pour cette séparation, une méthode qui, à la vérité, n'a pas l'avantage d'être absolument neuve, puisqu'elle est depuis long-temps entre les mains des Chimistes, mais de laquelle ils n'ont ni senti l'importance, ni tenté de faire une application suivie; elle est fondée sur la solubilité des sels dans l'esprit-de-vin, & M. Macquer est le premier qui, ayant rassemblé le peu de connoissances sur cette matière, qui se trouvoient dans différens Auteurs, ait entrepris de la rappeler à un examen réfléchi, & fondé sur des expériences

\* Cet article auroit dû naturellement être placé avec la Chimie à laquelle il appartient, mais le Mémoire de M. Lavoisier n'ayant été

imprimé qu'après que les premières feuilles de l'Histoire ont été tirées, il n'a pu être mis que dans cet endroit.

suivies ; c'est de ce travail publié dans la Collection académique de Turin, qu'est parti M. Lavoisier, & il a reconnu que, quoiqu'il n'y eût qu'un certain nombre de sels qui puissent se dissoudre dans l'esprit-de-vin bien défilé, la plupart des autres devoient dissolubles par ce mentrue lorsqu'on l'affoiblissoit avec une certaine portion d'eau, & qu'il étoit même possible, dans bien des cas, de proportionner tellement les doses, que le mélange pût dissoudre un sel sans en attaquer un autre : essayons de présenter une légère idée de ses expériences.

Il a fait huit différens mélanges d'esprit-de-vin & d'eau distillée, tous dans des proportions différentes, & il a examiné l'action de chacun d'eux, soit à froid, soit à chaud sur différentes espèces de sels, & il est résulté de cet examen :

1.<sup>o</sup> Que le sel marin & le nitre, lorsqu'ils sont à base terreuse, se dissolvent avec une grande facilité dans l'esprit-de-vin :

2.<sup>o</sup> Que le même esprit-de-vin seul ne dissolvait, ni le sel marin ordinaire, ni l'alkali de la soude, ni le sel marin à base de sel d'Epsum, ni le sel d'Epsum lui-même, mais qu'il enlevait au sel de Glauber son eau de cristallisation, & le réduisoit en une poudre fine :

3.<sup>o</sup> Qu'une partie d'esprit-de-vin, mêlée avec deux parties d'eau, dissolvait à chaud une assez grande quantité de sel marin, sans qu'il se fit, par le refroidissement, aucune cristallisation :

4.<sup>o</sup> Que le sel de Glauber ne se dissout jamais à froid dans tout mélange où il entre plus d'esprit-de-vin que d'eau, mais qu'il s'en dissout une quantité notable, quand ce mélange est chauffé jusqu'à bouillir, & que la totalité est bientôt cristallisée de nouveau, dès que la liqueur se refroidit, sur-tout, si on emploie deux parties d'esprit-de-vin contre une de sel de Glauber :

5.<sup>o</sup> Le sel d'Epsum, soumis à l'action du même dissolvant, offre les mêmes phénomènes, si ce n'est qu'il y est moins soluble, & que si les deux sels de Glauber & d'Epsum y avoient



avoient été mis ensemble, le dernier se cristalliferoit avant l'autre, & à un moindre degré de refroidissement.

Le temps n'a pas permis à M. Lavoisier de soumettre encore aux mêmes épreuves, tous les sels que nous connoissons, & il a cru d'autant plus nécessaire de publier les Observations dont nous venons de parler, que les sels qui en font le sujet, sont presque les seuls que l'analyse fasse découvrir dans les Eaux minérales.

En effet, pour peu qu'on veuille se rappeler les principes les plus incontestables de la Chimie, on verra que ces eaux ne peuvent presque contenir d'autres sels que ceux dont nous venons de parler : essayons d'en donner la preuve.

Il est aujourd'hui presque universellement reconnu par les Chimistes, qu'il n'y a que deux acides minéraux, le *vitriolique* & le *marin*. L'*acide nitreux* est regardé comme étranger au règne minéral, & ne paroît différer de l'acide marin, que par la jonction de quelques parties, soit animales, soit végétales, que la putréfaction nécessaire à sa formation y peut faire passer.

Il est vrai que de nos jours on a essayé d'introduire un autre acide minéral sous le nom d'*acide phosphorique* ; mais malgré les raisons ingénieuses & plausibles qui ont été apportées pour prouver son existence, elle n'a pas encore le degré de certitude requis pour mettre ce nouvel acide au nombre des vrais acides minéraux ; d'ailleurs, quand il en existeroit d'autres que les acides vitriolique & marin, les sels qu'ils formeroient seroient probablement insolubles, & ne se pourroient par conséquent trouver dans les eaux minérales. Il faut donc, relativement à cet objet, s'en tenir aux deux que nous venons de nommer ; & cela posé, il n'est pas difficile de faire voir que le nombre des sels charriés par les eaux minérales, ne peut être considérable.

Un acide ne peut former un sel neutre, s'il n'est joint à une base métallique, calcaire, ou terreuse, ou alcaline. Voyons donc les composés de cette espèce, qui peuvent se trouver dans les Eaux minérales.

Premièrement , presque aucun des demi-métaux , n'est dissoluble par l'acide vitriolique , à moins qu'il ne soit très-concentré & bouillant ; or il ne se trouve jamais en cet état dans les entrailles de la terre , on ne doit donc trouver dans les eaux minérales , ni mercure , ni antimoine , ni cobalt , ni bismuth dissous par l'acide vitriolique. Les métaux blancs ou lunaires , c'est-à-dire , l'or , l'argent , le plomb & l'étain , sont de même indissolubles par l'acide vitriolique ; on ne trouvera donc dans les Eaux minérales , aucun vitriol d'or , d'argent , de plomb , ni d'étain. Le fer & le cuivre sont les seuls qu'il puisse dissoudre à froid ; aussi les vitriols qui ont pour base ces métaux , se trouvent-ils communément dans les eaux minérales ; on en peut dire autant de l'acide marin , toutes les dissolutions des mêmes substances par cet acide , si l'on en excepte le fer & le cuivre , ne se font qu'avec une extrême difficulté & par des procédés dont on peut être sûr que la Nature n'a pas fait les frais : on ne doit donc pas espérer de trouver dans les Eaux minérales , aucun sel produit par la combinaison des substances que nous venons de nommer , & des deux acides vitriolique & nitreux ; examinons présentement les autres substances avec lesquelles ils peuvent en s'y joignant , former des sels neutres , dissolubles dans ces eaux.

Le règne minéral , n'offre que trois alkalis , celui de la soude , l'alkali terreux ou terre calcaire , & la base du sel d'Epsom , on y pourroit joindre la base de l'alun , si elle étoit plus certainement connue , & si on la trouvoit plus communément dans les eaux minérales , où il est très-rare de la rencontrer. Or de la combinaison des deux acides minéraux avec les trois alkalis , il ne peut se former que six sels , savoir ; la sélénite , le sel de Glauber , le sel d'Epsom , le sel marin , le sel marin à base terreuse , & le sel marin à base de sel d'Epsom : ce sont aussi les seuls qu'on trouve communément dans les Eaux minérales.

Pour donner un exemple de la manière dont on peut appliquer l'esprit-de-vin à l'analyse des Eaux minérales , il a choisi l'eau de la mer , comme la plus compliquée de toutes

en ce genre; en effet, elle est le résultat du lavage de tout le Globe, & la rincûre pour ainsi dire, du grand Laboratoire de la Nature; elle doit donc contenir tous les sels qui peuvent se rencontrer dans le genre minéral, comme elle les contient effectivement.

Dans cette vue, il prit quarante livres d'eau de mer, puisée en temps calme, à quatre lieues au large, à la côte de Dieppe, il les fit évaporer lentement au feu de lampe, dans une capsule de verre, ayant attention d'en remettre à mesure qu'elle s'évaporait; jusqu'à la moitié de l'opération, il ne parut ni terre, ni sélénite, ni sel; mais peu après il se forma une pellicule aisée à reconnoître pour de la terre calcaire & de la sélénite; en continuant l'évaporation, il commença à voir paroître quelques vestiges de sel marin, alors il versa la liqueur par inclination & changea de capsule, & ayant mis à part la terre & la sélénite, il la lava avec un peu d'eau distillée pour en ôter toutes les parties salines, il trouva qu'elle pesoit 4 gros 56 grains.

Pour séparer la sélénite de la terre, il observa que cette dernière se dépose sous la forme d'une poussière assez fine, qui se soutient assez long-temps dans la liqueur où elle nage, au lieu que la sélénite se cristallise en petites aiguilles qui se joignent & tombent assez promptement au fond du vaisseau, si la liqueur ne peut les dissoudre, & c'est-là précisément le cas de l'esprit-de-vin: si on lave donc un mélange de terre & de sélénite dans de l'esprit-de-vin, & qu'ayant agité la liqueur, on la décante, ou si on la verse par inclination, au bout de quelques minutes de repos, on trouvera au fond du vase toute la sélénite, & la terre restera jointe à l'esprit-de-vin, & ne se déposera que long-temps après; il est vrai qu'elle contiendra encore quelque peu de sélénite, mais on l'en séparera aisément en répétant la même opération.

La terre calcaire & la sélénite contenues dans l'eau de mer, en étant séparées, M. Lavoisier, a continué l'évaporation, & il a obtenu du sel marin, d'abord en beaux

cristaux , mais sur la fin de l'opération , la cristallisation est devenue confuse , & ce n'est qu'avec peine qu'il a pu évaporer jusqu'à siccité. Le résidu pesoit un peu plus de douze onces ; il a mis cette masse dans un matras & y a versé de bon esprit-de-vin froid , qui a pris en assez peu de temps une teinte jaunâtre assez marquée , qui n'étoit due qu'à la substance visqueuse , ou plutôt au sel marin à base terreuse que contenoit cette masse saline , le reste est demeuré de la plus grande blancheur , & cette masse blanche ayant séché de nouveau , ne pesoit plus que 10 onces 2 gros.

Pour examiner la nature de cette masse saline , voici comment s'y prit M. Lavoisier ; nous avons dit ci-dessus que le sel de Glauber ne se dissolvoit jamais à froid dans tout mélange qui contenoit plus d'esprit-de-vin que d'eau ; il a donc versé sur la masse saline un mélange de deux parties d'esprit-de-vin contre une d'eau , & l'a fait fortement chauffer ; tout s'est dissout , mais lorsque le mélange s'est refroidi , le sel marin y est resté suspendu , & il s'est précipité 4 gros 26 grains d'une poudre blanche , que M. Lavoisier a reconnue pour être du sel de Glauber & du sel d'Epſom.

Pour voir si la séparation des sels étoit exacte , M. Lavoisier commença par examiner la sélénite qu'il avoit séparée , comme nous l'avons dit , & la trouva absolument pure & semblable aux sélénites connues. Quant à la poussière que nous avons dit qu'il avoit obtenue , il y versa de l'esprit-de-vin acidulé par le moyen d'une petite portion d'esprit de nitre fumant ; il s'est formé par ce moyen un nitre à base terreuse , qui s'est dissout dans l'esprit-de-vin surnageant , & il est resté une portion de sélénite qui , comme on sait , n'est pas dissoluble dans ce menstree , & qui étoit restée mêlée avec la poudre dans la première opération : il est bien sûr qu'on n'auroit pu faire la même opération avec l'eau distillée , puisque la sélénite s'y dissout , sur-tout lorsque l'eau est acidulée.

Nous avons dit que M. Lavoisier avoit dissout dans un mélange de deux parties d'esprit-de-vin & une d'eau , une masse saline , de laquelle il avoit par ce moyen séparé le sel

de Glauber & le sel d'Epsom qui y étoient contenus, il a fait évaporer lentement le reste de la liqueur qui ne devoit plus contenir que du sel marin; mais comme il s'étoit cependant aperçu qu'en versant sur cette dissolution quelques gouttes de solution d'alkali fixe, il se faisoit un précipité blanc, il a voulu rechercher la cause de cet effet & voir s'il tenoit à la nature du sel marin même, ou au mélange d'un sel à base terreuse qui y étoit joint; pour cela il a recueilli en douze portions le sel marin à mesure que l'évaporation le faisoit cristalliser; il résulta de cette séparation, 1.<sup>o</sup> que les premières portions de sel obtenues étoient d'une saveur agréable; mais qu'à mesure que l'évaporation s'avançoit, le sel devenoit âcre & amer, & que sur la fin il ne se cristallisoit plus en cubes, mais d'une façon très-irrégulière.

2.<sup>o</sup> Qu'ayant fait dissoudre dans douze verres, ces douze portions de sel, & ayant versé dans chacun quelques gouttes d'alkali fixe, il ne s'étoit presque rien précipité des premiers numéros, mais que les derniers avoient donné des précipités abondans de terre calcaire, ce qui prouvoit que l'amertume & l'âcreté de ces portions de sel n'étoient dûes qu'à une portion de sel marin à base terreuse, combinée avec le sel marin cristallisé. Cette circonstance même a fait observer à M. Lavoisier une singularité bien remarquable, c'est que cette terre qui servoit de base au sel n'étoit point de la terre calcaire ordinaire, & que ce sel différoit du sel à base terreuse commun, par sa facilité à se cristalliser, & par son indissolubilité dans l'esprit-de-vin. Cette propriété a fourni à M. Lavoisier le sujet d'un travail suivi, dont il rendra compte dans un autre Mémoire. Le sel qui s'étoit déposé en forme de poussière au fond du vase, n'étoit qu'un mélange de sel de Glauber & de sel d'Epsom, qui pesoit 4 gros 26 grains.

Il ne restoit plus à examiner que l'esprit-de-vin qui avoit servi à dissoudre les sels à base terreuse, M. Lavoisier l'a distillé avec les plus grandes précautions, & il a passé pur, sans huile & sans bitume. Il n'est resté au fond du vaisseau

qu'une eau-mère, qui a donné par l'évaporation, 1 once 5 gros & 10 grains de fel marin à base terreuse, ordinaire en cristaux confus & bien secs.

Quarante livres d'eau de mer contiennent donc :

1.<sup>o</sup> 4 gros 56 grains de terre calcaire ordinaire, & de sélénite ou fel gypseux.

2.<sup>o</sup> 8 onces 6 gros 32 grains de fel marin à base d'alkali de soude.

3.<sup>o</sup> 4 gros 26 grains de fel de Glauber & d'Epsom.

4.<sup>o</sup> 1 once de fel marin à base de fel d'Epsom.

5.<sup>o</sup> 1 once 5 gros 10 grains de fel marin à base terreuse ordinaire, mêlé de fel marin à base de fel d'Epsom, & M. Lavoisier n'y a pas trouvé la moindre trace d'huile ni de bitume.



*ÉLOGE DE M. BUACHE.*

**P**HILIPPE BUACHE, premier Géographe du Roi, naquit à Paris le 7 Février 1700, d'honnêtes parens originaires des environs de Sainte-Ménéhould en Champagne. A peine fut-il en état de laisser apercevoir quelques inclinations, que son goût pour les beaux Arts se manifesta si clairement, que ses parens reconnurent ce présent de la Nature, & se firent un plaisir de cultiver ces heureuses dispositions. Il profita si bien de ces secours, qu'à l'âge de onze ans il étoit déjà au rang des meilleurs Dessinateurs : La fortune vint achever ce que la Nature avoit commencé. M. Pitrou, mort en 1750, Inspecteur général des Ponts & Chaussées, vint demeurer dans la maison du père de M. Buache, & bientôt les talens du jeune homme brillèrent à ses yeux; il n'hésita pas un moment à favoriser leur développement de tout son pouvoir: il lui enseigna les Mathématiques, & lui inspira le bon goût des Arts, qui ne s'enseigne point, & qui ne s'inspire même qu'à ceux à qui la Nature en a déjà donné une bonne partie. Ce secours anima tellement le jeune Buache, qu'é malgré la foiblesse de son tempérament, tout son temps fut employé au travail, sans aucune distinction des jours & des nuits; habitude qu'il a toujours conservée jusqu'à ses dernières années: on juge aisément de la sévérité du régime nécessaire pour pouvoir soutenir cette continuité de travail.

La construction du pont de Blois, dont la conduite fut confiée à M. Pitrou, en 1716, vint priver M. Buache du secours qu'il tiroit de ses leçons & de ses conseils, il y suppléa en partie, en s'associant avec quelques jeunes gens de son âge, animés du même goût que lui pour les Sciences & pour les Arts; on a trouvé dans ses papiers plusieurs Discours datés de 1718, qui avoient été lûs dans ces conférences.

Le succès en fut tel que M. Buache s'étant tourné du côté de l'Architecture, il fut, en moins de trois années en état non-seulement de disputer, mais même d'emporter le premier Prix de l'Académie d'Architecture; il avoit même acquis dans cette utile & brillante partie des Mathématiques, des connoissances si étendues, que quoiqu'il l'eût par la suite entièrement abandonnée, il a formé depuis plusieurs Élèves qui s'y sont distingués, & n'a jamais cessé d'être consulté dans les cas difficiles, par les plus habiles Architectes; mais ce talent si précieux, qui auroit seul suffi pour lui faire une réputation, n'étoit qu'un accessoire de son mérite, & nous allons bientôt le voir totalement occupé de la Géographie, dans laquelle il a porté si loin ses recherches.

Le goût de la belle antiquité qui respire encore dans les Monumens de l'ancienne Rome, a engagé nos Rois à y envoyer les jeunes gens qui se distinguent dans les Arts libéraux, pour y admirer ces Chefs-d'œuvre, pour s'en pénétrer, & pour s'animer, pour ainsi dire, de l'esprit des grands Hommes qui les ont produits. M. Buache étoit dans ce cas; son triomphe à l'Académie d'Architecture l'appeloit à Rome & lui aplanissoit les chemins; & il étoit en effet sur le point de s'y rendre, lorsque M. de l'Isle le Géographe vint mettre obstacle à ce voyage, l'engagea à se livrer tout entier à l'étude de la Géographie, & lui fournit les moyens de se livrer à cette étude.

Le Roi venoit d'établir à Paris le Dépôt des Plans, Cartes & Journaux de la Marine, & il avoit mis ce Dépôt sous la direction de M. le Chevalier de Luines, Officier de la plus grande distinction; mais il avoit besoin de trouver quelqu'un qui pût mettre en œuvre les matériaux qui y étoient contenus, qui sût les comparer, & évaluer, lorsqu'ils ne se trouvoient pas d'accord entr'eux, le degré de confiance qu'une critique juste & éclairée devoit accorder à chacun pour pouvoir, avec ces secours, construire des Cartes marines, sur l'exactitude desquelles on pût compter. On peut juger aisément  
de



de l'extrême sagacité qu'exigeoit ce travail, & du nombre de connoissances qu'il demandoit dans celui qui en devoit être chargé. Cependant M. de l'Isle, bon juge en pareille matière, n'hésita pas à présenter à M. le Chevalier de Luynes le jeune Buache, âgé à peine de vingt-un ans, pour remplir ses vues, & il les a remplies en effet de la manière la plus complète pendant dix-sept ans qu'il a été attaché à ce Dépôt; il y a mis les matériaux dans le plus bel ordre, & il a fait plus de quinze cents Cartes manuscrites, en s'aidant des conseils de M. de l'Isle, tant qu'il a vécu; & après sa mort, arrivée en 1726, des collections de Mémoires trouvés dans ses porte-feuilles, qu'il a pour ainsi dire prodigués pour enrichir ce trésor public de toutes les Nations qui fréquentent la mer.

A la mort de M. de l'Isle le Géographe, feu M. de l'Isle l'Astronome, qui avoit passé dès l'année précédente en Russie, voulut y attirer M. Buache, dont il connoissoit d'autant mieux la capacité qu'il lui avoit donné lui-même des leçons d'Astronomie. Il s'adressa pour cette négociation à M. d'Onsen-Bray, qui crut devoir faire part de sa lettre à l'Académie. La lecture qu'il en fit produisit l'effet qu'elle devoit naturellement produire; elle augmenta l'estime que l'Académie avoit déjà conçue pour M. Buache; mais celui-ci demeura inflexible, l'amour de la Patrie le retint, & quoiqu'il n'eût alors que huit cents livres d'appointemens au Dépôt de la Marine, il refusa constamment les offres avantageuses qu'on lui faisoit pour l'engager à passer en Russie.

Il faut cependant avouer que l'amour de la Patrie n'étoit pas le seul motif de son refus; il s'y en joignoit un second trop honorable à sa mémoire pour être passé sous silence; sa reconnoissance pour M. de l'Isle ne lui permettoit pas d'abandonner sa veuve & sa fille dans le temps où elles avoient le plus grand besoin de son secours pour mettre en ordre les papiers de ce célèbre Géographe, & pour continuer ses travaux: personne ne pouvoit mieux que lui leur rendre cet important service, ayant vécu avec M. de l'Isle dans la

plus grande intimité, & se trouvant le dépositaire & le confident de tous ses projets. Il travailla donc assidûment à mettre en ordre l'immense collection de Mémoires & de Recherches qu'avoit laissés M. de l'Isle, & présenta au Roi, de concert avec sa veuve, plusieurs Cartes manuscrites, entr'autres une Mappemonde marine & une Carte de la Terre-sainte, comparée avec celle de M. Sanson. Il publia même quelques Cartes que la mort de M. de l'Isle l'avoit empêché de finir, comme l'Afrique françoise ou le Sénégal; une Carte de l'empire d'Assyrie, qui est jointe à un Mémoire de feu M. Fréret, imprimé dans le Recueil de l'Académie Royale des Inscriptions & Belles-Lettres, & une Carte marine du golfe du Mexique & des îles de l'Amérique, qu'il présenta en 1730 à l'Académie, & dans laquelle il corrige plusieurs erreurs considérables qui se trouvoient dans les meilleures Cartes; erreurs d'autant plus dangereuses, que ces parages sont extrêmement fréquentés par les Navigateurs françois; & pour mieux mettre l'Académie à portée de juger de ces changemens, il les lui fit voir par des contours différemment colorés sur une même Carte.

\* *Voy. Hist.*  
1726, p. 83.

On peut voir, dans l'Éloge de M. de l'Isle le Géographe\*, qu'en 1718 il avoit été honoré par brevet, du titre de premier Géographe du Roi, titre alors absolument nouveau, & d'une pension qui y avoit été attachée. Ce titre & cette pension passèrent après lui à feu M. Maraldi; mais celui-ci étant mort en 1729, le titre de premier Géographe, & la pension qui y étoit jointe, furent donnés à M. Buache, âgé pour lors à peine de vingt-neuf ans, & le Roi voulut bien ajouter à cette grâce de créer en sa faveur dans l'Académie, une place de Géographe, qui n'y existoit pas avant lui; ces deux grâces accordées en si peu de temps étoient une preuve sans réplique du cas que le Ministère & l'Académie, faisoient de son mérite. On peut être au moins bien sûr qu'il ne les avoit pas arrachées par ses sollicitations.

Dans le temps même que le Roi & l'Académie honoroient les talens & la capacité de M. Buache, Madame de l'Isle

s'étoit proposé de récompenser les marques d'attachement qu'il avoit données à la mémoire de son mari, & les services qu'elle en avoit reçus en cette occasion, en lui donnant en mariage sa fille unique; les lauriers Académiques décorent les qualités de son esprit, dans le même temps que les myrthes de l'hymen couronnoient celles de son cœur.

Dans l'année qui suivit sa réception à l'Académie, M. Buache, y donna ses Recherches géographiques sur l'empire d'Alexandre, la Carte de cet empire avoit été autrefois dressée par M. de l'Isle, pour l'usage du Roi dans ses études. Digne successeur de ce célèbre Géographe, M. Buache entreprit d'en donner une espèce d'analyse, & de présenter les raisons qui avoient déterminé M. de l'Isle, à s'écarter en plusieurs points, des Cartes des plus habiles Géographes qui l'avoient précédé, & de diminuer le merveilleux des marches forcées de ce Conquérant, en rappelant les mesures de ces Géographes à leur juste valeur : on est étonné en lisant cet ouvrage, de l'adresse avec laquelle il démêle dans une infinité d'Historiens, des traces presque imperceptibles de Géographie, & de la sagacité avec laquelle il fait les combiner ensemble pour en tirer des conclusions souvent presque aussi fortes que des démonstrations.

L'amour de M. Buache, pour la Géographie, lui faisoit saisir avidement tout ce qui pouvoit contribuer à l'avancement de cette science. La découverte du cap de la Circoncision, faite en 1739, par M. de Lofier-Bouvet, l'engagea à donner une Carte particulière de cette découverte, sur laquelle M. Buache, n'eut garde d'omettre les glaces flottantes, entre lesquelles cet Officier avoit passé, elles étoient pour lui un indice de grandes rivières, & par conséquent de terres considérables dans le voisinage, cette considération l'engagea même à marquer dans sa Carte, les terres de Gonnevillle & des Perroquets, quoique regardées comme très-incertaines, persuadé qu'en les cherchant on pourroit découvrir celles qu'il soupçonnoit. L'expédition de M. de Kerguelen, vient de justifier cette conjecture.

L'Académie a rendu compte au Public, dans son temps, des travaux qu'elle avoit entrepris pour connoître la véritable Figure de la Terre, & en particulier des Observations faites en différens lieux de la Terre, pour déterminer la longueur du Pendule à secondes dans tous les climats : M. Buache, imagina qu'une Carte qui comprendroit les différens lieux où ces observations avoient été faites, pourroit être utile, en présentant pour ainsi dire aux yeux, la marche de cette opération, c'en fut assez pour le déterminer à dresser cette Carte qu'il publia en 1740.

L'inondation de la Seine arrivée à la fin de 1740 & au commencement de 1741, vint mettre les talens de M. Buache, à une nouvelle épreuve, il suivit avec l'attention la plus scrupuleuse, les progrès de ce phénomène, malheureusement trop intéressant, & il en rendit au commencement de 1741 un compte détaillé, accompagné d'un plan de Paris, dans lequel il marque non-seulement l'étendue du terrain qui avoit été couvert par les eaux, mais encore les limites de celui où l'eau avoit pénétré dans les caves; ouvrage d'autant plus utile, qu'il peut servir de guide à ceux qui bâtiront désormais dans ces quartiers, & les engager à donner à leurs édifices des fondemens qui puissent résister à de semblables accidens.

L'année suivante, il donna une suite de ce travail en deux plans hydrographiques de Paris, auxquels il joignit une coupe du terrain de cette capitale, depuis l'Observatoire jusqu'à la porte Saint-Martin; les plans indiquent, l'un, l'étendue de l'inondation, tant superficielle que souterraine; & l'autre, les différentes pentes des ruisseaux, qui servent à égoutter la ville, objet bien plus intéressant qu'il ne paroît au premier coup-d'œil, par la facilité qu'il donne dans les incendies, de voir à l'instant toute l'étendue du terrain, dont les puits peuvent fournir de l'eau à l'endroit attaqué par le feu. La coupe de Paris, du Nord au Sud, offre de même plusieurs objets capables de piquer la curiosité, entr'autres les différentes profondeurs des puits, comparées

entr'elles, ont fait voir à M. Buache, qu'ils étoient nourris par une nappe d'eau souterraine qui descend des terres vers la rivière; que cette nappe d'eau obligée de refluer quand la rivière devient haute, augmente de proche en proche la hauteur d'eau dans les puits, qu'elle peut par ce moyen, pénétrer dans des caves, que leur élévation ou des bancs de roche mettoient à l'abri des eaux de la rivière, & que dans ce dernier cas, le retour des eaux à la rivière devenant impossible, elles ne peuvent être vidées que par le travail des hommes, ce qui rend raison du singulier phénomène de caves voisines de la rivière, qui se vidoient d'elles-mêmes après l'inondation, tandis que d'autres bien plus hautes, conservoient obstinément leurs eaux.

En 1745, M. Buache, laissa échapper une esquisse du grand travail qu'il méditoit sur la structure du Globe terrestre, & sur l'arrangement & l'usage des Montagnes, cet essai fut accompagné d'une carte de la partie de l'Océan, comprise entre les continens d'Afrique & d'Amérique, à laquelle étoit jointe une coupe de cette partie de la mer, représentant les différentes profondeurs données par les sondes des Navigateurs.

Ce système de Géographie-physique, est absolument dû à M. Buache; il avoit remarqué que les montagnes formoient par leur arrangement de vastes bassins où couloient en ruisseaux les eaux qui sortoient des montagnes; que ces ruisseaux formoient par leur jonction des rivières & des fleuves qui alloient porter leurs eaux à la mer, il osa porter ses vues plus loin & assurer que les mêmes chaînes de montagnes, se prolongeoient sous la mer, qu'elles la partageoient en différens bassins, que les îles, les bas-fonds, les roches, les vigies, &c. étoient les sommets de ces montagnes marines, que les chaînes qu'elles formoient dans la mer, arrêtoient le mouvement trop libre de ses eaux, que les gorges pratiquées entre les sommets, servoient de communication aux eaux, d'un bassin à l'autre, & devenoient la cause très-probable des courans qu'on éprouve quelquefois très-loin des côtes; en un mot, il n'est presque aucun phénomène de cette

espèce, qui ne vienne comme de lui-même, se ranger sous cette ingénieuse hypothèse, elle fut même en quelque sorte prophétique, & nous verrons bientôt qu'elle avoit donné lieu à M. Buache, de deviner une bonne partie de ce que les recherches faites en Russie par M. de l'Isle l'Astronome lui avoient appris sur la partie septentrionale de la mer du Sud & sur la jonction de l'Amérique avec l'Asie.

Nous avons dit dans l'Éloge de feu M. de l'Isle, qu'en 1750, il avoit donné à l'Académie la relation des voyages faits dans le Nord de la mer Pacifique, tant par les Russes que par les Espagnols, desquels il résultoit que cette mer communiquoit à la mer glaciale par un détroit d'environ quarante lieues de large, placé sous le Cercle polaire, au milieu duquel étoit une île & qui geloit tous les hivers, en sorte que pendant cette saison, on peut passer à pied sec du Nord-ouest de l'Amérique au Nord-est de l'Asie.

Avant de présenter cet ouvrage à l'Académie, M. de l'Isle, l'avoit fait voir à M. Buache, celui-ci n'en fut nullement étonné. D'après son système & l'Atlas russe que M. le comte d'Argenson lui avoit communiqué pendant l'absence de M. de l'Isle, il étoit parvenu de conjectures en conjectures à soupçonner la disposition de cette partie du monde & à en dresser une espèce de carte, à laquelle il y eut peu de chose à changer pour la faire cadrer avec les points déterminés par les voyages que rapportoit M. de l'Isle.

M. Buache, revint en 1752 sur cette matière & présenta son système sous un plus grand jour, il fit voir dans un assez grand détail les chaînes de montagnes & les différens bassins qu'elles forment sur la terre & dans la mer. En suivant sur un globe la suite de ces chaînes, on voit qu'elles servent d'une part à rendre le globe plus solide, qu'elles partagent les eaux de la mer en plusieurs bassins, qu'elles domptent leur trop grande agitation, & qu'enfin les crêtes & les plateaux des montagnes terrestres, servent à recueillir les eaux douces qui doivent former les rivières; cette hypothèse si conforme

à la saine Physique, a été généralement adoptée & fait une époque dans l'histoire de la Géographie.

Les découvertes des Russes, rapportées par M. de l'Isle, avoient rappelé à M. Buache, ses anciennes Recherches sur toute cette partie du monde, il reprit le fil de ce travail, & se hâta d'en publier le résultat en 1753, en un vol. in-4.<sup>o</sup> sous le titre de *Considérations géographiques & physiques sur les nouvelles découvertes au Nord de la grande mer, appelée vulgairement mer du Sud, avec les cartes qui y sont relatives.*

Les découvertes des Russes & celles de l'Amiral espagnol, font partie de cet ouvrage, mais elles n'en font que partie, M. Buache les avoit analysées & les avoit comparées à une grande quantité de passages de différens Auteurs, que sa vaste lecture lui fournissoit avec abondance, & il en avoit su tirer des conclusions qui lui donnoient l'état de la partie septentrionale de la mer du Sud, de sa communication avec la mer glaciale, & des connoissances très-étendues sur le Nord-ouest de l'Amérique & le Nord-est de l'Asie. On ne peut sur-tout s'empêcher d'admirer avec quelle adresse il trouve moyen de concilier les contradictions qui se trouvent entre les récits de ceux qui ont cherché à découvrir les terres d'Yeço, & les autres Isles qui sont au Nord du Japon; la solution de cette difficulté, est que les uns & les autres ne parlent pas du même objet, & qu'on avoit confondu l'*Yeço gasima* ou l'île d'Yeço, avec ce que les Japonnois nomment *oku-Yeço* ou haut-Yeço, qui n'est autre chose que le Kamtchatka.

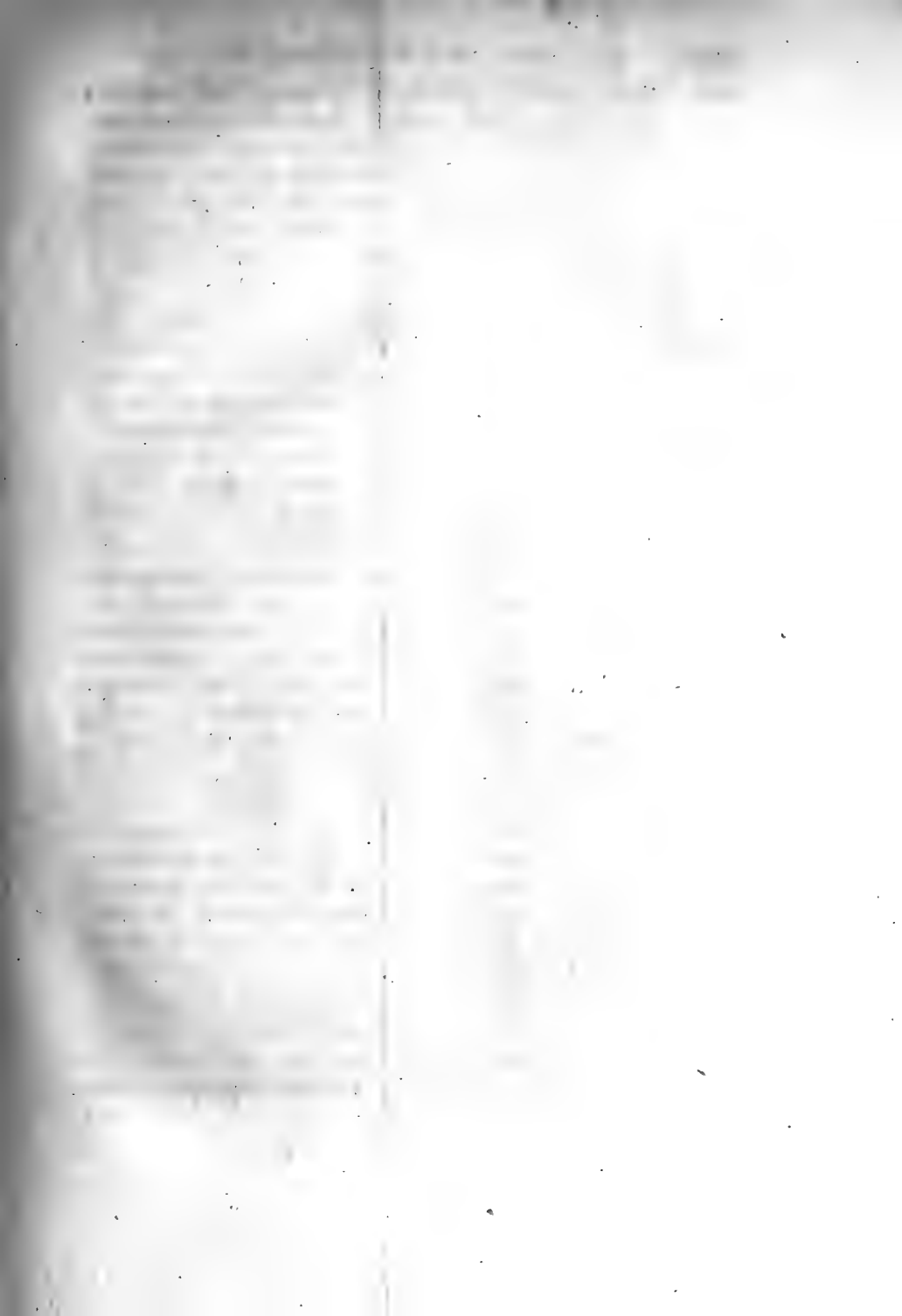
Du Nord de l'Amérique & de l'Asie, il revient à la Californie, on doutoit avec quelque fondement, que cette péninsule fût attachée à la terre du continent, un flux venant du Nord, qu'on rencontroit en entrant dans la mer Vermeille, sembloit indiquer un passage au fond de ce golfe, M. Buache, en donna l'explication, en faisant voir par la relation d'un Voyageur qui avoit fait naufrage à la côte occidentale de la Californie, & par une Carte espagnole, qui est à la Bibliothèque du Roi, que vers le milieu de la longueur

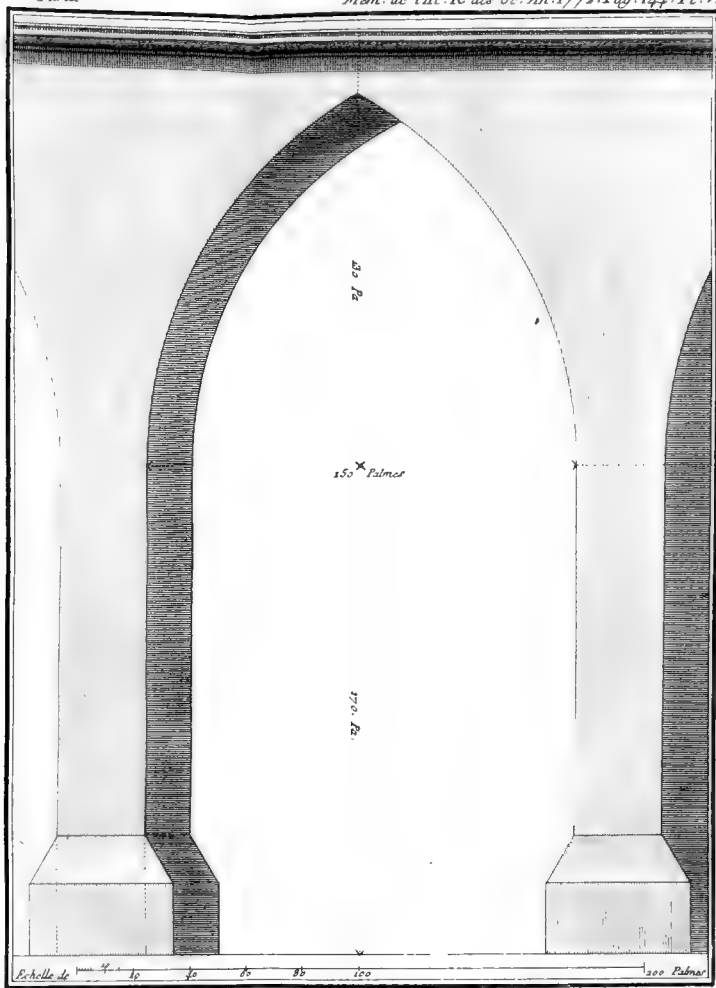
de cette péninsule , elle se rétrécit tellement & que le terrain en devient si bas , qu'il est couvert à toutes les hautes marées , en sorte que dans l'espace d'un jour , la partie méridionale de la Californie , est tantôt île & tantôt presqu'île ; presqu'île à jamais mémorable dans les fastes de l'Académie , par le dépôt qu'elle contient des cendres de feu M. l'abbé Chappe , qui y mourut en 1769 , après y avoir fait l'observation du dernier passage de Vénus sur le Soleil.

L'article de la mer de l'Ouest , ce vaste golfe , que toutes les relations s'accordent à placer au Nord de la Californie & du nouveau Mexique , n'y est pas traité avec moins de soin ; M. Buache y rapporte toutes les conjectures qui en indiquent l'existence , il les rapproche , les discute & en forme un corps de preuves qui ne semble rien laisser à desirer sur cette matière , il y joint ses propres idées sur la jonction de cette mer avec le Nord-ouest de la baye d'Hudson , & les relations de quelques traversées qui ont été faites de la mer du Sud en Europe , soit par cette mer , soit par le détroit du Nord.

Cet ouvrage fut reçu du Public avec le plus grand applaudissement , & M. Buache a eu le plaisir de voir confirmer par la suite plusieurs conjectures qu'il n'avoit avancées que sur la foi de son système. Ce même système ou plutôt ses applications , lui fournissoient encore la matière de deux Mémoires qu'il lut à l'Académie en 1755 & en 1757 ; le premier est une espèce d'explication d'une Carte envoyée à M.<sup>rs</sup> Cassini & Maraldi , par M. Struick , ou du moins de la partie de cette carte , qui concerne la terre des *Papous* ou *Papoas* , il y joint tout ce que les journaux des Navigateurs & les relations des Voyageurs ont donné sur cette partie du monde ; on est étonné de l'art avec lequel il fait disposer tous ces matériaux , pour en faire un système géographique , qui jusqu'ici , a été confirmé par les nouvelles découvertes des Navigateurs françois & anglois qui ont parcouru ces mers ; on l'est encore plus , en voyant dans le second Mémoire , avec combien d'intelligence il saisit quelques







quelques observations répandues dans les relations des Voyageurs, pour former à l'aide de son système physique, un projet de Carte de toute la partie australe de notre Globe & de la Mer glaciale qu'il y suppose, & pour donner à ce projet toute la vraisemblance dont il est susceptible. En lisant ce Mémoire, on se sent porté à croire, qu'un grand nombre des conjectures qu'il contient, seront un jour confirmées par les découvertes qu'on fera dans cette partie du monde: l'art de combiner poussé à un certain point, devient une espèce de divination.

Non-seulement M. Buache avoit proposé en général le système des bassins formés par les chaînes de montagnes, mais il l'avoit encore détaillé dans un Mémoire qu'il lut en 1753, sous le titre de *Parallèle des fleuves des quatre parties du Monde*, dans lequel cependant il ne donne que ceux d'Europe, il y fait voir d'un seul coup-d'œil, tout le terrain qui fournit les eaux à chacun de ces fleuves, & les hauteurs qui en séparent les bassins: ce travail dont il n'a pas publié la suite, parut si utile à feu M. Bignon, alors Prévôt des Marchands, qu'il crut devoir engager M. Buache, à en faire un semblable, mais dans un plus grand détail pour le cours de la Seine; il le communiqua en 1767 à l'Académie, & non-seulement il donna dans le plus grand détail le cours de ce fleuve, mais il joignit à ce travail tout ce qui pouvoit tendre à faciliter ou à multiplier les usages de cette Carte; il en dressa une seconde, où le cours de la Seine & celui des rivières affluentes étoit redressé, pour pouvoir en mesurer plus facilement l'étendue; il y joignit une espèce de Carte, dans laquelle il avoit trouvé moyen de présenter les plus grandes & les moindres eaux de la Seine à Paris, observées de mois en mois, pendant trente-cinq ans, & termina ce Mémoire par un grand nombre de vues nouvelles & intéressantes.

Le temps destiné à la lecture de cet Éloge, ne nous permet pas de parler ici de plusieurs autres Cartes que M. Buache avoit publiées, comme la partie méridionale des côtes de Terre-neuve, avec les changemens qu'il avoit cru devoir

faire aux meilleures Cartes de cette partie du monde, une Carte de l'archevêché & de l'élection de Paris, avec un plan des environs, qui n'étoit que l'essai d'un travail semblable qu'il vouloit faire pour tout le royaume, plusieurs Cartes qu'il a dressées pour être jointes aux Mémoires de M. Guettard, dans lesquelles il marque toutes les divisions en bandes du terrain, relatives aux idées de ce célèbre Naturaliste, sur la Minéralogie; les Cartes manuscrites qu'il dressa pour M.<sup>rs</sup> les abbés de la Caille & Chappe, lors de leurs voyages; celles qu'il fit pour feu M. le comte de Caylus, & qui servent à faciliter l'intelligence des sept volumes du Recueil d'Antiquités de ce Seigneur: le mérite de tous ces ouvrages, qui suffiroit pour illustrer un Géographe ordinaire, disparoît devant la grandeur & l'étendue des recherches & des vues de M. Buache, & ne feroit, s'il m'est permis d'user de ce terme, qu'un Infinitement petit de sa gloire, si ces mêmes ouvrages n'étoient en même temps une preuve de son attachement pour l'Académie & de son zèle pour le bien public.

Ce même zèle l'engagea souvent à des travaux longs & pénibles, qui tendoient uniquement à cet objet. Les États de Languedoc voulant avoir une Carte de la province, extrêmement détaillée, en firent lever séparément tous les Diocèses; sur la réputation de M. Buache, ils le prièrent de mettre ces matériaux en œuvre, & il y consentit; mais avant que de s'en servir, il les examina soigneusement, & reconnut le peu d'exactitude d'une partie considérable de ces Cartes; voulant cependant en ménager les Auteurs, il avoit entrepris de les corriger, de concert avec eux, ce qui demandoit beaucoup de temps, & les États le pressoient: il prit le parti de publier le seul diocèse de Narbonne, avec les changemens qu'il avoit été obligé d'y faire; alors la cause de son retardement ne fut plus un mystère, & les États lui marquèrent la satisfaction qu'ils avoient de son travail, par une gratification de cinq mille livres, &, ce qui étoit bien plus de son goût, par les remerciemens les plus flatteurs.

L'établissement d'une Colonie Françoisé dans la Guyane,

fournit à M. Buache l'occasion de faire plusieurs autres recherches ; il rassembla toutes les connoissances qu'il put avoir sur cette partie de l'Amérique, & dressa quarante-cinq Cartes manuscrites, pour l'usage du Ministre, & pour celui de M. Turgot, Membre de cette Académie, nommé Gouverneur de cette Colonie.

Les Sciences ont presque toutes leurs énigmes : au nombre de celles de la Géographie, se trouvoit une Carte de l'étendue de l'empire Romain, depuis Constantinople jusqu'à l'Océan, & depuis les côtes d'Afrique jusqu'au Nord de la Gaule ; cette Carte connue communément sous le nom de *Peutinger*, l'un de ses anciens possesseurs, avoit acquis une espèce de célébrité par sa construction singulière ; les dix-huit degrés de longitude qu'elle contient, y occupent une étendue de plus de vingt pieds, tandis que les treize degrés de latitude qui devroient en occuper quatorze, n'en occupent qu'un ; aussi les pays représentés par cette Carte, sont-ils tellement défigurés, que la Méditerranée n'y paroît que comme une grosse rivière, & que les terres n'y sont pas plus reconnoissables.

La plupart des Géographes n'avoient regardé cette bizarre représentation de l'empire Romain, que comme l'ouvrage grossier de quelqu'ignorant : on fait combien ces Maîtres du Monde avoient négligé l'étude des Sciences & des Arts. Un seul Géographe Anglois, *Edmond Bruz*, lui avoit fait l'honneur de la regarder comme un de ces ouvrages de perspective, qui veulent être vus d'un point déterminé ; il n'avoit cependant pas encore trouvé le mot de l'énigme, il étoit réservé à M. Buache de le donner, & il le donna en effet à l'Académie en 1761, dans un Mémoire où il fit voir que cette Carte étoit une Carte plate, construite sur deux échelles, celle des Longitudes fort grande, & celle des Latitudes beaucoup plus petite ; qu'on y avoit négligé de rendre les Méridiens perpendiculaires au bas de la Carte, & que, vraisemblablement, cette singulière construction tenoit à ce que la Carte n'étant destinée qu'à servir d'itinéraire pour les Troupes, dont les Routes s'étendoient beaucoup plus de l'Est

à l'Ouest, que du Nord au Sud : on avoit prétendu la rendre plus portative, sans diminuer beaucoup son utilité. Telle fut l'explication très-vraisemblable que donna M. Buache de ce Sphinx géographique.

Le dernier travail suivi de M. Buache, & qui l'occupa depuis 1756 jusqu'en 1771, est celui qu'il fut chargé de faire pour l'institution des jeunes Princes; ce travail commença par une suite de Cartes propres à faciliter l'intelligence de l'Histoire des premiers âges du Monde, & à faire voir la marche & la suite des premières populations. Ce fut à cette occasion qu'il communiqua à l'Académie une Mappemonde manuscrite qui devoit servir comme d'introduction à cette suite, & dans laquelle l'Amérique occupoit l'hémisphère qu'on fait ordinairement occuper au Continent, qui contient l'Europe, l'Afrique & l'Asie; il construisit plus de trois cents Cartes particulières, les unes entièrement terminées, & les autres simplement au trait, pour être remplies par les jeunes Princes, à mesure qu'ils recevroient leurs leçons de Géographie : méthode excellente pour l'étude de cette science, & M. Buache en étoit si persuadé, qu'il avoit résolu de faire graver des Cartes pareilles, pour servir à l'instruction des Elèves de l'École Royale Militaire; ce fut par-là que M. Buache prit, pour ainsi dire, congé de la Géographie; son dernier Ouvrage fut une marque de son attachement pour le Roi & pour son auguste Famille.

Jusqu'ici nous n'avons représenté M. Buache que comme Géographe, & c'étoit en effet la principale partie de son mérite, mais ce n'étoit pas la seule; ce que nous avons dit de ses Ouvrages sur l'inondation de la Seine, & ses idées sur la nappe d'eau souterraine qui fournit les puits, ont dû faire voir que les observations de Physique, & l'art d'en déduire les procédés de la Nature, ne lui étoient nullement étrangers : il avoit fait, sur les tremblemens de terre, un travail très-considérable, qui a été remis par sa famille à l'Académie; il étoit au fait de presque toutes les Sciences qui font l'objet des occupations de cette Compagnie, & il y a été souvent

chargé de commissions très-étrangères à la Géographie ; en un mot, son amour pour l'Académie ne lui avoit pas permis de négliger aucun des objets qui s'y traitent, & il étoit du nombre de ceux qui prennent part à tous ses travaux.

Plus de soixante années de travaux assidus, & l'âge auquel étoit parvenu M. Buache, ne pouvoient manquer d'abattre, à la fin, une santé par elle-même très-délicate, & qui ne s'étoit jusque-là soutenue que par le régime le plus sévère.

Dans cet état, deux saignées qu'on fut obligé de lui faire en un même jour, en 1771, ébranlèrent tellement sa machine, qu'à la seconde, il s'écria qu'on l'avoit tué. Il revint cependant de cette maladie, mais sans pouvoir reprendre ses forces, & la tête extrêmement affoiblie ; son esprit qui avoit autrefois osé assigner les causes de l'arrangement des montagnes, & sonder les abymes de la mer, étoit affaibli & comme anéanti sous le débris des organes ; le corps seul, s'il m'est permis de m'exprimer ainsi, sembloit lui survivre ; il végéta encore dans cet état environ dix-huit mois, & mourut presque sans aucune souffrance le 27 Janvier 1773, âgé de près de soixante-treize ans, dont il en avoit passé quarante-trois dans l'Académie.

M. Buache étoit d'une taille médiocre, & d'une figure peu avantageuse, il étoit doux, humain, & toujours prêt à obliger dès que l'occasion s'en présentoit ; aussi n'a-t-il jamais compté que des amis dans tous ceux qui le connoissoient ; l'ambition & l'amour de la gloire, qui savent souvent pénétrer jusque dans l'ame même des Sages, n'ont jamais troublé un seul moment la tranquillité de la sienne ; content de remplir ses devoirs, dans la seule vue de les remplir, il a mérité l'estime & les louanges de la postérité, sans se les être trop proposées pour objet. Nous avons dit au commencement de cet Éloge, qu'il avoit épousé en 1729, la fille de M. de l'Isle, mais l'ayant perdue peu d'années après, il épousa en 1746, Élisabeth-Catherine de Miremont, aujourd'hui sa Veuve, belle-sœur de M. Pitrou, qui avoit été son premier maître ; la reconnoissance avoit formé les nœuds de ses deux mariages,

n'en n'ayant pas eu d'enfans , il avoit pris avec lui deux jeunes gens de ses parens qui l'ont aidé pendant quinze ans dans les travaux ; & nous croyons que le Public apprendra avec plaisir que son fonds de Cartes Géographiques , & sa belle Collection de Mémoires ont passé à l'un d'eux , M. Buache de la Neuville , bien connu de l'Académie par les Éléments de Géographie qu'il a soumis à son examen , & auxquels elle a accordé son approbation. Personne n'étoit plus en état que lui de faire un bon usage de cette précieuse Collection.

La place de premier Géographe du Roi , & celle de Géographe qu'il occupoit dans l'Académie , ont été remplies par M. d'Anville , de l'Académie Royale des Belles - Lettres , Associé-Étranger de celle de Pétersbourg , & Secrétaire ordinaire de S. A. S. Monseigneur le Duc d'Orléans.





---

*CORRECTIONS & ADDITION aux Mémoires de M. de la Place,  
insérés dans ce Volume.*

*PAGE 336, ligne dernière, au lieu de  $b$ , lisez  $(b)$ .*

*Page 337, ligne première, au lieu de  $b_1$ , lisez  $(b_1)$ .*

*Page 535, avant ces mots, un avantage particulier, &c. ajoutez :*

De-là naît une manière extrêmement simple de présenter cette Méthode & son usage dans l'Astronomie physique. Les différens Problèmes de cette branche importante des Mathématiques, conduisent presque toujours à des équations différentielles du second ordre, dont l'intégration rigoureuse offre des difficultés insurmontables. On est donc réduit à faire usage des méthodes d'approximation ; or, il arrive souvent que les intégrales approchées sont composées de quantités, les unes périodiques, & les autres croissantes proportionnellement au temps & à ses puissances. Dans celles-ci, le temps est multiplié par un coefficient très-petit, en sorte que chaque variable est donnée par une suite infinie de termes, qui renferme ce produit, son quarré & ses puissances supérieures. Ces suites peuvent être employées durant un espace de temps assez considérable, après lequel elles deviennent divergentes, & par conséquent fautives ; mais on doit observer que les termes proportionnels au temps & à ses puissances, ne sont que le développement de fonctions algébriques ou transcendentes que renferme l'intégrale rigoureuse ; ainsi toute la difficulté se réduit à déterminer ces fonctions. Pour cela, je suppose que l'intégrale commence lorsque le temps est égal à une constante quelconque arbitraire  $T$ , on aura, par les méthodes ordinaires d'approximation, l'intégrale exprimée par une suite infinie qui renferme les différentes puissances du temps  $t$ , écoulé depuis l'origine de l'intégrale. Présentement, si l'on avoit l'intégrale rigoureuse, en réduisant les fonctions dont je viens de parler, en suites ascendantes par rapport à  $t$ , il est clair que l'on auroit une nouvelle suite qui coïncideroit avec la première ; or, en réduisant en suites une quelconque de ces fonctions, le premier terme est égal à la fonction elle-même, dans laquelle on suppose le temps égal à  $T$  ; & le second terme est égal à  $t$ , multiplié par la différentielle de la fonction divisée par  $dt$ , & dans laquelle on suppose ensuite le temps égal à  $T$  ; or, il est clair que cette différence divisée par  $dt$ , est la même chose que la

différence du premier terme considéré comme fonction de  $T$ , & divisée par  $\partial T$ ; donc, pour avoir la fonction cherchée, il faut égaler le coefficient de  $t$ , donné par les méthodes ordinaires d'approximation, à la différence du terme constant, considéré comme fonction de  $T$ , divisée par  $\partial T$ ; par exemple (*art. I des Recherches citées*), l'intégrale approchée de l'équation  $\frac{\partial y}{\partial t} + y = \alpha y \cdot \cos. 2t$ ,  $\alpha$  étant supposé fort petit, est

$$y = (p + \frac{\alpha}{4} q t) \cdot \sin. t + (q + \frac{\alpha}{4} p t) \cdot \cos. t \\ - \frac{\alpha p}{16} \cdot \sin. 3t - \frac{\alpha q}{16} \cdot \cos. 3t + \&c.$$

en regardant  $p$  &  $q$  comme fonctions de  $T$ , on aura donc les deux équations

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\alpha}{4} \cdot q \\ \frac{\partial q}{\partial T} = \frac{\alpha}{4} \cdot p;$$

d'où en intégrant on aura,

$$p = f.e \frac{\alpha}{4} T + 'f.e - \frac{\alpha}{4} T$$

$$q = f.e \frac{\alpha}{4} T - 'f.e - \frac{\alpha}{4} T$$

$f_x$  &  $'f$  étant deux nouvelles constantes arbitraires; si l'on change dans ces valeurs de  $p$ , & de  $q$ ,  $T$  ou  $t$ , on aura les fonctions dont le développement a produit dans la valeur de  $y$ , les termes proportionnels au temps; on pourra donc en effacer ces termes, pourvu qu'au lieu de  $p$  & de  $q$ , on y substitue ces nouvelles valeurs, & l'on aura

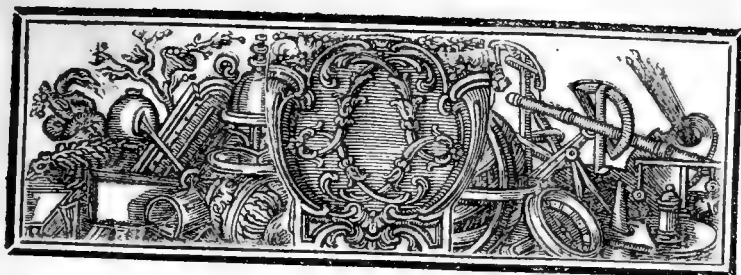
$$y = f.e \frac{\alpha}{4} t \cdot [\sin. t + \cos. t - \frac{\alpha}{16} \cdot \sin. 3t - \frac{\alpha}{16} \cdot \cos. 3t] \\ + 'f.e - \frac{\alpha}{4} t \cdot [\sin. t - \cos. t - \frac{\alpha}{16} \cdot \sin. 3t + \frac{\alpha}{16} \cdot \cos. 3t].$$

Page 543, ligne 21, au lieu de  $\varphi'(\theta)$  & de  $\varphi(\theta)$ , lisez  $\varphi'(\cos. \theta)$  &  $\varphi(\cos. \theta)$ .

Lû à l'Académie le 20 Novembre 1776.



MÉMOIRES




M É M O I R E S  
D E  
M A T H É M A T I Q U E  
E T  
D E P H Y S I Q U E,  
T I R É S D E S R E G I S T R E S  
*de l'Académie Royale des Sciences.*  
Suite de l'Année M. D C C L X X I I.

---

S U R L A  
P E S A N T E U R S P É C I F I Q U E D E S C O R P S.  
*Premier Mémoire.*

Par M. B R I S S O N.

 A connoissance des pesanteurs spécifiques des différens corps de la Nature, en est une toujours utile, & très-souvent nécessaire aux Physiciens. C'est ce qui a déterminé plusieurs Savans à former des Tables de ces pesanteurs, afin qu'on pût y avoir recours au besoin.  
*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

A

La science dont je m'occupe exige cette connoissance plus que toute autre : j'ai donc souvent consulté ces Tables, & surtout celle de M. Musschenbroek, qui est une des plus amples. Mais dans plusieurs circonstances, n'ayant pas eu des résultats conformes aux pesanteurs indiquées par ces Tables, j'y ai soupçonné quelques erreurs; cela m'a engagé à les examiner plus scrupuleusement : cet examen m'y a fait découvrir plus d'erreurs que je n'en avois soupçonné, & dès-lors j'ai cessé de les attribuer, comme je l'avois fait d'abord, à des fautes d'impression; elles sont trop nombreuses pour cela. Mais connoissant d'ailleurs l'exactitude de M. Musschenbroek, cela me fait croire qu'il n'a pas travaillé seul à ses Tables, & qu'il s'en est rapporté à d'autres sur beaucoup d'objets, ou du moins qu'il a opéré sur de trop petits volumes. Cette justice que je crois lui devoir, ne rend pas ses Tables plus exactes : & comme j'éprouve tous les jours l'utilité dont elles peuvent être, je me suis déterminé à en former une, à laquelle je donnerai le plus d'exactitude & le plus d'étendue qu'il me sera possible.

Il y a déjà long-temps que j'ai commencé à y travailler. J'avois bien pensé que c'étoit un ouvrage de longue haleine; mais j'avoue que je ne l'avois pas cru aussi pénible, & exigeant autant de précautions pour obtenir de l'exactitude. Ce n'est pas que la difficulté me rebute; au contraire, elle me donne plus d'ardeur, & me fait prendre tous les soins que je crois nécessaires pour réussir. L'Académie jugera des précautions dont j'ai fait usage; & si elle pense que j'aie manqué à quelqu'une, je la supplie de m'aider de ses conseils, dont je profiterai avec reconnaissance, non-seulement pour ce qui me reste à faire, mais encore pour rectifier ce que j'ai déjà fait.

Mon intention est de ne faire entrer dans cette Table que les matières que j'aurai éprouvées moi-même; mais toutes celles qui seront susceptibles d'être mises à l'épreuve, & que j'aurai pu me procurer. Toutes mes expériences sont faites sur les plus gros volumes possibles, afin que s'il s'y glisse quelques petites erreurs, presqu'inévitables en pareil cas, elles soient

moins sensibles. Elles sont aussi toutes faites à la même température, qui est marquée par 14 degrés au-dessus de la congélation du thermomètre de M. de Reaumur; & j'ai fait en sorte que la température du lieu où j'opérois ne différât pas beaucoup de celle-ci, afin que celle dont j'avois besoin pût demeurer plus long-temps la même. Je pèse tous les corps hydrostatiquement, à moins qu'ils ne soient susceptibles de se dissoudre dans l'eau, ou de s'en laisser pénétrer. Quand je ne puis pas les peser ainsi, je prends les précautions que je crois convenables aux circonstances, & que je détaillerai chacune en leur place, pour mettre tous les Physiciens à portée de vérifier mes épreuves, si bon leur semble.

Je me suis procuré deux balances hydrostatiques très-exactes, dont les fléaux sont suspendus par leur centre de gravité, & dans lesquels les points de suspension des bassins sont invariables. Le fléau de la plus grande a 16 pouces de long, & trébuche bien sensiblement à  $\frac{1}{8}$  de grain lorsqu'elle est chargée. Avec cette balance je pèse jusqu'à une livre dans chaque bassin. Je ne me permets pas de la charger davantage, de peur de faire plier le fléau ou d'occasionner trop de frottement à l'axe; ce qui diminueroit sa mobilité. Le fléau de la plus petite n'a que 6 pouces & demi de long; malgré cela, il trébuche sensiblement à  $\frac{1}{64}$  de grain. Je ne le charge jamais de plus de deux onces dans chaque bassin; ainsi cette balance est destinée à peser les matières qu'on ne peut se procurer qu'en petit volume; & la grande sert à peser toutes celles qu'on peut avoir en grand volume.

Pour peser les liqueurs, je me sers d'un aréomètre de verre, de la forme de celui de Fahrenheit; c'est-à-dire, dont la tige, qui est fort courte, est surmontée d'un petit bassin propre à recevoir des poids étalonnés avec la plus grande exactitude. Je me suis assuré du poids exact de l'instrument, & en le chargeant de nouveaux poids, je le fais enfoncer toujours de la même quantité dans toutes les liqueurs; de cette manière j'opère toujours sur des volumes égaux, & la différence du poids me donne celle des pesanteurs spécifiques; car l'on sait

que la pesanteur spécifique d'un corps est le poids qu'il pèse sous un volume déterminé; & que les pesanteurs spécifiques des différens corps, comparées entr'elles, sont toujours proportionnelles aux poids que pèsent des volumes égaux de ces matières.

On courroit risque de faire faire la bascule à un aréomètre qui seroit trop chargé par le haut : par exemple, un aréomètre assez léger pour ne pas se noyer dans une liqueur peu dense, comme l'esprit-de-vin, exigeroit une très-grande addition de poids, pour s'enfoncer de la même quantité dans une liqueur très-dense, comme les acides concentrés ; ce qui seroit remonter de beaucoup son centre de gravité, & lui seroit faire la bascule. Le même instrument ne peut donc pas servir pour éprouver toutes les liqueurs ; c'est pourquoi je m'en suis procuré plusieurs, dont un me sert à éprouver, depuis l'eau inclusivement, jusqu'aux liqueurs les plus légères : un autre, qui sans addition de poids, s'enfonce dans l'eau presque jusqu'à sa tige, sert à éprouver les liqueurs plus pesantes que l'eau, excepté quelques-unes, qui, comme, par exemple, l'acide vitriolique concentré, ont une pesanteur spécifique, à peu-près double de celle de l'eau. Pour celle-ci, j'ai un troisième aréomètre, dont la tige & le centre du bassin sont percés. Moyennant cela les poids dont je le charge, passent dans la partie inférieure, & il demeure toujours droit. Cela exige seulement une opération de plus, savoir ; de repeser à chaque fois l'instrument, avec tout ce que je lui ai ajouté, pour le faire enfoncer de la quantité requise.

Cet Ouvrage est d'un si grand détail, & exige un si long temps pour l'amener à sa fin, que je n'ai pas cru devoir attendre qu'il fût achevé, pour le communiquer à l'Académie. C'est pourquoi je l'ai divisé en plusieurs articles, que je donnerai séparément ; & à la fin de mon travail, de tous les résultats je formerai une table rangée par ordre alphabétique, pour fournir aux Physiciens la manière la plus commode de la consulter au besoin.

Dans le premier article, je traite des Métaux considérés

sous tous les aspects & de toutes les manières dont ils sont d'usage dans le commerce & les arts.

Le second article contiendra les demi Métaux, & les autres matières métalliques qui sont susceptibles d'être mises à l'épreuve.

Dans le troisième article, je traiterai des Pierres précieuses, des Cristaux & des différentes espèces de Verre.

Dans le quatrième, je ferai entrer les Agates, les Jaspes, les Porphyres, &c. les Marbres & les Pierres communes.

Le cinquième traitera des Bois, des Gommess & des Résines.

Le sixième contiendra les Cornes, les Écailles & autres Matières animales.

Enfin le septième contiendra les Liqueurs.

Je terminerai cet Ouvrage par une Table du poids du ponce cube de chacun de ces matières.

Je compare les pesanteurs spécifiques de tous ces corps, à celle de l'eau de pluie ou de l'eau distillée, de laquelle je suppose que le pied-cube pèse 70 livres; & je suppose toujours que le volume d'eau qui sert de terme de comparaison, pèse 10000.

L'eau de pluie dont il faut se servir en pareil cas, n'est pas celle qui a passé par-dessus les toits; elle n'est pas pure, à beaucoup près. Pour l'avoir dans l'état de pureté convenable, il faut la recevoir immédiatement du nuage, dans de grands vases isolés, de fayence ou de verre, & la laisser ensuite pendant quelque temps exposée à l'air, afin qu'elle perde les matières volatiles qu'elle pourroit contenir. Il faut même, pour plus grande sûreté, ne pas faire usage de celle de la première ondée qui tombe; après un certain temps de sécheresse, elle est sûrement moins pure que celles des ondées suivantes. A l'égard de l'eau distillée, il faut faire usage, de préférence, de l'eau de rivière que l'on distille au bain-marie: s'il passe dans la distillation quelques matières étrangères, elles seront volatiles, & se dissiperont aisément, en laissant pendant quelque temps l'eau distillée exposée à l'air: ce qui demeurera sera de l'eau pure.

Je crois devoir avertir que je n'ai déterminé la pesanteur spécifique d'aucune matière, qu'après l'avoir éprouvée sur plusieurs morceaux différens, & même plusieurs fois sur le même morceau ; & je n'ai regardé le résultat comme exact, que lorsque ces différentes épreuves, ou ne m'ont point donné de différences, ou m'en ont donné de si petites, que j'ai cru pouvoir les négliger.

## A R T I C L E   P R E M I E R.

### *De la pesanteur spécifique des Métaux.*

Les Métaux forment une classe de corps, dont il paroît qu'il est le plus important de connoître les pesanteurs spécifiques. Ils sont d'un si fréquent usage dans le commerce, & sont employés dans les Arts de tant de manières différentes, qu'il est très-intéressant pour nous de connoître leur état & leur valeur réelle ; or, cet état & cette valeur peuvent se connoître par leur pesanteur spécifique. L'or & l'argent, par exemple, lorsqu'ils sont alliés avec quelques autres métaux d'une moindre valeur, n'ont jamais une pesanteur spécifique si grande, que lorsqu'ils sont purs, si l'on en excepte le cas où l'argent seroit allié avec le plomb ou le mercure : & leur pesanteur spécifique varie suivant les différentes substances & les différentes quantités qui leur sont alliées. L'écroui fait aussi varier leur densité, ainsi que celle de presque tous les autres métaux. J'ai donc éprouvé ces métaux dans tous les états de pureté & d'alliage permis dans le commerce ; d'où je crois pouvoir conclure que toute autre pesanteur spécifique, sensiblement différente de celles qu'indiquent mes Tables dans ces différens états, sera une marque certaine d'erreur.

J'ai considéré sous les mêmes points de vue tous les autres métaux.

De plus, je ferai voir dans la suite de ce travail que la connoissance de la pesanteur spécifique des corps peut en procurer beaucoup d'autres très-intéressantes en Physique.



*De l'Or.*

J'ai éprouvé l'or; 1.<sup>o</sup> très-pur & sans aucun alliage; 2.<sup>o</sup> allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris; 3.<sup>o</sup> allié au titre de la Monnoie de France; 4.<sup>o</sup> allié au titre des bijoux; & j'ai éprouvé ces différentes sortes, 1.<sup>o</sup> n'étant que simplement fondues, 2.<sup>o</sup> étant bien écrouies.

L'or pur, ou à 24 karats, m'a été procuré par M. Tillet, qui me l'a fait fournir par M.<sup>rs</sup> du bureau des Affinages de la Monnoie. J'avois désiré, pour en avoir un morceau bien plein & sans soufflures, qu'on le fit fondre dans un petit creuset neuf, & qu'au lieu de le couler en lingot, on le laissât refroidir lentement dans le creuset pour en former un culot; mais cette opération n'a pas pu réussir: on l'a fondu jusqu'à sept fois, & toutes les fois le culot s'est trouvé rempli de soufflures. J'ai donc pris le parti d'en choisir des morceaux qui ont paru les plus pleins, dans les grands lingots que l'on coule au bureau des Affinages, & qui pèsent quelquefois jusqu'à 40 marcs. M. Tillet m'en a procuré plusieurs, entre lesquels j'ai trouvé des différences si petites qu'elles peuvent être réputées zéro. Ces Messieurs du bureau des Affinages se sont prêtés à tout cela de la meilleure grâce du monde; & je ne puis que me louer de leur complaisance.

Le morceau d'or sur lequel j'ai compté le plus, pesoit 1 marc 1 once 5 gros 69 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 5613 grains  $\frac{3}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 3 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 291 grains  $\frac{1}{2}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 19258 : 1000, ou, plus exactement :: 192581 : 10000. Un autre morceau pesoit 1 marc 5 onces 5 gros 55 grains  $\frac{7}{8}$ , ou 7903 grains  $\frac{7}{8}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 5 gros 50 grains  $\frac{7}{16}$ , ou 410 grains  $\frac{7}{16}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 19257 : 1000, ou plus exactement :: 192572 : 10000; ce qui fait environ  $\frac{1}{20000}$  de différence, laquelle peut être comptée pour rien. Il suit de-là que le pouce cube d'or pur, pèse 1 marc 4 onces 3 gros 62 grains, & le pied cube pèse 1348 livres 1 once 0 gros 41 grains.

Un morceau du même or, écroui autant qu'il a été possible à coups de marteaux, & qui pesoit 1 marc 0 once 4 gros 2 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 4898 grains  $\frac{1}{2}$ , a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 37 grains, ou 253 grains; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 19362 : 1000, ou plus exactement :: 193617 : 10000; sa densité a donc été augmentée par l'écroui d'environ  $\frac{1}{186}$ . Ainsi le ponce cube de l'or pur ainsi écroui pèse 1 marc 4 onces 4 gros 28 grains, & le pied cube pèse 1355 livres 5 onces 0 gros 60 grains.

Pour savoir si l'or étoit écroui autant qu'il pouvoit l'être, après l'avoir écroui & pesé, pour reconnoître sa pesanteur spécifique, je l'ai écroui & pesé de nouveau, & je n'ai cessé cette opération que lorsque sa densité a cessé d'augmenter par ce procédé. J'ai fait la même chose à l'égard des autres métaux, soit simples, soit alliés.

J'ai ensuite éprouvé les différentes espèces d'or allié, qui sont en usage dans le commerce; savoir l'or allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, l'or allié au titre de la monnoie de France, & l'or allié au titre des bijoux.

L'or allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, doit être à 22 karats, c'est-à-dire qu'il doit y avoir 22 parties d'or & 2 parties d'alliège.

L'or allié au titre de la Monnoie de France, doit être aussi à 22 karats; mais on permet  $\frac{10}{32}$  de karat de remède; ainsi, il peut y avoir, & il s'y trouve ordinairement 694 parties d'or & 74 parties d'alliège, ou plus simplement 347 parties d'or & 37 parties d'alliège.

L'or des bijoux doit être à 20 karats; c'est-à-dire, qu'il doit y avoir vingt parties d'or & quatre parties d'alliège, ou plus simplement cinq parties d'or & une partie d'alliège.

Le morceau d'or allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, ou à 22 karats de fin, qui a servi à mes épreuves, & qui m'a été fourni par M. Gavelles, Horloger & fabricant de boîtes de montres, pesoit 8 onces 0 gros 30 grains  $\frac{1}{4}$ , ou 4638 grains  $\frac{1}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 49 grains  $\frac{1}{4}$ , ou 265 grains  $\frac{1}{4}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie

pluie :: 17486 : 1000, ou plus exactement :: 174863 : 10000. Ainsi le pouce cube d'or allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, pèse 1 marc 3 onces 2 gros 48 grains, & le pied cube pèse 1224 livres 0 onces 5 gros 18 grains.

Nous avons dit que l'or allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, est composé de 22 parties d'or pur, & deux parties d'alliage, ou de cuivre rouge mesurant par le poids. Nous avons dit aussi que la pesanteur spécifique de l'or pur, est à celle de l'eau de pluie :: 192581 : 10000. Nous verrons ci-après que la pesanteur spécifique du cuivre rouge, est à celle de l'eau de pluie :: 77880 : 10000. Si donc nous supposons une masse d'or pur pesant 192581 grains, laquelle répondra par conséquent à un volume d'eau de pluie, pesant 10000 grains ; les  $\frac{22}{24}$  de cette masse d'or pèseront 176532 grains  $\frac{14}{24}$  ; & les  $\frac{2}{24}$  de cuivre rouge, que l'on y mêle pour l'allier, pèseront 16048 grains  $\frac{10}{24}$ . Si nous supposons de même une masse de cuivre rouge, égale en volume à une masse d'eau de pluie pesant 10000 grains, cette masse de cuivre pèsera 77880 grains, qui, divisés par 24, donnent 3245. Chaque vingt-quatrième de cette masse de cuivre, pèsera donc 3245 grains. Ainsi les 16048 grains  $\frac{10}{24}$  de cuivre, ajoutés à la masse d'or ci-dessus, feront, à très-peu de chose près, un volume de  $\frac{5}{24}$ . Par conséquent, le volume de la masse du mélange devroit être augmenté de  $\frac{3}{24}$  en sus ; au lieu de vingt-quatre parties en volume, il devroit donc y en avoir vingt-sept. Si nous divisons 192581 grains, poids du total par 27, le poids de chaque petit volume sera 7132 grains  $\frac{17}{27}$ . Si nous retranchons maintenant les poids de trois de ces volumes, qui font 21397 grains  $\frac{24}{27}$ , il ne restera pour le poids d'un volume de mélange, égal à un volume d'eau de pluie, pesant 10000 grains, que 17183 grains  $\frac{3}{27}$ . C'est effectivement ce que devroit peser un pareil volume d'or allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, si la densité du mélange demouroit proportionnelle aux densités particulières des métaux qui le constituent. Mais, suivant nos expériences, un pareil volume d'or, ainsi allié, pèseroit 174863 grains ; donc il y a une pénétration mutuelle de ces deux

métaux dans les pores l'un de l'autre, puisque la densité du mélange est augmentée.

Le même morceau d'or allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, éprouvé ci-dessus, après avoir été bien écroui, & après en avoir retranché quelques petites inégalités, qui auroient pu retenir quelques bulles d'air, lorsque je l'ai pesé dans l'eau, s'est trouvé peser 8 onces 0 gros 29 grains, ou 4637 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 47 grains  $\frac{5}{8}$ , ou 263 grains  $\frac{5}{8}$ ; ce qui donne la pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 17589 : 1000, ou plus exactement :: 175894 : 10000; donc la densité est augmentée par l'écroui d'environ  $\frac{1}{170}$ . Cela étant, le ponce cube de cet or pèse 1 marc 3 onces 3 gros 15 grains; & le pied cube pèse 1231 livres 4 onces 1 gros 2 grains.

L'or allié au titre de la Monnoie de France, ou à 21 karats  $\frac{23}{32}$  de fin, m'a encore été fourni par M.<sup>rs</sup> du Bureau des affinages de la Monnoie. J'en ai pris un morceau simplement fondu & coulé sans aucun écroui, qui pesoit 4 onces 6 gros 11 grains  $\frac{3}{8}$ , ou 2747 grains  $\frac{3}{8}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 2 gros 13 grains  $\frac{7}{8}$ , ou 157 grains  $\frac{7}{8}$ ; ce qui donne la pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 17402 : 1000, ou plus exactement :: 174022 : 10000. Ainsi le ponce cube d'or allié au titre de la Monnoie de France, pèse 1 marc 3 onces 2 gros 17 grains; & le pied cube pèse 1218 livres 2 onces 3 gros 51 grains.

La pesanteur spécifique de cet or ainsi allié, confirme ce que nous avons dit ci-dessus, savoir, qu'il y a pénétration mutuelle de l'or & du cuivre dans les pores l'un de l'autre; car dans ce mélange il y a  $\frac{694}{768}$  d'or pur, &  $\frac{74}{768}$  de cuivre rouge. Or, dans la supposition que nous avons faite plus haut, les 694 parties d'or pèseroient 174025 grains  $\frac{14}{768}$ ; les 74 parties de cuivre pèseroient donc 18555 grains  $\frac{74}{768}$ ; si, comme nous l'avons dit ci-dessus, une masse de cuivre rouge, égale en volume à une masse d'eau de pluie pesant 10000 grains, pèse 77880 grains, chaque 768.<sup>e</sup> de cette masse pèlera donc 101 grains  $\frac{312}{768}$ . Ainsi les 18555 grains  $\frac{74}{768}$

de cuivre rouge ajoutés à la masse d'or ci-dessus, feront, à très-peu de choses près, un volume de  $\frac{183}{768}$ . Par conséquent le volume de la masse du mélange devrait être augmenté de  $\frac{109}{768}$  en fus. Au lieu de 768 parties en volume, il devrait donc y en avoir 877. Si nous divisons 192581 grains, poids du total, par 877, le poids de chaque petit volume sera 219 grains  $\frac{518}{877}$ . Si nous retranchons maintenant les poids de 109 de ces volumes, qui font 23935 grains  $\frac{334}{877}$ ; il ne restera pour le poids d'un volume du mélange, égal à un volume d'eau de pluie pesant 10000 grains, que 168645 grains  $\frac{543}{877}$ . C'est en effet ce que devrait peser un pareil volume d'or, allié au titre de la Monnoie de France, si la densité du mélange demeurait proportionnelle aux densités particulières des deux métaux. Mais, suivant nos expériences, ce volume d'or pèse 174022 grains; donc la densité est augmentée; donc il y a pénétration.

Pour avoir l'or allié au titre de la Monnoie de France, écroui au point convenable, je me suis servi d'un double-louis, qui pesoit 4 gros 18 grains  $\frac{5}{8}$ , ou 306 grains  $\frac{5}{8}$ . Il a perdu dans l'eau de pluie 17 grains  $\frac{3}{8}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 17647 : 1000, ou plus exactement :: 176474 : 10000; d'où il suit que sa densité a été augmentée par la forte pression qu'il a éprouvée sous le balancier d'environ  $\frac{1}{71}$ . Ainsi le pouce cube de cet or pèseroit 1 marc 3 onces 3 gros 36 grains; & le pied cube pèseroit 1235 livres 5 onces 0 gros 51 grains.

J'ai été bien aise de comparer l'or de la Monnoie de France avec celui de la Monnoie d'Angleterre; pour cela, j'ai mis une Guinée à l'épreuve, elle pesoit 2 gros 13 grains  $\frac{2}{16}$ , ou 157 grains  $\frac{2}{16}$ ; elle a perdu dans l'eau de pluie 8 grains  $\frac{15}{16}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 17629 : 1000, ou plus exactement :: 176294 : 10000. Ainsi la pesanteur spécifique de l'or de la Monnoie de France est plus grande que celle de l'or de la Monnoie d'Angleterre, d'environ  $\frac{1}{980}$ .

L'or allié au titre des bijoux, ou à 20 karats de fin, m'a

été fourni par M. Gavélles, Horloger, & fabricant de boîtes de montres; c'étoit un morceau simplement fondu & coulé, sans aucun écroui, qui pesoit 1 marc 0 once 0 gros 20 grains  $\frac{1}{4}$ , ou 4628 grains  $\frac{1}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 6 grains  $\frac{5}{8}$ , ou 294 grains  $\frac{5}{8}$ ; ce qui donne la pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 15709 : 1000, ou :: 157090 : 10000. Ainsi le pouce cube d'or allié au titre des bijoux, pèse 1 marc 2 onces 1 gros 33 grains; & le pied cube pèse 1099 livres 10 onces 0 gros 46 grains.

Nous avons encore ici une confirmation de ce que nous avons dit plus haut, savoir, qu'il y a pénétration de l'or & du cuivre dans les pores l'un de l'autre; car dans le mélange de l'or allié au titre des bijoux, il y a 20 parties d'or pur, & 4 parties de cuivre rouge. Or, dans la supposition que nous avons faite, en parlant de l'or allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, les 20 parties d'or pèseroient 160484 grains  $\frac{1}{6}$ ; & les 4 parties de cuivre pèseroient 32096 grains  $\frac{5}{6}$ . Si, comme nous l'avons déjà dit plus haut, une masse de cuivre rouge, égale en volume à une masse d'eau de pluie pesant 10000 grains, pèse 77880 grains; chaque 24.<sup>e</sup> de cette masse pèsera donc 3245 grains. Ainsi les 32096 grains  $\frac{5}{6}$  de cuivre rouge, ajoutés à la masse d'or ci-dessus, feront, à peu de chose près, un volume de  $\frac{19}{24}$ . Par conséquent le volume de la masse du mélange devoit être augmenté de  $\frac{6}{24}$  en sus. Au lieu de 24 parties en volume, il devoit donc y en avoir 30. Si nous divisons 192581 grains, poids du total, par 30, le poids de chaque petit volume, sera 6419 grains  $\frac{11}{30}$ . Si nous retranchons maintenant le poids de six de ces volumes, qui font 38516 grains  $\frac{6}{30}$ ; il ne restera pour le poids d'un volume du mélange, égal à un volume d'eau de pluie pesant 10000 grains, que 154064 grains  $\frac{24}{30}$ . C'est en effet ce que devoit peser un pareil volume d'or, allié au titre des bijoux, si la densité du mélange demouroit proportionnelle aux densités particulières des deux métaux. Mais suivant nos expériences, ce volume d'or pèse 157090 grains; donc la densité est augmentée; donc il y a pénétration.

Le même morceau d'or allié au titre des bijoux éprouvé ci-dessus, après avoir été bien écroui, s'est trouvé peser 1 marc 0 once 0 gros 19 grains  $\frac{7}{8}$ , ou 4627 grains  $\frac{7}{8}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 5 grains  $\frac{3}{8}$ , ou 293 grains  $\frac{3}{8}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 15775 : 1000, ou plus exactement :: 157746 : 10000; donc la densité est augmentée par l'écroui d'environ  $\frac{1}{239}$ . Cela étant, le ponce cube de cet or pèse 1 marc 2 onces 1 gros 57 grains; & le pied cube pèse 1104 livres 3 onces 4 gros 30 grains.

### *De l'Argent.*

J'ai éprouvé l'argent de même que j'ai fait l'or; 1.<sup>o</sup> très-pur & sans aucun alliage; 2.<sup>o</sup> allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris; 3.<sup>o</sup> allié au titre de la Monnoie de France, & j'ai éprouvé ces différentes sortes; 1.<sup>o</sup> n'étant que simplement fondues, 2.<sup>o</sup> étant bien écrouies.

L'argent pur, ou à 12 deniers, m'a aussi été procuré par M. Tillet, qui me l'a fait fournir par M.<sup>rs</sup> du bureau des Affinages de la Monnoie. J'en ai d'abord essayé plusieurs morceaux choisis dans de très-grands lingots. Ensuite j'ai demandé qu'on en formât un culot, en en faisant fondre une certaine quantité dans un petit creuset neuf, & l'y laissant refroidir lentement, au lieu de le couler en lingot; ce qui a très-bien réussi.

Le culot qu'on m'a fourni pesoit 1 marc 3 onces 4 gros 1 grain, ou 6625 grains: il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 56 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 632 grains  $\frac{1}{2}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10474 : 1000, ou plus exactement :: 104743 : 10000. Il suit de-là que le ponce cube d'argent pur pèse 6 onces 6 gros 22 grains, & le pied cube pèse 733 livres 3 onces 1 gros 52 grains.

Un morceau du même argent, écroui autant qu'il a été possible, & qui pesoit 6 onces 6 gros 53 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 3941 grains  $\frac{1}{2}$ , a perdu dans l'eau de pluie 5 gros 15 grains, ou 375 grains; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10511 : 1000, ou plus exactement

:: 105107 : 10000. Sa densité a donc été augmentée par l'écroui d'environ  $\frac{1}{288}$ . Ainsi le pouce cube d'argent pur ainsi écroui, pèse 6 onces 6 gros 36 grains, & le pied cube pèse 735 livres 11 onces 7 gros 43 grains.

J'ai ensuite éprouvé les deux espèces d'argent allié qui sont en usage; savoir l'argent allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, & l'argent allié au titre de la Monnoie de France.

L'argent allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, doit être à 11 deniers  $\frac{1}{2}$ ; c'est-à-dire qu'il doit y avoir 23 parties d'argent, & une partie de cuivre; mais on permet 2 grains, c'est-à-dire,  $\frac{2}{24}$  de denier de remède; ainsi, il peut y avoir 274 parties d'argent & 14 parties de cuivre, ou plus simplement 137 parties d'argent & 7 parties de cuivre.

L'argent allié au titre de la Monnoie de France doit être à 11 deniers; c'est-à-dire qu'il doit y avoir onze parties d'argent & une partie de cuivre; mais on permet 3 grains, c'est-à-dire  $\frac{3}{24}$  de denier de remède; ainsi il peut y avoir, & il y a en effet 261 parties d'argent & 27 parties de cuivre, ou plus simplement 29 parties d'argent & 3 parties de cuivre.

L'argent allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, qui est à 11 deniers  $\frac{1}{2}$ , ou à 11 deniers 10 grains de fin, m'a été fourni par M. Durand, Orfèvre de Paris. Le morceau d'argent après avoir été fondu, coulé dans une lingotière & ébarbé, mais sans être aucunement écroui, pesoit 1 marc 0 once 1 gros 54 grains, ou 4734 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 6 gros 33 grains  $\frac{1}{4}$ , ou 465 grains  $\frac{1}{4}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10175 : 1000, ou plus exactement :: 101752 : 10000; ainsi le pouce cube d'argent, allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, pèse 6 onces 4 gros 55 grains, & le pied cube pèse 712 livres 4 onces 1 gros 57 grains.

Il n'en est pas de l'argent & du cuivre comme de l'or & du cuivre; il n'y a point de pénétration mutuelle de ces deux métaux dans les pores l'un de l'autre; car nous avons dit ci-dessus que l'argent allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris est composé de 144 parties; savoir, 137 parties d'argent pur,



& 7 parties de cuivre, mesurant par le poids. Nous avons dit aussi que la pesanteur spécifique de l'argent pur est à celle de l'eau de pluie :: 104743 : 10000, & que la pesanteur spécifique du cuivre rouge est à celle de l'eau de pluie :: 77880 : 10000. Si donc nous supposons une masse d'argent pur pesant 104743 grains, dont le volume égalera par conséquent un volume d'eau de pluie, pesant 10000 grains, les  $\frac{137}{144}$  de cette masse d'argent pèseront 99651  $\frac{47}{144}$  grains, & les  $\frac{7}{144}$  de cuivre rouge que l'on y mêle pour l'allier, pèseront 5091  $\frac{97}{144}$  grains. Si nous supposons de même une masse de cuivre rouge égale en volume à une masse d'eau de pluie pesant 10000 grains, cette masse de cuivre pèsera 77880 grains, qui, divisés par 144, donnent 540  $\frac{120}{144}$ ; chaque 144.<sup>e</sup> de cette masse de cuivre pèsera donc 540 grains  $\frac{120}{144}$ ; ainsi les 5091 grains  $\frac{97}{144}$  de cuivre ajoutés à la masse d'argent ci-dessus, feront, à peu de chose près, un volume de  $\frac{19}{88}$ ; par conséquent le volume de la masse du mélange devoit être augmenté de  $\frac{5}{288}$  en sus. Au lieu de 144 parties en volume, il devoit donc y en avoir 146  $\frac{1}{2}$ . Si nous divisons 104743 grains, poids du total, par 146  $\frac{1}{2}$ , le poids de chaque petit volume sera 714 grains  $\frac{284}{93}$ . Si nous retranchons maintenant les poids de 2  $\frac{1}{2}$  de ces volumes, qui font 1787  $\frac{124}{93}$  grains, il restera pour le poids d'un volume du mélange égal à un volume d'eau de pluie pesant 10000 grains, 102955 grains  $\frac{169}{93}$ . C'est effectivement ce que devoit peser un pareil volume d'argent allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, si la densité du mélange demouroit proportionnelle aux densités particulières des métaux qui le constituent. Mais, suivant nos expériences, un pareil volume d'argent, ainsi allié, ne pèseroit que 101752 grains; donc, au lieu d'y avoir pénétration de ces deux métaux dans les pores l'un de l'autre, il paroît au contraire que leurs parties ne sont pas autant rapprochées qu'elles pourroient l'être, puisque la densité du mélange est moindre.

Un morceau du même argent allié au titre de l'Orfèvrerie de Paris, après avoir été bien écroui & ébarbé, comme je l'avois fait pour l'or, & pour les mêmes raisons, pesoit 1 marc

0 once 6 gros 31 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 5071 grains  $\frac{1}{2}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 6 gros 56 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 488 grains  $\frac{3}{4}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10376 : 1000, ou plus exactement :: 103765 : 10000; ce qui fait voir que sa densité a été augmentée par l'écouli d'environ  $\frac{2}{103}$ ; ainsi le pouce cube de cet argent pèse 6 onces 5 gros 58 grains; & le pied cube pèse 726 livres 5 onces 5 gros 32 grains.

L'argent allié au titre de la Monnoie de France, ou à 10 deniers 21 grains de fin, m'a encore été fourni par M.<sup>rs</sup> du bureau des Affinages de la Monnoie. J'en ai pris un morceau simplement fondu & coulé, sans aucun écouli, qui pesoit 1 marc 1 once 0 gros 39 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 5223 grains  $\frac{1}{2}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 7 gros 15 grains  $\frac{7}{8}$ , ou 519 grains  $\frac{7}{8}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10048 : 1000, ou plus exactement :: 100476 : 10000; d'où il suit que le pouce cube d'argent allié au titre de la Monnoie de France pèse 6 onces 4 gros 7 grains; & le pied cube pèse 703 livres 5 onces 2 gros 36 grains.

La pesanteur spécifique de cet argent, ainsi allié, est encore une preuve qu'il n'y a point de pénétration mutuelle de l'argent & du cuivre dans les pores l'un de l'autre; car dans ce mélange il y a  $\frac{2}{3}$  d'argent pur, &  $\frac{1}{3}$  de cuivre rouge. Or dans la supposition que nous avons faite plus haut, les 29 parties d'argent pèseroient 94923 grains  $\frac{1}{3}$ , les 3 parties de cuivre pèseroient donc 9819 grains  $\frac{2}{3}$ . Si, comme nous l'avons dit ci-dessus, une masse de cuivre rouge, égale en volume à une masse d'eau de pluie pesant 10000 grains, pèse 77880 grains, chaque 32.<sup>e</sup> de cette masse pesera donc 2433 grains  $\frac{3}{4}$ ; ainsi les 9819 grains  $\frac{2}{3}$  de cuivre rouge ajoutés à la masse d'argent ci-dessus, feront un volume d'un peu plus de  $\frac{4}{3}$ . Par conséquent le volume de la masse du mélange devoit être augmenté de  $\frac{1}{3}$  en sus. Au lieu de 32 parties en volume, il devoit donc y avoir 33. Si nous divisons 104743 grains, poids du total, par 33, le poids de

de chaque petit volume, fera 3174 grains  $\frac{1}{33}$ . Si nous retranchons maintenant le poids d'un de ces volumes, il restera pour le poids d'un volume du mélange égal à un volume d'eau de pluie pesant 10000 grains, 101568 grains  $\frac{2}{33}$ . C'est en effet ce que devoit peser un pareil volume d'argent allié au titre de la Monnoie de France, si la densité du mélange demouroit proportionnelle aux densités particulières des deux métaux; mais suivant nos expériences, ce volume d'argent ne pèseroit que 100476 grains. Donc la densité est diminuée; donc il n'y a pas de pénétration.

Pour avoir l'argent allié au titre de la Monnoie de France, écroui au point convenable, je me suis servi, ainsi que je l'ai fait pour l'or, de l'argent monnoyé. J'ai donc pris un écu de six livres, frappé à la Monnoie de Paris, qui pesoit 7 gros 52 grains  $\frac{13}{16}$ , ou 556 grains  $\frac{13}{16}$ : il a perdu dans l'eau de pluie 53 grains  $\frac{1}{2}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 10408 : 1000, ou plus exactement :: 104077 : 10000; ce qui fait voir que sa densité a été augmentée par la forte pression qu'il a éprouvée sous le balancier, d'environ  $\frac{1}{38}$ . Ainsi le ponce cube de cette matière pèseroit 6 onces 5 gros 70 grains; & le pied cube pèseroit 728 livres 8 onces 4 gros 71 grains.

Le poids absolu de l'écu, dont je me suis servi dans cette épreuve, pourroit faire soupçonner de l'inexactitude dans ma balance ou dans mon opération, car j'ai trouvé qu'il pesoit 556 grains  $\frac{13}{16}$ ; & cependant chaque écu de six livres ne doit peser que 555 grains  $\frac{15}{33}$ , puisque 166 écus de six livres pèsent dix livres; or, on n'imaginera pas qu'on fasse à la Monnoie les écus plus pesans qu'ils ne doivent l'être, on aimera mieux croire que je me suis trompé; cependant il n'en est rien. Je fis voir dans le temps ce même écu à M. Tillet, qui le pesa de nouveau lui-même, & le trouva en effet d'environ 1 grain  $\frac{3}{4}$  plus pesant qu'il ne devoit l'être.

### *Du Cuivre rouge & jaune.*

J'ai éprouvé le cuivre, 1.<sup>o</sup> simplement fondu; 2.<sup>o</sup> comprimé par une grande force.

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

Pour avoir le cuivre fondu le plus plein possible, & dans lequel il ne se trouvât aucune soufflure, j'ai pensé qu'il vaudroit mieux, après l'avoir fondu, le laisser refroidir lentement dans le creuset, plutôt que de le jeter en moule.

J'ai donc pris du cuivre de rosette; je l'ai fait fondre dans un petit creuset neuf; je l'ai laissé long-temps en fusion, après quoi je l'ai laissé refroidir lentement dans le fourneau; cela m'a donné un petit culot, que j'ai bien limé tout autour pour en ôter toutes les inégalités. Ce culot pesoit 4 onces 1 gros 67 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 2443 grains  $\frac{1}{2}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 4 gros 25 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 313 grains  $\frac{3}{4}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7788 : 1000, ou :: 77880 : 10000. Ainsi le pouce cube de cuivre rouge pèse 5 onces 0 gros 28 grains, & le pied cube pèse 545 livres 2 onces 4 gros 35 grains.

J'ai pris du cuivre jaune en planche tout neuf, & l'ai fait fondre comme le cuivre rouge; cela m'a donné un culot, que j'ai bien limé pour en ôter les inégalités & la partie du cuivre qui avoit perdu son zinc; ce culot pesoit 5 onces 4 gros 14 grains, ou 3182 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 5 gros 19 grains, ou 379 grains; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 8396 : 1000, ou plus exactement :: 83958 : 10000; d'où il suit que le pouce cube de cuivre jaune pèse 5 onces 3 gros 38 grains, & le pied cube pèse 587 livres 11 onces 2 gros 26 grains.

Pour avoir du cuivre qui fût comprimé par des forces sensiblement égales, j'ai pris de ces cylindres de cuivre qu'on a passés à la filière; le cylindre de cuivre rouge pesoit 1 once 7 gros 16 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 1096 grains  $\frac{1}{2}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 gros 51 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 123 grains  $\frac{1}{2}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 8878 : 1000, ou plus exactement :: 88785 : 10000. Ainsi le pouce cube de ce cuivre pèseroit 5 onces 6 gros 3 grains, & le pied cube pèseroit 621 livres 7 onces 7 gros 26 grains.

Le cylindre de cuivre jaune pesoit 2 onces 2 gros 34 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 1330 grains  $\frac{3}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 2 gros 11 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 155 grains  $\frac{3}{4}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 8544 : 1000, ou plus exactement :: 85441 : 10000. Le pouce cube de ce cuivre pèseroit donc 5 onces 4 gros 22 grains, & le pied cube pèseroit 598 livres 1 once 3 gros 10 grains.

On sera sans doute étonné de trouver le cuivre rouge qui n'a été que simplement fondu & non comprimé, moins pesant que le cuivre jaune, qui n'a pas non plus été comprimé; tandis que, lorsque ces deux métaux ont été battus, ou autrement comprimés, c'est le cuivre rouge qui est spécifiquement plus pesant. Je crois en apercevoir la raison.

Le cuivre rouge est un métal simple, au lieu que le cuivre jaune est un alliage du cuivre rouge avec environ  $\frac{1}{7}$  de zinc. Mais dans ce mélange il y a une pénétration réelle des deux métaux dans les pores l'un de l'autre, telle que celle qui se trouve dans le mélange de certaines liqueurs, ce qui en augmente la densité; car en effet, la densité ou pesanteur spécifique de ce mélange est plus grande que ne l'exigent les densités particulières des deux matières qui le composent. Ainsi, quoique le zinc que l'on mêle au cuivre, ait moins de densité que ce dernier métal, cependant ce mélange est spécifiquement plus pesant que le cuivre rouge lui-même, lorsque l'un & l'autre de ces métaux n'ont été que fondus; parce que les pores du cuivre jaune sont en partie remplis par le zinc, de même que ceux du zinc le sont probablement par le cuivre: mais lorsque ces métaux sont comprimés par une grande force, le cuivre rouge, qui n'a rien admis d'étranger dans ses pores, cède davantage à la compression, & acquiert par-là plus de densité; au lieu que le cuivre jaune qui a déjà été pénétré par le zinc, qui est moins pesant que lui, cède moins à la force qui le comprime; c'est pourquoi, dans ce dernier cas, le cuivre rouge se trouve spécifiquement plus pesant que le cuivre jaune, quoique dans le premier cas ce soit le cuivre jaune qui soit le plus pesant des deux; de

forte que la compression augmente la densité du cuivre rouge d'environ  $\frac{1}{8}$ , tandis qu'elle n'augmente celle du cuivre jaune que d'environ  $\frac{1}{57}$ .

En parlant de l'argent, nous avons remarqué que la densité ou pesanteur spécifique augmente d'autant plus par l'écroui, que le métal contient plus d'alliage. Ici, c'est le contraire, la densité du métal simple augmente beaucoup plus par l'écroui, que ne le fait celle du métal allié; la raison en est bien simple : dans l'argent allié avec le cuivre, non-seulement il n'y a pas de pénétration des deux métaux dans les pores l'un de l'autre; mais les parties ne paroissent pas même autant rapprochées qu'elles pourroient l'être. La compression qui survient occasionne ce rapprochement; ce qui augmente beaucoup la densité; au lieu que dans le cuivre allié avec le zinc il y a une pénétration réelle des deux métaux; leurs pores sont en partie remplis par une matière étrangère, ce qui empêche que la compression produise un aussi grand effet.

#### *Du Fer.*

J'ai éprouvé le fer, 1.<sup>o</sup> simplement fondu, 2.<sup>o</sup> forgé & mis en barre, 3.<sup>o</sup> fortement écroui ou battu à froid, 4.<sup>o</sup> battu à chaud.

M. de Buffon m'a donné un petit morceau de fonte de fer, qui m'a paru très-pure & dégagée de matières étrangères; il pesoit 1 once 4 gros 58 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 922 grains  $\frac{1}{2}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 gros 56 grains, ou 128 grains; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7207 : 1000, ou :: 72070 : 10000. Ainsi le ponce cube de cette fonte pèse 4 onces 5 gros 27 grains; & le pied cube pèse 504 livres 7 onces 6 gros 52 grains.

J'ai pris ensuite un morceau d'une barre d'excellent fer de Berri fort doux, que j'ai fait bien limer par-tout pour ôter toute la rouille, & afin que l'eau s'y appliquât exactement. Il pesoit 7 onces 2 gros 39 grains  $\frac{1}{4}$ , ou 4215 grains  $\frac{1}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 7 gros 37 grains  $\frac{1}{4}$ , ou 541 grains  $\frac{1}{4}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie

:: 7788 : 1000, ou :: 77880 : 10000. D'où il suit que le pouce cube d'un tel fer pèse 5 onces 0 gros 28 grains; & le pied cube pèseroit 545 livres 2 onces 4 gros 35 grains.

Il faut remarquer que la pesanteur spécifique varie, non-seulement dans les différentes espèces de fer, mais encore dans différens morceaux du même fer. Cette variété n'est pas très-considérable; la plus forte que m'aient fournie mes épreuves a été d'environ  $\frac{1}{100}$ . Cela vient sans doute de ce que les lames qui composent le fer ne se touchent pas parfaitement, & que les vides qu'elles laissent entr'elles sont plus ou moins grands.

Le fer qui a été mis en barre augmente rarement de densité par l'écroui, sans doute parce qu'il l'a déjà été fortement en le mettant en barre; & quand il en augmente, c'est d'une très-petite quantité; la plus forte augmentation que j'en aie trouvée dans mes épreuves a été de  $\frac{1}{2862}$ . Il arrive beaucoup plus souvent qu'il diminue de densité par cette voie, & cela arrive sûrement s'il a été écroui dans les deux sens opposés, comme, par exemple, lorsqu'une barre quarrée a été battue à froid sur les quatre côtés. J'ai cru en apercevoir la raison, voici celle que j'ai soupçonnée. En battant à froid une barre de fer dans un sens seulement, on peut quelquefois rapprocher ses lames les unes des autres, de façon à diminuer son volume, & augmenter par conséquent sa densité; c'est ce qui m'est arrivé; mais une fois seulement, comme je l'ai déjà dit, & cela n'a été que d'une très-petite quantité. Si ensuite on bat à froid cette barre dans l'autre sens, ses lames déjà resserrées sur elles-mêmes, & devenues plus dures par l'écroui, ne pouvant plus se resserrer davantage, la percussion les écarte les unes des autres, en les courbant; elles laissent entr'elles des vides plus ou moins grands, ce qui en augmente le volume & en diminue la densité. J'ai voulu voir si mon soupçon étoit fondé; j'ai donc pris un morceau de fer, qui n'ayant été battu à froid que dans un sens, avoit un peu augmenté de pesanteur spécifique; je l'ai fait battre à froid dans l'autre sens; sa pesanteur spécifique a été beaucoup plus

diminuée par ce second écroui, qu'elle n'étoit augmentée par le premier; car son augmentation dans le premier cas n'a été que d'environ  $\frac{1}{2802}$ ; & sa diminution dans le second, a été d'environ  $\frac{1}{140}$ .

Cela prouve qu'en battant une barre de fer à froid, on court les risques d'y produire des gerçures & de l'affoiblir. C'est une remarque assez importante pour les Arts.

J'ai enfin fait rougir ces morceaux de fer qui avoient été écrouis, & les ai fait battre fortement à chaud: par ce procédé leur densité a regagné ce qu'elle avoit perdu par l'écroui; de sorte qu'elle s'est trouvée, à très-peu de chose près, la même qu'elle étoit dans leur état primitif, étant un peu moindre dans quelques morceaux, & un peu plus grande dans d'autres; mais la différence n'a été que d'environ  $\frac{1}{3000}$ .

### *De l'Acier.*

J'ai éprouvé l'Acier neuf, 1.<sup>o</sup> sans être ni écroui ni trempé, 2.<sup>o</sup> étant écroui & non trempé, 3.<sup>o</sup> étant trempé & non écroui, 4.<sup>o</sup> étant écroui & ensuite trempé.

J'ai pris un morceau du meilleur acier d'Angleterre en barreau, tout neuf, tel qu'on le trouve chez les Marchands; je l'ai fait bien limer par-tout, pour ôter toutes les inégalités de sa surface. Il s'est trouvé peser 12 onces 6 gros 47 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 7391 grains  $\frac{1}{2}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 5 gros 7 grains  $\frac{5}{8}$ , ou 943 grains  $\frac{5}{8}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7833 : 1000, ou plus exactement :: 78331 : 10000; d'où il suit qu'un pouce cube de cet acier pèseroit 5 onces 0 gros 44 grains; & le pied cube pèseroit 548 livres 5 onces 0 gros 41 grains.

Un morceau du même acier, après avoir été bien écroui, s'est trouvé peser 11 onces 1 gros 3 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 6411 grains  $\frac{1}{2}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 25 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 817 grains  $\frac{3}{4}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7840 : 1000, ou plus exactement :: 78404 : 10000. Sa densité n'augmente donc par l'écroui



que d'environ  $\frac{1}{1074}$ . Ainsi, le pouce cube de cet acier pèseroit 5 onces 0 gros 47 grains ; & le pied cube pèseroit 548 livres 13 onces 1 gros 71 grains.

Le même morceau d'acier écroui, après avoir été trempé de tout son dur, s'est trouvé peser 11 onces 0 gros 65 grains, ou 6401 grains ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 26 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 818 grains  $\frac{3}{4}$ , ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7818 : 1000, ou :: 78180 : 10000. Cela prouve que la densité de l'acier diminue beaucoup plus par la trempe, qu'elle n'augmente par l'écroui ; car elle est diminuée par la trempe de  $\frac{1}{350}$ , & elle n'étoit augmentée par l'écroui que d'environ  $\frac{1}{1074}$ . Le pouce cube de cet acier ne pèseroit donc que 5 onces 0 gros 39 grains ; & le pied cube ne pèseroit que 547 livres 4 onces 1 gros 20 grains.

Un autre morceau du même acier, qui a été trempé de tout son dur, sans avoir auparavant été écroui, s'est trouvé peser 11 onces 4 gros 14 grains, ou 6638 grains ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 57 grains  $\frac{1}{4}$ , ou 849 grains  $\frac{1}{4}$  ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7816 : 1000, ou plus exactement :: 78163 : 10000 ; d'où l'on voit que sa pesanteur spécifique est à peu-près la même que celle de l'acier qui avoit été fortement écroui avant d'être trempé ; sa densité étant diminuée de son état primitif d'environ  $\frac{1}{466}$  ; & la densité de l'acier qui avoit été écroui avant la trempe, étant diminuée, aussi de son état primitif, d'environ  $\frac{1}{518}$ . Ce qui prouve que l'action du feu, avant de le tremper, avoit ôté à l'acier écroui à peu près l'augmentation de densité qu'il avoit acquise par l'écroui. Le pouce cube de cet acier ne pèseroit donc que 5 onces 0 gros 38 grains ; & le pied cube ne pèseroit que 547 livres 2 onces 2 gros 3 grains.

Ces résultats nous apprennent 1.<sup>o</sup> que l'acier par la trempe augmente toujours de volume, & par conséquent diminue de densité ; 2.<sup>o</sup> que l'acier, dans tous les cas, a une pesanteur spécifique plus grande que celle du fer, même celle qui est

augmentée par l'écroui ; ce qui paroîtroit d'abord confirmer l'opinion qu'ont aujourd'hui les Chimistes, que l'acier est plus fer que le fer qui l'a formé ; puisque les matières étrangères qui pourroient lui être unies en pareil cas , ayant une densité moindre que la sienne , devroient alors faire diminuer cette densité ; ce qui n'arrive pas , comme le prouvent mes expériences. Mais, l'exemple du cuivre , qui au moyen du zinc , moins pesant que lui , acquiert une pesanteur spécifique plus grande , doit nous faire suspendre notre jugement. Il se pourroit donc faire que des matières étrangères , moins pesantes que le fer , en remplissant en grande partie ses pores , pour en faire de l'acier , lui donnassent plus de densité , & par conséquent une pesanteur spécifique plus grande. Ce qui me donne ce soupçon , c'est que je trouve dans l'acier les deux propriétés les plus remarquables des métaux alliés , savoir , la plus grande fusibilité , & la plus grande dureté & roideur dans ses parties.

### *Du Plomb.*

J'ai éprouvé le plomb , 1.<sup>o</sup> simplement fondu , sans être battu ni même coulé ; 2.<sup>o</sup> après avoir été fortement battu à coups de marteau.

J'ai donc pris une masse de plomb , que j'ai fait fondre dans une cuiller de fer , & l'y ai ensuite laissé refroidir lentement. Après quoi j'ai bien limé toute la surface , pour ôter toutes les inégalités , & pour emporter la portion du métal qui s'étoit décomposée. Cela m'a donné une espèce de plateau , qui pesoit 7 onces 7 gros 56 grains , ou 4592 grains ; il a perdu dans l'eau de pluie 5 gros 44 grains  $\frac{1}{2}$  , ou 404 grains  $\frac{1}{2}$  ; ce qui donne la pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie : 11352 : 1000 , ou plus exactement : 113523 : 10000. D'où il suit que le pouce cube de plomb pèse 7 onces 2 gros 62 grains ; & le pied cube pèse 794 livres 10 onces 4 gros 44 grains.

J'ai ensuite battu ce plomb à coups de marteau ; par-là le plateau s'est aminci ; mais il s'est étendu en proportion :  
de

de sorte qu'en le pesant de nouveau, j'ai trouvé qu'il ne change point ou presque point de densité par l'écouli. J'y ai cependant trouvé, une fois seulement, une différence de  $\frac{1}{348}$ , dont le plomb battu pesoit plus que le plomb non battu. Mais cela venoit peut-être de ce que, dans ce morceau, il y avoit quelques petites soufflures; puisque c'est la seule de mes expériences où j'en ai trouvé la densité augmentée.

### *De l'Étain.*

J'ai éprouvé six sortes d'étain; 1.<sup>o</sup> simplement fondus, 2.<sup>o</sup> bien écrouis, savoir, l'étain pur de Cornouailles, l'étain de Mélaç, & les quatre sortes d'étain qu'on trouve chez les Potiers, qui sont l'étain neuf, l'étain fin, l'étain commun, & l'étain appelé *claire-étouffe*.

J'ai fait fondre ces métaux l'un après l'autre dans une cuiller de fer, & j'en ai formé de petits plateaux, que j'ai laissés refroidir lentement, & dont j'ai ôté avec soin toutes les inégalités de la surface, afin qu'il n'y demeurât aucune bulle d'air adhérente lorsque je les ai pesés dans l'eau.

L'étain pur de Cornouailles m'a été donné par M. du Hamel, qui l'a rapporté du voyage qu'il a fait en Angleterre avec M.<sup>rs</sup> de Jussieu & l'abbé Nollet, & qu'il m'a dit lui avoir été procuré, dans toute sa pureté, par le moyen de Milord Duc de Richemond. Ce morceau pesoit 3 onces 4 gros 11 grains, ou 2027 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 62 grains, ou 278 grains; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7291 : 1000, ou plus exactement :: 72914 : 10000. Ainsi le pouce cube de cet étain pèse 4 onces 5 gros 58 grains; & le pied cube pèse 510 livres 6 onces 2 gros 68 grains.

L'étain de Mélaç m'a été procuré par M. Macquer, qui m'en a fourni plusieurs échantillons, entre lesquels j'ai trouvé de si petites différences, que je les ai comptées pour rien. Le morceau d'après lequel j'ai conclu sa pesanteur spécifique, pesoit 10 onces 1 gros 38 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 5870 grains  $\frac{3}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 12 grains  $\frac{5}{8}$ , ou

804 grains  $\frac{5}{8}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7269 : 1000, ou plus exactement :: 72963 : 10000. Le ponce cube de cet étain pèse donc 4 onces 5 gros 60 grains; & le pied cube pèse 510 livres 11 onces 6 gros 61 grains.

A l'égard des différentes sortes d'étain qu'on trouve chez les Potiers, j'en ai acheté des quatre espèces chez plusieurs Marchands, & les ai éprouvées. J'y ai trouvé des différences, qui se réduisent à peu de chose dans les étains qui doivent avoir peu d'alliage, tels que l'étain neuf & l'étain fin; mais qui se sont trouvées plus considérables dans les autres espèces. Pour déterminer leur pesanteur spécifique, j'ai choisi, dans chaque espèce, celle qui avoit le moins d'alliage, c'est-à-dire, celle qui étoit spécifiquement la moins pesante; parce que je suis persuadé que tous les Marchands ne manquent pas de mettre pour le moins la quantité d'alliage qu'on leur permet pour chaque espèce. Il ne m'a pas été possible de savoir d'eux quelle est cette quantité d'alliage permise pour chaque espèce; il m'a paru qu'ils en faisoient un secret.

J'ai donc déterminé les pesanteurs spécifiques de ces quatre sortes d'étain, de la manière suivante.

Le morceau d'étain neuf pesoit 7 onces 7 gros 55 grains  $\frac{5}{8}$ ; ou 4591 grains  $\frac{5}{8}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 52 grains  $\frac{7}{8}$ , ou 628 grains  $\frac{7}{8}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7301 : 1000, ou plus exactement :: 73013 : 10000. Ainsi le ponce cube de cet étain pèse 4 onces 5 gros 62 grains; & le pied cube pèse 511 livres 1 once 3 gros 47 grains.

Le morceau d'étain fin pesoit 7 onces 6 gros 39 grains  $\frac{1}{4}$ ; ou 4503 grains  $\frac{1}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 26 grains  $\frac{5}{8}$ , ou 602 grains  $\frac{5}{8}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7479 : 1000, ou plus exactement :: 74789 : 10000; d'où il suit que le ponce cube de cet étain pèse 4 onces 6 gros 56 grains; & le pied cube pèse 523 livres 8 onces 2 gros 68 grains.

Le morceau d'étain commun pesoit 8 onces 0 gros 20

grains  $\frac{1}{4}$ , ou 4628 grains  $\frac{1}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 8 grains  $\frac{3}{8}$ , ou 584 grains  $\frac{3}{8}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7920 : 1000, ou :: 79200 : 10000. Ainsi le ponce cube de cet étain pèse 5 onces 1 gros 5 grains; & le pied cube pèse 554 livres 6 onces 3 gros 14 grains.

Le morceau d'étain appelé *claire-étouffe* pesoit 8 onces 1 gros 26 grains, ou 4706 grains; il a perdu dans l'eau de pluie 7 gros 50 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 554 grains  $\frac{1}{2}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 8487 : 1000, ou plus exactement :: 84869 : 10000; le ponce cube de cet étain pèse donc 5 onces 4 gros 0 grains; & le pied cube pèse 594 livres 1 once 2 gros 45 grains.

J'ai ensuite écroui, le plus qu'il m'a été possible, ces six sortes d'étain, & les ai pesés de nouveau.

Le morceau d'étain de Cornouailles pesoit 3 onces 4 gros 10 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 2026 grains  $\frac{1}{2}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 3 gros 61 grains  $\frac{5}{8}$ , ou 277 grains  $\frac{5}{8}$ , ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7299 : 1000, ou plus exactement :: 72994 : 10000. Sa densité est donc augmentée par l'écroui d'environ  $\frac{1}{912}$ ; d'où il suit que le ponce cube de cet étain pèseroit 4 onces 5 gros 61 grains; & le pied cube pèseroit 510 livres 15 onces 2 gros 45 grains.

Le morceau d'étain de Mélac pesoit 10 onces 1 gros 38 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 5870 grains  $\frac{3}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 3 gros 11 grains  $\frac{1}{2}$ , ou 803 grains  $\frac{1}{2}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7306 : 1000, ou plus exactement :: 73065 : 10000. Sa densité est donc augmentée par l'écroui d'environ  $\frac{1}{716}$ . Ainsi le ponce cube de cet étain pèseroit 4 onces 5 gros 64 grains; & le pied cube pèseroit 511 livres 7 onces 2 gros 17 grains.

Le morceau d'étain neuf pesoit 7 onces 7 gros 55 grains  $\frac{5}{8}$ , ou 4591 grains  $\frac{5}{8}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 52 grains, ou 628 grains; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7311 : 1000, ou plus exactement :: 73115 : 10000. Sa densité est donc augmentée

par l'écroui d'environ  $\frac{1}{716}$ , de même que celle de l'étain de Mèlac, de la pureté duquel l'étain neuf approche beaucoup. Le pouce cube de cet étain pèseroit 4 onces 5 gros 66 grains; & le pied cube pèseroit 511 livres 12 onces 7 gros 3 grains.

Le morceau d'étain fin pesoit 7 onces 6 gros 38 grains  $\frac{1}{4}$ , ou 4502 grains  $\frac{1}{4}$ ; il a perdu dans l'eau de pluie 1 once 0 gros 22 grains  $\frac{3}{4}$ , ou 598 grains  $\frac{3}{4}$ ; ce qui donne sa pesanteur spécifique à celle de l'eau de pluie :: 7519 : 1000, ou plus exactement :: 75194 : 10000. Sa densité est donc augmentée par l'écroui d'environ  $\frac{1}{185}$ . Ainsi le pouce cube de cet étain pèseroit 4 onces 6 gros 71 grains; & le pied cube pèseroit 526 livres 5 onces 5 gros 59 grains.

A l'égard de l'étain commun & de celui que les Potiers appellent *claire-étouffe*, ces deux espèces ne changent point ou presque point de densité par l'écroui; ce qui vient sans doute de ce qu'elles sont alliées avec beaucoup de plomb, que nous avons vu ci-dessus ne guère changer lui-même de densité par cette voie. Il paroît même, par les résultats ci-dessus, qu'en général l'étain, de même que le plomb, augmente peu de densité par l'écroui. Aussi remarque-t-on que l'écroui n'augmente que peu, ou même point, l'élasticité de ces métaux.



## SUR UN INSECTE

## QUI S'ATTACHE À LA CHEVRETTE.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

PLUSIEURS pêcheurs, & des personnes qui habitent les rivages de la mer, à la vérité peu instruites, croient encore que les soles doivent leur naissance à une espèce de crustacée de la famille des Écrevisses, que l'on nomme *Chevrettes* ou *Crevettes*, dans d'autres endroits *Salicoques* ou *Barbots*. 11 Avril 1772.

J'ai voulu m'assurer, dans le voyage que j'ai fait en Normandie en 1771, de ce qui avoit pu donner quelque fondement à ce dire populaire.

M. Deslandes ayant eu la même intention, a donné sur cet objet une Observation insérée dans l'*Histoire de l'Académie*, année 1722, page 19. Il y dit qu'ayant fait pêcher une quantité de chevrettes, & les ayant mises dans une baille avec de l'eau de mer, au bout de treize jours il y vit huit ou dix petites soles qui croissoient insensiblement. Il répéta l'expérience plusieurs fois & trouva toujours de petites soles. M. Deslandes mit encore au mois d'Avril des soles avec des chevrettes dans une baille, & dans une autre des soles seulement. Dans l'une & l'autre baille les soles frayoient en perfection; mais il ne parut de petites soles que dans celle où il avoit mis des chevrettes.

M. Deslandes a cru avoir ôté le merveilleux en annonçant, d'après ses observations, que les chevrettes n'engendroient point les soles, comme on l'avoit imaginé, & avoir dévoilé le mystère, en concluant que ce sont des œufs de soles qui ont besoin, pour éclore, de s'attacher à des chevrettes. Par cette explication, les chevrettes deviennent en quelque sorte les nourrices des soles pendant le premier temps de leur vie, au lieu qu'on les faisoit passer pour être leurs mères.

C'est travailler utilement au progrès de la Physique que de s'élever contre de fausses idées, qui peuvent quelquefois se trouver dans nos Mémoires, & celle-ci sembloit mériter d'autant plus de confiance que l'Auteur s'appuie d'observations, & que cependant en voulant détruire un conte ridicule sur la génération des soles, il en substitue un autre presque aussi absurde; en effet, ne seroit-il pas singulier que la Nature eut réservé à des crustacées le soin de faire éclore des œufs d'une espèce de poissons?

Pour m'éclairer sur ce fait, je demandai à des pêcheurs ce qu'ils en pensoient, & j'avouerai que ceux qui m'assuroient avoir trouvé, en grattant les sables des rivages, du frai de soles, ne pouvoient que difficilement accorder avec cela la génération des petites soles que souvent portoient les chevrettes ou salicoques. Je ne crus pas devoir heurter de front leur façon de penser, avant d'avoir fait l'examen de ce qu'ils m'annonçoient; & je commençai par leur demander de ces crustacées qui fussent dans l'état où ces pêcheurs me les dépeignoient avec de jeunes soles qui leur fussent adhérentes & prêtes à paroître. Je ne tardai pas à être pleinement satisfait. Ils m'en apportèrent une grande quantité sur lesquelles je fis les remarques suivantes.

Je vis sur ces chevrettes un renflement très-apparent *B*, à la plus grande écaille du casque de ce crustacée (*fig. 1*); cette grosseur indiquoit, suivant les pêcheurs, les chevrettes ou salicoques soupçonnées de porter de jeunes soles.

En levant cette écaille (*A*, *fig. 2*) je trouvai un animal ou insecte que l'on ne peut comparer à une sole qu'en ayant l'esprit préoccupé, & sans se laisser entraîner par le goût du merveilleux; je tirai cet animal pour l'examiner avec soin, & je mis d'autres chevrettes chargées de ces insectes dans de l'eau de mer.

J'eus bientôt reconnu que cet animal n'étoit point une jeune sole, & après l'avoir enlevé de la chevrete à laquelle il étoit adhérent, je m'assurai que cet animal avoit quelque rapport, par la forme de son corps, avec l'*Oscabron*; mais il



diffère du coquillage que l'on a appelé *oscabrion*, parce qu'il n'est point couvert d'écailles articulées.

Comme je ne crois pas que l'insecte des salicoques ait encore été décrit, je vais entrer dans plus de détails qui serviront à le faire connoître.

Il a à-peu-près quatre lignes ou quatre lignes & demie de longueur sur trois lignes dans sa partie la plus large (*fig. 2*) (l'animal est ici grossi de près de moitié) c'est-là le dernier terme où il parvient; il est figuré en cœur; une extrémité de son corps (*d, fig. 3*) est arrondie; l'autre *D* est un peu pointue. Je crois la tête située vers la partie arrondie. On aperçoit, en regardant l'animal en-dessous, la bouche (*c, fig. 4*) formée par un mamelon ou une espèce de trompe comme celle des animaux qui vivent par succion. Une des surfaces de son corps est aplatie, c'est le dessous de l'insecte (*fig. 4*), je veux dire celle de l'insecte qui porte sur le corps de la chevrette. Le dos de l'insecte est au contraire un peu creusé & concave (*fig. 2, 3 & 5*).

Autour de cet insecte, à la naissance des écailles qui bordent la partie supérieure, & au milieu desquelles il paroît une concavité (*fig. 3 & 5*); on voit, dis-je, à la naissance de ces écailles un rang de petits crochets qui lui servent sans doute à se cramponner au corps de l'animal sur lequel il vit. Ces crochets deviennent plus apparens sur la figure 5 où l'insecte est vu un peu de côté, & sont marqués par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 & 7: à la partie moins arrondie qui semble être la queue de l'insecte, en le regardant du côté que nous avons nommé le dos (*D, fig. 3*), on voit plusieurs feuillets ou lames qui se recouvrent les unes les autres & sont partagées dans leur milieu (*fig. 6*).

Lorsqu'on passe une pointe pour lever ces écailles sur des chevrettes pêchées au mois de Juillet, on trouve dans la plupart de ces insectes un autre petit insecte placé dans l'espace formé par ces lames, & posé de façon que les crochets, au nombre de seize ou dix-huit dont il est garni, se présentent à l'Observateur (*fig. 7 & 8*).

Si l'on tire ce petit insecte pour l'examiner à la loupe, & qu'on le retourne, on le voit composé de plusieurs anneaux, & on aperçoit vers la queue une portion *L* plus mince & comme voilée (*fig. 9*).

Desirant voir cet insecte dans ses différens états, je crus ne pouvoir mieux l'observer qu'en allant à la pêche des falicoques.

J'ai trouvé rarement cet animal attaché à d'autres parties de ces crustacées. Quand on le voit sous l'écaille, il est près de sa perfection; jeune encore & petit, il s'attache entre les pattes & vers l'estomac de la chevrette. Il paroît qu'il quitte cette partie de l'animal, pour passer sous l'écaille du casque du thorax, lorsqu'il a déjà songé à sa multiplication.

On le distingue plus facilement quand il est adhérent à cette partie de la chevrette, parce que l'insecte est plus gros, qu'il y est tranquille & que les secousses de la chevrette ne peuvent pas le déranger. Sous cette écaille où l'insecte reste emprisonné, il est adhérent à la chevrette, & en se nourrissant à ses dépens, il est assujéti à partager son infortune. Si la chevrette est prise & qu'elle meure, l'insecte a le même sort; on le fait cuire avec le crustacée: l'insecte fait donc ses petits sous cette écaille de la chevrette, & comme les cloportes, il tient quelque temps ce petit enfermé sous lui.

J'aurois souhaité suivre avec plus de soin la génération de cet insecte; mais il falloit l'examiner en différentes saisons, & multiplier encore les observations; le temps & les facilités manquoient pour me satisfaire.

Il est certain que cet animal n'est point une sole, & qu'il ne donne point naissance aux soles, puisqu'il change peu de forme durant sa vie, & qu'il produit des petits qui ne ressemblent, non plus que lui, nullement aux soles.

M. Lyonnet \*, sans nier la conclusion de M. Deslandes, croit que son expérience eût été plus sûre, si au lieu d'avoir

---

\* Théologie des Insectes, Traduction de M. Lessier, tome I. *A la Haye*, édition de 1742, page 144.

mis dans une baille un nombre de chevrettes parmi lesquelles il se seroit pu mêler quelques petites soles sans qu'il les ait vues, il se fût contenté de prendre quelques chevrettes chargées de vessies (qu'il regardoit comme les embryons des soles qui devoient naître); & si ayant mis de ces chevrettes seule à seule dans un vase, il eût vu quelques jours après une petite sole dans l'eau d'un des vases & une vessie de moins à la chevrete, M. Lyonnet dit qu'il y eût eu une preuve plus décisive que la sole seroit née d'une de ces vessies.

On voit aujourd'hui ce qui a trompé M. Deslandes, & que même, en répétant l'expérience, comme l'indique M. Lyonnet, il se seroit assuré, mieux encore à la vérité, que la vessie donnoit origine à un petit animal: mais il falloit que M. Deslandes prêtât au fait plus d'attention, & qu'il s'assurât si c'étoit une vraie sole, ou seulement un animal d'un genre tout différent qui vit sur la chevrete, & à ses dépens.

Cette manière de considérer le fait étant trop simple, on a eu recours au merveilleux; maintenant que nous l'avons dissipé, on ne demandera plus pourquoi & comment les œufs de soles se trouvoient sur des chevrettes; si le mâle les avoit fécondés avant ou après que la Nature les eut confiés aux chevrettes, & c'étoit bien inutilement que l'on imaginoit que ces œufs avoient besoin, pour éclore, du mouvement des chevrettes & de la chaleur produite par l'agitation de ce crustacée; ainsi les soles resteront dans la classe des poissons qui déposent leur frai sur le sable, & il restera pour constant que les chevrettes portent sur leur corps des animaux incommodés qui les sucent.

Nous avons dit que c'étoit gagner & faire un pas utile en Histoire Naturelle que de détruire de fausses idées, & que l'on pouvoit savoir gré à celui qui contredisoit des explications qui seroient au moins inutiles quand elles regardent un fait entièrement faux.

Ceci prouve combien on doit être en garde pour adopter des idées merveilleuses ou singulières; & combien il faut d'attention pour observer, sur-tout quand on se propose

d'établir un système sur les observations, ou d'en tirer de nouvelles conséquences.

## EXPLICATION DES FIGURES.

**FIGURE 1.** Une chevrette, salicoque, ou barbot, avec un renflement sous l'écaille de son casque qui indique la présence d'un insecte que l'on croyoit être une jeune sole. *B*, cette loupe ou renflement.

**Fig. 2.** Cette écaille levée & coupée, pour faire voir l'insecte adhérent à ce crustacée. *A*, l'insecte.

**Fig. 3.** L'insecte beaucoup grossi pour mieux distinguer ses parties; il est ici représenté vu en dessus; c'est-à-dire que l'on voit la partie de l'insecte apparente lorsqu'on lève l'écaille du casque de la chevrette; *d*, sa tête; *D*, sa queue; il a sur les côtés de petits crochets 1, 2, 3, 7, qui servent à le tenir adhérent au corps du crustacée.

**Fig. 4.** L'insecte vu sur l'autre face que nous appelons le ventre; *e*, *e* sa tête; *E* sa queue. On y voit du côté de la tête des mamelons ou suçoirs qui dénotent sa bouche; *c* sa bouche.

**Fig. 5.** L'insecte vu sur le dos, comme dans la figure 3, mais un peu de côté pour mieux apercevoir les crochets 1, 2, 3, 7 qui sont autour de l'animal; *K* représente un de ces crochets dessiné séparément.

**Fig. 6.** La queue (*D*, fig. 3) de l'insecte, mais beaucoup grossie pour offrir plus de détails; *F* des lames ou feuilletts qui sont séparés dans le milieu, & qui dans un temps de l'année recouvrent un petit insecte.

**Fig. 7.** Cette queue dont on a enlevé les feuilletts pour examiner l'insecte *G* qu'elles recouvroient. On voit sur ce petit insecte qu'elles couvroient, plusieurs crochets qui deviennent apparens depuis que les lames sont enlevées.

**Fig. 8.** Ce petit insecte séparé, vu de ce même côté avec ses crochets, dont deux les plus près de sa queue sont plus longs.

**Fig. 9.** Ce même petit insecte vu en dessous, eu égard à la position qu'il occupoit (fig. 7); il est composé de neuf anneaux *I*, & est terminé par une partie moins épaisse, & comme voilée, *L*.



## OBSERVATIONS DE VÉNUS,

DANS SA PLUS GRANDE DIGRESSION,

*Et Observations de JUPITER, dans son opposition avec  
le Soleil ; faites à l'Observatoire Royal en 1772.*

Par M. J E A U R A T.

**L**E mural où j'ai fait mes observations, ne vaut pas, à beaucoup près, celui dont M.<sup>rs</sup> Cassini se servent habituellement & assidûment. Le leur a 6 pieds de rayon ; & son plan est peut-être aussi exactement qu'il soit possible dans le plan du Méridien. Le mien n'a que 5 pieds de rayon, & le seul point de son limbe qui soit sensiblement dans le plan du Méridien, est celui de la hauteur de 49 degrés : il a été placé en 1682, par les soins de M.<sup>rs</sup> D. Picard & de la Hire ; & pour en faire usage avec fruit, il m'est essentiel d'en vérifier par des hauteurs correspondantes l'exacte position à l'égard du plan du Méridien : or, c'est ce que j'ai commencé de faire, en comparant, avec M. Cassini le fils, plusieurs midis observés à nos deux muraux, & cela les jours où d'ailleurs il avoit été pris des hauteurs correspondantes du Soleil.

Cette vérification de mon instrument, si importante pour la sûreté de mes Observations, n'a pas, à beaucoup près, été faite assez de fois pour que j'y puisse compter beaucoup ; mais l'essentiel est que j'ai obtenu à cet égard une précision suffisante pour les Observations que je donne dans ce Mémoire, & préalablement à toutes vérifications de la déviation de mon mural. Voici, quant au moment présent, la détermination sur laquelle j'ai fait fonds dans mon Mémoire.

CORRECTIONS à faire à mon mural, pour les ascensions droites observées.

Hauteurs.	DÉCLINAISONS.	Corrections en temps.
Degrés.	D. M. S.	S.
10.	A. 31. 9. 46	+ 11,5
15.	26. 9. 46	+ 10,9
20.	21. 9. 46	+ 10,2
25.	16. 9. 46	+ 9,5
30.	11. 9. 46	+ 8,9
35.	6. 9. 46	+ 8,2
40.	1. 9. 46	+ 5,2
45.	B. 3. 50. 14	+ 2,2
50.	8. 50. 14	— 0,8
55.	13. 50. 14	— 3,8
60.	18. 50. 14	— 8,3
65.	23. 50. 14	— 12,7
70.	28. 50. 14	— 17,1

CORRECTIONS EN DEGRÉS.

Hauteurs.	Déclinaisons	Corrections
Deg.	Deg.	M. S.
60. 0	B. 18. 50	+ 2. 0
60. 30	19. 20	+ 2. 7
61. 0	19. 50	+ 2. 15
61. 30	20. 20	+ 2. 22
62. 0	20. 50	+ 2. 30
62. 30	21. 20	+ 2. 37
63. 0	21. 50	+ 2. 45
63. 30	22. 20	+ 2. 52
64. 0	22. 50	+ 3. 0
64. 30	23. 20	+ 3. 7
65. 0	23. 50	+ 3. 15
65. 30	24. 20	+ 3. 21
66. 0	24. 50	+ 3. 27
66. 30	25. 20	+ 3. 33
67. 0	25. 50	+ 3. 39
67. 30	26. 20	+ 3. 45
68. 0	26. 50	+ 3. 51
68. 30	27. 20	+ 3. 57
69. 0	27. 50	+ 4. 3
69. 30	28. 20	+ 4. 9
70. 0	28. 50	+ 4. 15

J'ajoute que mon instrument donne les hauteurs vraies, en retranchant, non-seulement comme il convient, l'effet de la réfraction, mais aussi la quantité constante 57 secondes: alors la hauteur vraie étant comparée à la hauteur de l'Équateur,  $41^d 9' 46''$ , on a, comme de raison, les déclinaisons cherchées.

Comme mon mural a une déviation considérable, il est évident que n'ayant pas toujours été le maître de comparer au Méridien les Planètes observées avec des Étoiles connues

qui fussent dans le même parallèle, il étoit indispensable que je corrigéasse de l'erreur de mon instrument les ascensions droites observées: aussi n'ai-je pas manqué de faire à mes Observations ces corrections dont je me suis procuré la connoissance; & immédiatement à côté de chaque ascension droite observée, j'ai mis la correction particulière que j'y ai faite; ce qui fait que dans ce Mémoire, non-seulement je donne les Observations telles qu'elles ont été faites, mais aussi les quantités dont je les ai corrigées, & dont j'ai conclu les vraies ascensions droites cherchées.

Ayant aussi réduit les déclinaisons marquées par l'instrument aux déclinaisons vraies, j'ai déduit du tout les lieux géocentriques observés. De plus, ayant calculé ces mêmes lieux géocentriques avec les Tables publiées par M. de la Lande dans la seconde édition de son *Astronomie*, j'ai déduit l'erreur des Tables, tant en longitude qu'en latitude: alors, j'ai trouvé par un milieu pris entre les différentes Observations, que les Tables de Vénus à  $45^d 18' 28''$  d'élongation, & à  $8^f 17^d 32' 30''$  d'anomalie moyenne, différoient du vrai de  $- 30''$  en longitude héliocentrique, & de  $- 15''$  en latitude héliocentrique; & que les Tables de Jupiter différent du vrai à  $4^f 20^d 37' 14''$  d'anomalie moyenne, de  $+ 2' 45''$  en longitude héliocentrique, & de  $- 31''$  en latitude héliocentrique. Pour mes huit Observations de Jupiter, dont la dernière a été faite  $6^h 35'$  avant l'opposition, l'erreur de mon instrument en ascension droite a été nulle, parce que Jupiter & les deux Étoiles  $\alpha$  du Capricorne, auxquelles il a été constamment comparé, passaient tous trois dans le même champ de la lunette.

Quant aux Observations de Vénus, celles du 20 & du 21 Avril ont aussi été dans le cas de n'être assujetties à aucune correction, par rapport à l'ascension droite, parce que Vénus étoit très-près du même parallèle de  $\zeta$  du Lion; mais en Mai la correction en ascension droite a été jusqu'à  $1' 7''$  en plus, & le 15 Juin elle a été de  $7' 7''$  en moins, comme le marquent mes calculs.

De mes vingt-une Observations de Vénus faites en Avril, en Mai & en Juin, il est à remarquer que celle du 7 Mai est propre à rectifier les Tables quant à l'inclinaison de Vénus, parce que le Soleil étoit dans le nœud de cette Planète (*Astronomie de M. de la Lande, article 1357*), & que l'Observation du 2 Juin est propre à fixer le lieu de l'aphélie, parce que (*Astronomie de M. de la Lande, art. 1318*), Vénus étoit presque dans sa plus grande digression; mais je réserve ces discussions de théorie pour un Mémoire particulier que je donnerai dans peu, & où je discuterai même les Observations de Flamsteed, faites dans des circonstances pareilles, & propres à fixer les principaux élémens de la théorie: & je ferai en sorte de décider, autant qu'il me sera possible, la question du vrai mouvement de l'aphélie de Vénus; savoir, si effectivement M. de la Lande a fait ce mouvement trop grand, comme on est presque tenté de le croire d'après M.<sup>rs</sup> Halley & Cassini. Enfin je termine ce Mémoire par les Observations que voici, & qui sont, comme je l'ai dit, accompagnées de leurs calculs & des conséquences que j'en ai tirées.

*Position apparente des Étoiles qui ont servi à déterminer les lieux géocentriques de Vénus, observés en Avril, en Mai & en Juin 1772.*

<i>γ</i> du Lion, en Avril 1772, <i>Connoissance des Temps</i> , <i>année 1769, p. 203.</i>	{	Ascension droite.....	150 <sup>d</sup> 59' 55"
		Déclinaison boréale.....	24. 32. 33.
		Hauteur de l'instrument.....	65. 43. 44.
		Correction des hauteurs apparentes....	— 0. 57.
		Correction de l'instrument en degrés pour l'ascension droite.....	+ 3. 21.
<i>♂</i> du Lion, en Mai 1772, <i>Connoissance des Temps</i> , <i>année 1764, p. 99.</i>	{	Ascension droite.....	165 <sup>d</sup> 29' 37"
		Déclinaison boréale.....	21. 46. 10.
		Hauteur de l'instrument.....	62. 57. 17.
		Correction de l'instrument en degrés	
		pour l'ascension droite.....	+ 2. 45.



Arcturus, en Mai 1772. <i>Connoissance des Temps</i> , année 1763, p. 93.	{	Ascension droite.....	211 <sup>d</sup> 20' 8"
		Déclinaison boréale.....	20. 24. 37.
		Hauteur de l'instrument.....	61. 33. 37.
		Correction de l'instrument en degrés, pour l'ascension droite.....	+ 2. 22.

« précédente du Bouvier, déterminée par $\delta$ du Lion & par Arcturus.	{	Ascension droite.....	218 <sup>d</sup> 45' 11"
		Déclinaison boréale.....	28. 2. 45.
		Correction de l'instrument en degrés, pour l'ascension droite.....	+ 4. 9.

Selon le Catalogue des Étoiles fixes de feu M. l'Abbé de la Caille, & selon la Connoissance des Temps, *année 1770*, page 160, « du Bouvier a une ascension droite plus grande d'une minute que celle que je donne ici ; peut-être cette différence est-elle une erreur provenant de celle que j'ai assignée à mon instrument : c'est ce que j'examinerai lorsque je vérifierai de nouveau la véritable position de mon mural. Quant à la variation de la déclinaison d'Arcturus, M. de la Lande m'a averti que dans son Catalogue des Étoiles fixes, page 213 de la seconde édition de son *Astronomie*, & pour l'espace de dix années,

$$\text{il faut lire } \left\{ \begin{array}{l} \text{vers 1750} - 3' 14'',0, \\ \text{vers 1770} - 3. 13,6, \\ \text{vers 1800} - 3. 12,9, \end{array} \right\} \text{ \& non pas } \left\{ \begin{array}{l} - 2' 14'',0. \\ - 2. 13,6. \\ - 2. 12,9. \end{array} \right.$$

OBSERVATIONS de Vénus faites au mural de  
M. PICARD, à l'Observatoire Royal de Paris, en 1772.

JOURS des Observat.	TEMPS de la pendule pour les passages au méridien.				
	VÉNUS:	ζ du Lion.	δ du Lion.	Arcturus.	ε du Bouvier.
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.
20 Avril.	2. 40. 28	8. 4. 8			
21.....	2. 41. 42	8. 0. 25			
4 Mai.	2. 57. 16	.....	8. 9. 45	11. 12. 37	11. 42. 7
5.....	2. 58. 25	.....	8. 6. 0	11. 8. 53	11. 38. 22
6.....	2. 59. 34	.....	8. 2. 16	11. 5. 8	11. 34. 37
7.....	3. 0. 41	.....	7. 58. 31	11. 1. 23	11. 30. 53
8.....	3. 1. 47	.....	7. 54. 45	10. 57. 38	11. 27. 8
9.....	3. 2. 53	.....	.....	10. 53. 54	11. 23. 23
14.....	3. 8. 12				
24.....	3. 17. 7				
26.....	3. 18. 9	.....	.....	9. 50. 25	10. 19. 55
29.....	3. 19. 49	.....	.....	9. 31. 11	10. 8. 40
2 Juin.	3. 21. 27	.....	.....	9. 24. 9	9. 53. 38
5.....	3. 22. 5				
8.....	3. 22. 23	.....	.....	9. 1. 29	9. 30. 59
10.....	3. 22. 11				
11.....	3. 22. 3				
13.....	3. 21. 38	.....	.....	8. 38. 46	
14.....	3. 21. 13				
15.....	3. 20. 56	.....	.....	8. 34. 56	9. 4. 26
16.....	3. 20. 30	.....	.....	8. 31. 10	9. 0. 40

RÉDUCTION

## RÉDUCTION DES PRINCIPALES OBSERVATIONS DE VÉNUS.

TEMPS VRAI des Observations DE VÉNUS. <i>Année 1772.</i>	Ascen <sup>t</sup> . droite de Vénus, non corrigée.	Correc <sup>t</sup> ion de l'instrument.	Ascension droite de Vénus, corrig. de l'erreur de l'instrument.	Déclinaison vraie de Vénus, corrigée de l'erreur de l'instrument.
<i>H. M. S.</i>	<i>Deg. M. S.</i>	<i>S.</i>	<i>D. M. S.</i>	<i>D. M. S.</i>
20 Avril.. 2. 43. 52	69. 52. 25	+ 0	69. 52. 25	24. 15. 26 B.
21..... 2. 45. 5	71. 6. 45	+ 0	71. 6. 45	24. 27. 16 B.
4 Mai.. 3. 0. 6	87. 10. 22	+ 72	87. 11. 34	26. 0. 12 B.
5..... 3. 1. 8	88. 23. 56	+ 72	88. 25. 8	26. 2. 40 B.
6..... 3. 2. 11	89. 37. 26	+ 67	89. 38. 33	26. 4. 39 B.
7..... 3. 3. 11	90. 50. 38	+ 67	90. 51. 45	26. 5. 49 B.
8..... 3. 4. 10	92. 3. 51	+ 67	92. 4. 58	26. 6. 29 B.
9..... 3. 5. 9	93. 17. 29	+ 25	93. 17. 54	26. 6. 29 B.
26..... 3. 16. 35	113. 1. 15	+ 10	113. 1. 25	24. 30. 7 B.
29..... 3. 17. 22	116. 15. 35	+ 0	116. 15. 35	23. 56. 6 B.
2 Juin.. 3. 17. 43	120. 26. 13	- 12	120. 26. 1	23. 4. 33 B.
8..... 3. 6. 36	126. 21. 0	- 40	126. 20. 20	21. 34. 20 B.
15..... 3. 12. 49	132. 38. 28	- 67	132. 37. 20	19. 33. 44 B.

*CALCUL des Observations de Vénus, & Détermination de l'erreur des Tables  
de la seconde édition de l'Astronomie de M. de la Lande.*

TEMPS VRAI des Observations DE VÉNUS.	Longit. géocent. observée de Vénus.	Latit. géocent. observée de Vénus, boréale.	ERREUR DES TABLES		ANOMALIE moyenne DE VÉNUS.
<i>H. M. S.</i>	<i>Sig. D. M. S.</i>	<i>D. M. S.</i>	en longit.	en latit.	<i>Sig. D. M. S.</i>
20 Avril.. 2. 43. 44	2. 11. 42. 17	2. 3. 48	- 37	- 8	6. 8. 37. 2
21..... 2. 44. 54	2. 12. 51. 0	2. 6. 32	- 31	- 12	6. 10. 13. 12
4 Mai.. 3. 0. 6	2. 27. 28. 29	2. 33. 51	- 26	- 12	7. 1. 3. 41
5..... 3. 1. 8	2. 28. 34. 42	2. 35. 27	- 23	- 17	7. 2. 39. 53
6..... 3. 2. 11	2. 29. 40. 43	2. 36. 50	- 18	- 18	7. 4. 16. 4
7..... 3. 3. 11	3. 0. 46. 31	2. 38. 6	- 12	- 14	7. 5. 52. 15
8..... 3. 4. 10	3. 1. 52. 20	2. 39. 27	- 10	- 16	7. 7. 28. 25
9..... 3. 5. 9	3. 2. 57. 53	2. 40. 40	- 13	- 18	7. 9. 4. 37
26..... 3. 16. 35	3. 20. 52. 19	2. 41. 32	- 20	- 11	8. 6. 19. 31
29..... 3. 17. 22	3. 23. 52. 47	2. 37. 25	- 25	- 12	8. 11. 7. 57
2 Juin.. 3. 17. 43	3. 27. 48. 15	2. 30. 15	- 35	- 15	8. 17. 32. 30
8..... 3. 16. 36	4. 3. 28. 5	2. 14. 56	- 46	- 12	8. 27. 8. 59
15..... 3. 12. 49	4. 9. 40. 17	1. 46. 48	- 56	- 13	9. 8. 21. 57

*Mém. 1772. II<sup>e</sup> Partie.*

*E.*

*POSITION apparente des deux étoiles  $\alpha$  du Capricorne, qui ont servi à l'observation de l'opposition de Jupiter avec le Soleil, du 19 Août 1772.*

$\alpha$ précédente du Capricorne.	Ascension droite.....	301 <sup>d</sup> 16' 1"
	Déclinaison australe.....	13. 11. 52.
$\alpha$ suivante du Capricorne.	Ascension droite.....	301 <sup>d</sup> 21' 46"
	Déclinaison australe.....	13. 13. 52.

*OBSERVATIONS de Jupiter, faites au mural de l'Observatoire Royal de Paris, en 1772.*

JOURS des Observations.	TEMPS DE LA PENDULE POUR LES PASSAGES AU MÉRIDIEN.		
	$\alpha$ précédente du Capricorne.	$\alpha$ suivante du Capricorne.	CENTRE DE JUPITER.
11 Août..	10 <sup>h</sup> 36' 51"	10 <sup>h</sup> 37' 14"	12 <sup>h</sup> 36' 51"
12.....	10. 33. 7	10. 33. 30	12. 32. 37
13.....	10. 29. 22	10. 29. 45	12. 28. 23
15.....	10. 21. 54	10. 22. 17	12. 19. 55
16.....	10. 18. 9	10. 18. 32	12. 15. 40
17.....	10. 14. 25	10. 14. 48	12. 11. 26
18.....	10. 10. 41	10. 11. 4	12. 7. 12
19.....	10. 6. 57	10. 7. 20	12. 2. 57

*CALCUL DES OBSERVATIONS DE JUPITER.*

TEMPS VRAI des Observations de Jupiter. <i>Année 1772.</i>	Ascens. droite observée de Jupiter.	Déclinaison observée de Jupiter.	Longit. géocent. observée de Jupiter.	Lat. géocent. observée de Jupiter.
		Australe.		
11 Août.. à 12 <sup>d</sup> 37' 20"	331 <sup>d</sup> 20' 39"	13 <sup>d</sup> 5' 12"		
12..... à 12. 33. 0	331. 13. 9	13. 8. 2		
13..... à 12. 28. 45	331. 5. 37	13. 10. 52		
15..... à 12. 20. 15	330. 50. 50	13. 16. 32		
16..... à 12. 16. 0	330. 43. 18	13. 19. 22	<i>Sig. D. M. S.</i>	<i>D. M. S.</i>
17..... à 12. 11. 47	330. 35. 50	13. 22. 12	10. 27. 58. 16	1. 15. 25
18..... à 12. 7. 34	330. 28. 10	13. 25. 2	60. 27. 50. 18	1. 15. 30
19..... à 12. 3. 20	330. 20. 33	13. 27. 52	10. 27. 42. 22	1. 15. 35

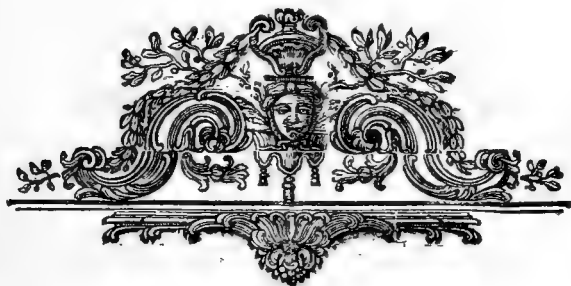
*RÉSULTAT des Observations de Jupiter.*

Opposition obs. de Jupiter le 19 Août 1772, à 18<sup>h</sup> 38' 30", Temps vrai.  
à 18. 41. 40, Temps moy.

Longitude héliocentrique observée.....	10 <sup>f</sup> 27 <sup>d</sup> 40' 10"
Calculée selon M. Wargentin.....	10. 27. 42. 55.
Calculée selon mes Tables.....	10. 27. 43. 30.
Erreur des Tables de M. Wargentin.....	+ 2. 45.
Erreur des miennes.....	+ 3. 20.

Latitude géocentrique observée, australe.....	1 <sup>d</sup> 15' 33"
Latitude héliocentrique, déduite de l'observation australe...	1. 0. 19.
Latitude calculée, selon M. Wargentin, australe.....	0. 59. 48.
Erreur des Tables de M. Wargentin, en latitude.....	— 31.

Enfin Jupiter avoit alors pour anomalie moyenne,  
selon M. Wargentin..... 4<sup>f</sup> 20<sup>d</sup> 37. 14<sup>"</sup>  
Selon moi..... 4. 20. 43. 39.



## DESCRIPTION

*De plusieurs BOUSSOLES qui sont établies dans le parc de Denainvilliers, pour observer les variations de l'Aiguille aimantée, tant en déclinaison qu'en inclinaison.*

Par M. DU HAMEL.

COMME en 1744, on parloit beaucoup d'un procédé par lequel un Médecin anglois, nommé *M. Knight*, procuroit une très-grande force magnétique à des barreaux d'acier trempé dur, j'essayai d'apprendre quel étoit son procédé; mais mes tentatives furent inutiles: feu Milord Duc de Richemont m'écrivit même que *M. Knight* étoit si éloigné de vouloir publier sa méthode, qu'on ne tireroit pas son secret, quand même on le chargeroit de guinées. Ne pouvant espérer d'obtenir le mot de l'énigme que le Docteur Anglois proposoit aux Physiciens, je tentai de le deviner; heureusement je me rappelai des expériences que j'avois faites il y avoit quelques années, avec *M. Lemaire* fils, Ingénieur pour les Instrumens de Mathématiques; elles me mirent sur la voie, & dès-lors je crus apercevoir une route qui devoit me conduire à la résolution du problème Physique qui excitoit ma curiosité.

Mes espérances se sont réalisées, puisque je suis parvenu à faire des barreaux d'acier, au moins aussi chargés de la vertu magnétique que ceux qui nous étoient venus d'Angleterre, comme on le peut voir dans le volume des Mémoires de l'Académie, publié en 1745.

Comme il seroit superflu de répéter ici ce qu'on peut trouver à l'endroit cité, je me contenterai, pour en rafraîchir la mémoire, de rapporter un seul fait: le voici en peu de mots.

Si l'on touche avec une pierre d'aimant un barreau d'acier

qui ait, si l'on veut, deux pieds de longueur, on remarque que la plus grande force magnétique de ce barreau, est à l'extrémité par laquelle on a fini la touche; & si l'on scie avec de l'émeri pour ne point causer d'ébranlement, deux ou trois pouces de l'extrémité de ce barreau, on trouve qu'il a beaucoup plus de force que ce qui en reste; de sorte qu'on peut, en cet état, le comparer aux petits barreaux qui nous avoient été envoyés d'Angleterre. Je n'en suis pas resté-là, & plusieurs personnes engagées, par la découverte que nous venons d'annoncer, se sont occupées de faire des barres magnétiques. M. Antheaume s'étant joint à moi, qui étois pourvu d'excellentes barres magnétiques, de deux pieds six pouces de longueur, nous sommes parvenus à remplir supérieurement une seconde propriété qu'avoient les aimans artificiels de M. Knight, elle consiste à employer ces aimans artificiels avec plus de succès que les naturels, pour communiquer aux aiguilles des boussoles une grande force magnétique. Nous avons fait, de plus, des faisceaux magnétiques d'une grande force, & des aimans artificiels en forme de fer à cheval. M. l'abbé Carron nous en a fait voir un exécuté suivant mon principe, qui pesoit neuf livres, & qui portoit plus de quatre-vingts livres; M. Antheaume de son côté a imaginé des moyens de diminuer le frottement des aiguilles de boussoles sur leur pivot; ces moyens sont représentés (*fig. 1, 2 & 3*). M. Antheaume, pour empêcher que ces aiguilles très-mobiles ne fussent volages, a collé sous la rose, de petites ailes de papier très-légères, qui ayant de la peine à diviser l'air, empêchoient les trop grands mouvemens de cette rose.

J'abrège tous les détails qu'on trouve dans les Mémoires de l'Académie, année 1750; mais je crois devoir rapporter encore un moyen très-ingénieux & fort simple, que M. Antheaume a employé pour faire des barreaux magnétiques, sans le secours d'aucun aimant, ni naturel ni artificiel: voici une idée fort abrégée de son procédé. M. Antheaume remarqua qu'en plaçant un barreau de fer, tel qu'il soit, dans la direction de l'axe magnétique, il acquéroit une très-petite force

magnétique, qui se réduisoit à avoir des pôles qu'on connoît en présentant ce barreau à une aiguille aimantée : cette vertu, à la vérité, n'est que passagère, & elle ne subsiste plus quand on ôte le barreau de l'axe magnétique ; mais M. Antheaume a su profiter de cette légère impression de magnétisme pour, en conservant le barreau dans l'axe magnétique, frotter assez long-temps de petites verges de fer, grosses comme de fortes broches à tricoter, aux deux bouts desquelles il attachoit une masse de fer, comme seroit un étai à main. Par ce moyen il a rendu les broches capables d'attirer de petites parcelles de limaille ; & en formant, avec un nombre de ces broches, un petit faisceau qui lui a servi à toucher des broches un peu plus grosses, il est parvenu, par degrés, à faire des aimans artificiels très-bons : voici encore un fait qui me paroît mériter de trouver place ici.

M. Antheaume desirant avoir un faisceau magnétique comme les miens, nous cherchames chez un Marchand de fer, des barreaux d'acier d'Angleterre, le plus parfait qu'il nous fût possible ; après les avoir fait limer & réduire aux dimensions que nous desirions, comme nous voulions les avoir fort durs, nous les portames chez un Ouvrier qui faisoit des noix pour des moulins à café, lui recommandant de les tremper en paquet le mieux qu'il lui seroit possible, ce qu'il exécuta : mais quelle fut notre surprise quand nous vîmes qu'avec nos meilleurs barreaux, nous ne pouvions leur procurer qu'une force magnétique très-foible ; nous les mîmes rougir dans une cheminée, au milieu du charbon de bois, & nous les trempames à l'ordinaire dans de l'eau froide ; alors ils reçurent très-bien la vertu magnétique. Oseroit-on, pour expliquer ce fait si singulier, dire que par la trempe en paquet, on avoit surchargé cet acier de soufre, & qu'on l'avoit presque réduit à l'état de la mine de fer qui ne contracte point la vertu magnétique ? Mais je m'écarte de mon objet qui consiste à décrire les boussoles qui m'ont servi pour mes observations.

Ces boussoles sont établies chacune sur un pilier de pierre



de taille, dans différens bosquets du parc de Denainvilliers. Il y en a quatre de déclinaison, & deux d'inclinaison; je les distinguerai par les chiffres Romains I, II, III, IV, V, VI. Toutes ces aiguilles sont faites avec de l'acier d'Angleterre, trempé dur, & touchées avec nos barreaux; ainsi elles avoient une grande force magnétique : le pivot qui les supporte, est reçu aux unes dans des chapes d'agate bien travaillées, & aux autres dans des chapes de cuivre bien écoui; on a fait en sorte que les aiguilles de déclinaison fussent parfaitement de niveau, après avoir été aimantées. Toutes ces attentions devant rendre nos aiguilles très-sensibles, il étoit d'autant plus important d'empêcher qu'aucune cause extérieure ne pût les faire varier; ainsi, pour prévenir que le fer, qui est toujours dans les bâtimens, ne dérangerât leur vraie direction, nous les avons placées dans différens bosquets sur des piédestaux de pierre de taille, évitant d'employer dans leur construction, ni brique ni mortier de ciment, de crainte qu'un peu de fer revivifié par la cuisson, ne pût agir sur nos aiguilles : voilà des considérations générales, parlons maintenant de chacune de ces boussoles en particulier.

La *figure 1.<sup>re</sup>* représente une petite boussole de déclinaison, dont l'aiguille est soutenue suivant le système de M. Antheaume, dont nous avons parlé plus haut.

Numéro I.<sup>er</sup>

*a* est une boîte de cuivre qui renferme l'aiguille.

*b* son couvercle.

La *figure 2* représente cette boîte coupée verticalement par son axe.

*b* le couvercle; *a* le corps de la boîte dans laquelle on voit l'aiguille posée sur son pivot, dont nous donnerons dans la suite la description.

Cette aiguille qui n'a que six pouces de longueur, est donc renfermée dans une boîte *a*, sous une glace qui est recouverte par le couvercle *b*; de plus, pour qu'elle soit plus à l'abri de l'humidité, cette boîte est encore recouverte d'une calotte de cuivre *cc*; en *d* est une charnière, & en *e* une serrure entièrement de cuivre, même les ressorts & la clef. Le

dossieret de pierre *f* est destiné à recevoir la calotte, pour que quand on l'ouvre, la charnière *d* ne soit point fatiguée.

Moyennant ces attentions, l'aiguille est parfaitement à couvert de l'humidité; aussi depuis plusieurs années qu'elle est en cet état, elle n'a pas été attaquée de la rouille: il nous reste maintenant à expliquer la disposition que nous avons donnée au support de l'aiguille, pour qu'elle fût très-mobile.

Au milieu & au fond de la boîte *a* représentée par *AB* (*fig. 3*), il s'élève bien à-plomb un petit pilier de cuivre *CD*: au centre de la partie supérieure *D* de ce pilier est un petit trou pour recevoir la pointe d'en bas du fuseau de cuivre *EF*; & afin que ce fuseau se place exactement dans la verticale, on a ajouté à la moitié de sa hauteur, quatre balanciers semblables à ceux marqués *G* (*fig. 3*), ayant soin d'ajuster tellement les petits poids *G*, que les deux pointes *EF* du fuseau fussent exactement placées dans la verticale: on pose sur la pointe *F* du fuseau, la chape *H* de l'aiguille *IK*, qui se termine en pointes à ses deux extrémités; néanmoins pour pouvoir observer les degrés avec encore plus d'exactitude, j'ai attaché sur l'aiguille, avec de la cire, deux fils d'acier très-fins *LL*, qui approchent tout près du limbe où sont marqués les degrés.

Par cette disposition, s'il y avoit un petit arêt en *F*, elle tourneroit sur l'autre pivot marqué *E*, & cette aiguille est en même temps très-sensible & très-mobile, puisqu'en lui présentant successivement à 15 pieds de distance, les deux pôles d'une de nos grandes barres, la direction de l'aiguille change de place.

Numéro II. La *figure 4* représente une plus grande boussole de déclinaison, elle est établie dans un autre bosquet sur un pilier de pierre de taille *AB*: pour recevoir l'aiguille qui a quinze pouces de longueur, nous avons fait creuser dans une pierre de liais bien dure, une cuvette *C* (*fig. 4, 5 & 6*), qui a seize pouces de diamètre en dedans, & quatre pouces de profondeur; sur les bords de cette cuvette, qui ont un pouce & demi d'épaisseur, est ménagée une feuillure pour recevoir

une

une glace sous laquelle est un limbe d'argent qui porte les divisions ; au centre de cette cuvette s'élève le style *E* (fig. 7), pour supporter l'aiguille *HH*, qui a 15 pouces de longueur, 12 lignes de hauteur verticale, & une ligne d'épaisseur. Ceci demande quelque éclaircissement.

Comme nous nous étions assurés qu'un barreau d'acier un peu fort prend plus de force magnétique, qu'un qui seroit plus léger, il nous restoit à connoître si cette augmentation de force est plus considérable que ce qu'on doit perdre par les frottemens qui sont assurément plus grands quand on emploie des aiguilles pesantes que lorsqu'on en prend de légères.

Pour savoir à quoi nous en tenir, & afin de mettre en comparaison deux aiguilles, dont l'une seroit pesante, & l'autre très-légère, j'ai beaucoup augmenté les dimensions de l'aiguille *numéro II*. Mais comme nous avons remarqué que dans une règle d'acier d'un pouce de largeur, il se rencontroit des filets qui sont plus durs, & pour ainsi dire plus acier que d'autres, nous avons soupçonné que ces parties dures prenant plus de force magnétique que les autres, donneroient une fausse direction à l'aiguille si elles se trouvoient placées diagonalement dans la longueur de notre large aiguille. Pour éviter cet inconvénient, nous avons pris le parti de placer nos aiguilles sur le champ, comme on le voit en *D* (fig. 7) ; & au milieu ou au point *D*, la règle *HH* étoit creusée en forme de gouttière pour recevoir la chape, dont l'ouverture conique répondoit exactement au milieu de l'épaisseur de la règle : il est sensible que s'il y a des filets d'acier plus durs les uns que les autres, ils ne peuvent pas produire une erreur considérable, puisque l'aiguille n'a qu'une ligne d'épaisseur\*.

\* Comme on a soupçonné, & ce n'est peut-être pas sans raison, que l'électricité pouvoit causer les variations qu'on remarque dans les aiguilles, je me suis proposé d'ôter la glace qui recouvre mon aiguille, & qui pourroit retenir l'électricité ; j'ai donc mis à la place de cette glace un fort carton bien battu, qui étoit ferme comme une

planche ; j'y ai fait une ouverture vis-à-vis le limbe d'argent qui portoit les degrés : j'ai couvert cette ouverture avec un morceau de corne très-transparente. On verra, lorsque je rapporterai les variations de toutes ces boussoles, que celle-ci n'en a pas été plus exempte que les autres.

*E* (fig. 7) est le style ; *FF* représente le fond de la cuvette qui est solidement scellée sur le pilier *AB* (fig. 4).

L'aiguille est tenue à couvert de la pluie, & même de l'humidité de l'air, par une glace qui recouvre toute la cuvette de pierre, & qui est scellée dans la feuilure avec de la cire ; & en outre par un couvercle de cuivre *G* (fig. 4), qui joint exactement l'extérieur de la cuvette de pierre, bien entendu qu'on l'ôte lorsqu'on veut observer. On a, comme à la boussole, *numéro I.<sup>er</sup>* attaché avec de la cire aux deux extrémités de cette aiguille, des pointes d'acier très-déliées *HH* (fig. 7), qui indiquent très-précisément les degrés gravés sur le limbe d'argent qui est sous la glace.

**Numéro III.** Pour m'assurer laquelle des deux aiguilles, savoir une pesante, telle que celle que je viens de décrire, & une autre très-légère, seroit la plus avantageuse pour connoître les variations, j'ai fait faire, avec tout le soin possible, une aiguille très-légère, pas plus grosse qu'une broche à tricoter ; elle a été placée dans un bosquet particulier sur un pilier de pierre de taille. Mais pour éviter de multiplier inutilement les figures, je ne l'ai pas représentée sur la planche ; le peu que je viens de dire étant suffisant pour en donner une idée juste ; & on verra par le détail de nos observations, que l'aiguille pesante est au moins aussi sensible que la légère : je dois seulement prévenir que celle-ci n'a que 7 pouces de longueur.

**Numéro IV.** Pour connoître encore plus sensiblement les variations des boussoles, j'ai fait établir dans un bosquet séparé une boussole de déclinaison, dont les degrés marqués sur le limbe, ont un pied & sont divisés en 60 minutes.

Il en faut donner la description. La *figure 8* représente la position de cette grande boussole relativement au limbe ; *A* est la boîte où est renfermée l'aiguille ; *B* est le limbe qui en est éloigné de 52 pieds. La ligne ponctuée *NS* indique la direction nord & sud, elle est coupée à angle droit par la ligne *EO* qui est orientée est & ouest, & la ligne *AB* désigne la déclinaison actuelle de l'aiguille ; le limbe ne s'étend pas jusqu'aux lignes nord & ouest, parce qu'on

l'a placé à l'endroit où se font, depuis nombre d'années, les variations : si elle venoit à excéder l'étendue du limbe, nous serions obligés de l'augmenter ou de le changer de place, mais probablement cela n'arrivera pas. L'aiguille (*fig. 9*) de cette boussole a 14 pouces de longueur, elle est formée par deux lames qui se touchent exactement, excepté au milieu de leur longueur, à l'endroit *C* où elles sont courbées sur leur plan pour recevoir la chape dans laquelle doit entrer le style qui supporte l'aiguille. Les deux lames forment donc, par leur réunion, une seule aiguille, comme on le voit en *D* : on aperçoit vers l'extrémité de cette aiguille, deux pointes d'acier *a b* très-déliées qui s'élèvent perpendiculairement; elles servent de points de mire, comme nous le dirons dans la suite. Cette aiguille est établie dans une gouttière de pierre de liais *E* (*fig. 10*), qui représente la boussole vue en plan, sans son couvercle de pierre de liais, qu'on voit en *f* (*fig. 11 & 12*).

*b* (*fig. 11*) est le fond de cette gouttière qui est encastrée d'une partie de son épaisseur dans la pierre de taille qui forme le dessus du pilier *ab*, sur lequel est posée la boussole, comme on le voit à la *figure 11* qui représente le pilier coupé par une ligne parallèle à l'aiguille; on la voit dans sa longueur posée sur son pivot, qui est au-dessus de *b*, comme elle est représentée en plan à la *figure 10*; la hauteur *ab* (*fig. 11*) de ce pilier est de 4 pieds; sa largeur *ed* de 22 pouces: on voit donc dans cette figure la coupe de la gouttière de liais encastrée dans la pierre de taille, qui fait le couronnement de ce pilier, & l'on aperçoit comment l'aiguille est placée sur son pivot dans cette gouttière, ainsi que les fils d'acier qui servent de points de mire, pour, par la prolongée de la ligne depuis *A* jusqu'à *B* (*fig. 8*), apercevoir à quelle division du limbe répond le plan de l'aiguille.

Les deux bouts de cette gouttière de liais sont fermés par des glaces enchâssées & mastiquées dans un cadre de menuiserie, qui joint la partie intérieure de la gouttière de liais; & pour intercepter le passage, non-seulement à l'humidité, mais même à l'air, on a enduit l'épaisseur du cadre qui entre

dans la gouttière de liais, d'une couche de cire & de suif, de sorte que si l'on remplissoit d'eau la gouttière, elle ne se videroit pas. Quoique cette gouttière ait un couvercle de pierre de liais qui fait saillie d'un pouce tout au pourtour de la gouttière de liais, dont les bords sont reçus dans une feuillure creusée dans le couvercle, ainsi qu'on le voit à la *figure 12*; j'ai en outre mis aux quatre angles du pilier de pierre de taille quatre forts montans de bois, retenus par des traverses assemblées à tenons & mortaises avec les montans; toute la partie d'en haut qui renferme la boussole est garnie de panneaux de menuiserie qui forment un petit toit *G*, comme on le voit à la *figure 12*. Aux deux bouts *ff* de cette menuiserie (*fig. 11*), sont deux petits volets vitrés, à charnière de cuivre; car on ouvre ces volets quand on veut observer, il n'y a que les glaces au bout de la gouttière de liais qui restent en place, & au travers desquelles on fait les observations.

Pour tenir cette boussole encore plus à l'abri des impressions de l'air, nous avons rempli l'espace qui est entre la gouttière de liais & la menuiserie avec de l'étaupe, que nous avons bien foulée; enfin, le tout est recouvert d'une toile bien ferrée, enduite des deux côtés de plusieurs couches de rouge broyé à l'huile.

*H* (*fig. 13*) est le limbe fait d'une bande de pierre de liais très-dure, dans laquelle, sur la face opposée aux divisions, est noyée & scellée en plâtre une forte barre de fer: comme elle est à 52 pieds de l'aiguille, il n'y a point à craindre qu'elle influe sur sa direction; la face de devant de ce limbe est divisée par degrés, qui ont chacun 1 pied de largeur, & chaque degré est subdivisé en minutes. Cette bande de pierre a 6 pieds de longueur, sur 6 pouces de largeur. Il est vrai que, rigoureusement parlant, le limbe qui est droit devrait être courbe; mais on aperçoit aisément qu'une portion de cercle de 6 pieds d'étendue, & qui est à 52 pieds de son centre, s'éloignant peu d'une ligne droite, il ne peut pas y avoir une différence sensible dans la projection du rayon visuel.

On voit en *K* (*fig. 13 & 14*), comment ce limbe est soutenu

par deux piliers de pierre de taille, dont le haut est entaillé de quelque chose de plus que l'épaisseur du limbe, qui en outre est fermement assujéti dans son entaille par de forts crampons de fer; la hauteur de ces piliers est de 3 pieds 6 pouces, leur grosseur est de 8 pouces en carré, non compris la saillie du socle & celle du couronnement: il y a des personnes qui ont la vue assez bonne pour, en prenant la direction de l'aiguille, apercevoir sur le limbe les degrés où elle répond.

Mais comme plusieurs n'ont pas la vue assez étendue pour cela, un aide qui est auprès du limbe place l'indicateur *L* à l'endroit que lui prescrit celui qui se dirige sur les points de mire; avec ce secours, il n'y a personne qui ne puisse observer très-exactement les variations de cette boussole.

Numéro V.

Les figures 15 & 16 représentent une boussole d'inclinaison; elle est formée du cercle de cuivre *AA*, qui a 1 pouce  $\frac{1}{2}$  de largeur, il porte de chaque côté une traverse semblable à *BB* (fig. 15), qui sert à soutenir l'axe de l'aiguille aimantée *CC*; le limbe *AA*, a à chacun de ces bords une feuillure pour recevoir une glace qui y est mastiquée, pour tenir à l'abri de l'air & de l'humidité l'aiguille aimantée *CC* (fig. 15); les supports *BB* sont sous la glace, & les divisions sont gravées dans l'intérieur du limbe de cuivre *AA*. L'axe de l'aiguille repose sur deux feuillets d'agate bien polis, il y a en outre deux pareils feuillets qui sont placés verticalement pour que les deux bouts de l'axe ne reçoivent aucun frottement. Le limbe *AA* est tenu dans une situation verticale, par une forte pièce de cuivre *DD* (fig. 15), à laquelle il est soudé; cette pièce de cuivre est en outre soudée sur un plateau rond de cuivre *EE* (fig. 15 & 16), on le voit en plan à la figure 16, indiqué par les mêmes lettres qu'à la figure 15; ce plateau porte à sa circonférence un index *F*, dont nous allons dire l'usage. Il faut concevoir que le plateau *E* peut tourner sur la pièce *GG* (fig. 16), qui est fermement attachée par des vis *H*, à la pierre de taille formant le couronnement du pilier qui soutient cette boussole & ce plateau fixe; *GG* porte des divisions par degrés & demi-degrés.

Pour apercevoir l'usage de ces divisions, il faut se rappeler

que les aiguilles des boussoles d'inclinaison ne marquent exactement l'élévation des pôles magnétiques, que quand on met l'aiguille d'inclinaison sur la déclinaison indiquée par les aiguilles de déclinaison. On y parvient, à notre boussole, en mettant l'index *F* sur le degré de déclinaison indiqué par les autres boussoles; & comme cette déclinaison varie, il étoit nécessaire de rendre le plateau *E* mobile: je ferai seulement remarquer qu'il faut que l'index *F* soit placé exactement dans le même plan que l'aiguille *CC*, & je l'ai mis à un autre endroit, parce qu'il n'auroit pas pu être aperçu, si je l'avois mis sous le limbe *AA*, qui est sa vraie place. Cette boussole est sur un pilier & couverte d'un dôme de cuivre entièrement semblable à celui de la première boussole de déclinaison *fig. 1.<sup>re</sup>*

Outre la boussole d'inclinaison que je viens de décrire, nous en avons placé une seconde dans un autre bosquet, qui ne diffère de la première, que parce que l'aiguille est beaucoup plus légère. On verra par le détail de nos observations, que toutes les deux ont varié; mais la légère plus que l'autre, apparemment parce qu'elle éprouvoit moins de frottement. Il est vrai que cette boussole légère, au lieu d'être couverte par une calotte de cuivre, l'est par une cage de glace; mais je n'aperçois pas que cette différence puisse influencer sur les variations des boussoles: je dois prévenir que, quoique j'aie orienté toutes mes boussoles sur une bonne méridienne, mon but n'a pas été de fixer plus exactement qu'on ne fait ordinairement, les variations vraies, mais d'observer, avec le plus de précision qu'il me seroit possible, les variations accidentelles des boussoles, tant d'inclinaison que de déclinaison.

Il est bon d'être prévenu que la boussole *n.<sup>o</sup> I.<sup>re</sup>* sur la planche, comprend les *figures 1, 2, 3*; celle cotée *II*, comprend les *figures 4, 5, 6 & 7*; que celle cotée *III*, est une boussole de déclinaison légère, qui n'est pas représentée sur la planche; que celle *n.<sup>o</sup> IV*, comprend les *figures 8, 9, 10, 11, 12, 13 & 14*; que la boussole d'inclinaison *n.<sup>o</sup> V*, comprend les *figures 15 & 16*; & celle *n.<sup>o</sup> VI*, est une boussole d'inclinaison légère qui n'est pas marquée sur la planche.





## SECONDE MÉMOIRE SUR LE VARECH.

Par M.<sup>rs</sup> FOUGEROUX DE BONDAROY & TILLET.

Nous avons donné dans le premier Mémoire, M. Tillet & moi, les observations que nous avons faites par ordre du Roi, sur les côtes de Normandie, au sujet des effets pernicioeux qu'on prétendoit, dans le pays de Caux, être produits par la fumée du Varech, lorsqu'on brûle cette plante pour la réduire en soude.

Il étoit essentiel que nous nous bornassions, dans le premier compte que nous en rendions, à exposer ce qui intéressoit le plus le Gouvernement, & ce qui devoit être le motif principal de nos recherches; il nous tarδοit aussi de détromper sur des inconvéniens que l'on avoit attachés à cette fabrique, par un défaut d'examen assez approfondi; enfin, il étoit flatteur pour nous, en rendant justice à la vérité, de pouvoir espérer que nous donnerions une solidité & une consistance durable à une branche de commerce considérable & utile à l'État, qui avoit essuyé des chocs en différens temps.

Cependant les observations que nous avons faites pour démêler la vérité, nous ayant conduits à l'examen de plusieurs faits curieux, concernant l'histoire de ces plantes, & nous en ayant appris d'autres qui tendent à les rendre plus abondantes sur nos côtes, & par conséquent qui concourent à augmenter la fabrique de la soude, nous avons cru devoir les communiquer à l'Académie dans ce second Mémoire.

Nous nous proposons donc ici de réunir les observations sur les plantes apelées *Varech*, *Vraicq*, *Sar* ou *Goëmon*; & après avoir décrit différentes espèces que l'on brûle pour les réduire en soude sur les côtes de Normandie, nous parlerons

de leur accroissement successif, & de leur reproduction (a).

On y verra une question résolue, & qui pouvant mettre à portée de réformer un article de l'Ordonnance concernant la récolte du Varech, méritoit de notre part une grande attention (b).

On demandoit depuis long-temps s'il est plus avantageux pour la reproduction du Varech, de couper cette plante, ou s'il convient plutôt de l'arracher; nous espérons que le Ministère pourra se décider d'après des expériences que nous avons répétées en différens endroits; elles seules peuvent conduire avec sûreté pour appuyer la loi sur des fondemens inébranlables.

*Lieu où croît cette Plante & ses différentes espèces.*

On donne indifféremment le nom de *Varech*, *Vraicq*; dans d'autres pays, de *Sar* ou *Goëmon*, à des plantes de plusieurs espèces, qui pour végéter & se multiplier, doivent être baignées par l'eau de la mer, ou continuellement dans les *bas-fonds*, ou au moins deux fois en vingt-quatre heures, par les retours successifs de la marée; car il n'en vient point dans les parties élevées des côtes, qui ne sont lavées que dans les grandes marées. Nous avons même remarqué que la pousse du Varech sur de *grands fonds*, ou sur les parties qui se découvrent seulement dans les grandes marées, est plus prompte & plus vigoureuse que celle du Varech placé sur les rochers qui restent à sec tous les jours.

On trouve ces plantes sur des fonds, ou de *roches* ou de *galet*, seulement quand ces dernières pierres roulées, sont

---

(a) M. Fougroux, l'un de nous, avoit dessiné les plantes de Varech, mais leur multiplicité auroit occasionné des frais de gravures, & l'obligation où on auroit été de les réduire sous un petit format, l'a engagé à réserver ces

dessins pour un ouvrage particulier.

(b) L'Ordonnance de la Marine, du mois d'Août 1681, titre X, de la coupe du *Varech* ou *Vraicq*, *Sar* ou *Goëmon*, emploie toujours le mot de *couper*.

adhérentes au fond, & qu'elles y sont retenues par du sable battu. Nous en avons vu qui sembloient porter immédiatement sur le sable, mais en les examinant plus attentivement, & en faisant fouiller, on voyoit que sous ce sable étoit le fond de roche qu'il recouvroit, & que la racine de la plante enfoncée, portoit sur la pierre.

Les digues, les jetées en bois, les vaisseaux qui ont séjourné quelque temps dans un port, en sont souvent couverts au-dessous de la ligne d'eau; enfin, on trouve le varech sur les coquilles, ou sur toutes autres substances qui sont retenues à un fond solide, & qui peuvent être baignées par l'eau de la mer, sans être emportées par la vague. Nous prévenons cependant que l'on ne trouve plus de varech, quand on fait draguer dans des endroits profonds.

Les grandes espèces de varech que l'on emploie particulièrement à la fabrique de la soude, ne se soutiennent sur leurs tiges, que lorsqu'elles sont couvertes d'eau; car lorsque la mer découvre le rocher qui les porte, elles sont couchées dessus, & tapissent entièrement la pierre.

Comme le varech vient sur la pierre, sur la base des *falaises* ou sur des roches qui s'en sont détachées, on conçoit que l'on ne doit point le trouver sur les côtes plates & sablonneuses; aussi est-il moins commun dans la Méditerranée, où l'on peut aborder dans presque toutes les anes.

Donnons une idée de ce qu'on appelle *falaises*. La mer est bordée, depuis la côte de Picardie, dans le pays de Caux & dans la haute Normandie, par des montagnes, dont le fond est une pierre de la nature de la craie, coupées, le plus souvent à pic, & élevées au-dessus du niveau des hautes marées, à Mers de 250 pieds, à Dieppe de 200, à Fécamp de 312 à 350 pieds (c).

Les pierres qui composent ces montagnes, semblent être retenues de distance en distance par des lits ou chaînes d'un

(c) Mers, est le dernier village de la côte de Picardie, proche la rivière de la Bresle, qui sépare la Picardie de

la Normandie. Le Tréport situé de l'autre côté de la rivière est le premier Bourg de la Normandie.

caillou brun, qui forment des lignes horizontales & parallèles, le plus souvent éloignées les unes des autres, de deux à trois pieds seulement.

Il s'écroule (& souvent au risque de ceux que le travail conduit le long de ces montagnes) particulièrement dans les dégels, ou après de grandes humidités, des parties considérables de ces falaises, qui en tombant, roulent dans la mer. C'est sur la base de ces falaises, qui s'étend assez loin dans la mer, ou sur ces grosses masses éboulées, que s'attache le varech; il y vient souvent en si grande quantité, & les plantes sont si proches les unes des autres, que les pierres en sont entièrement couvertes.

Nous verrons dans un moment que, dans les *fucus* qui servent particulièrement à la fabrique de la soude, les uns sont adhérens à la roche par un large pédicule (*Planche I, fig. 6, 7 & 8*) qui forme un empatement, & il prend la figure de la petite pierre sur laquelle croit la plante (*fig. 8*); d'autres ont pour racines des espèces de griffes qui les retiennent au rocher (*Pl. II, fig. 16 & 17*): nous citerons ces différences à mesure que nous parlerons des espèces de *fucus*.

Quoique les tiges de ces *fucus* soient ployantes & qu'elles obéissent à la lame, ces plantes sont quelquefois emportées, flottent sur l'eau, & sont jetées par la mer sur ses bords. Certaines espèces dont la base du pédicule est moins large, & a moins de prise sur le roc, ou qui étant parvenues à leur dernier terme d'accroissement ont plus de longueur, étant plus exposées à la force de la vague, se cassent aisément, sont sujettes à être emportées par les flots, & à être jetées sur le rivage.



Nous avons dit dans le premier Mémoire (*Mém. de l'Acad. année 1771, p. 325*) que ce varech d'échouage est souvent assez abondant sur une des côtes de la basse Normandie pour fournir les engrais d'une année à dix-neuf villages voisins.

Il y a certaines anes où la mer en est couverte; les cables des vaisseaux en sont si chargés qu'on a peine à les tirer.

Ces plantes de mer sont de bien des espèces, & nous ne nous proposons pas d'en donner ici une histoire complète.

Pour n'en point omettre, il faudroit avoir fait draguer dans différens fonds qui ne découvrent jamais & dans différens mois de l'année; car l'on fait qu'il y a des plantes particulières à ces fonds, que quelques-unes n'ont acquis toute leur perfection que dans certaines saisons & au bout d'un certain temps. Nous nous bornerons à parler ici de celles dont on fait usage sur les côtes de Normandie pour la fabrique de la soude.

*ESPÈCES de Fucus que l'on brûle en Normandie pour la fabrique de la Soude.*

- |  |   |                            |   |
|--|---|----------------------------|---|
| <b>RACINES</b><br>à<br>empatement.                   |   | à feuille de Chêne.        | { N.° 1. <i>Fucus sive alga latifolia major dentata</i> . Raii, Synopf. 3, ou <i>Fucus fronde dichotomâ ferratâ ad apices tuberculatâ</i> . Linn. Spec. plant. 1  |
|  |   | à vessies.                 | { N.° 2. <i>Fucus sive alga marina angustifolia, vesiculas habens</i> . Raii. Reaumur, Mém. de l'Acad. année 1711.  |
|  |   | à vésicules.               | { N.° 3. <i>Fucus sive Quercus marina, vesiculas habens</i> . C. B. pin. <i>Fucus fronde dichotomâ integrâ, caule medium folium transcurrente, vesiculis verrucosis terminalibus</i> . Linn. Spec. plant. 2.              |
|  |   | Nouveux ou qui a des nœuds | { N.° 4. <i>Fucus maritimus, vesiculis majoribus singulis, per intervalla dispositis</i> . Morif. Hist. Oxon. part. III. <i>Fucus caule compresso, dichotomo medio ramorum in vesiculam dilatata</i> . Linn. Spec. plant. |
| <b>RACINES</b><br>formant<br>un petit<br>empatement. |  | à lacets.                  | { N.° 5. <i>Fucus in ligulas longas, angustas, &amp; subrotundas divisus</i> . Reaum. Mém. de l'Acad. année 1711.   |
|  |   | à silique.                 | { N.° 6. <i>Fucus angustifolius, vesiculis latis siliquarum æmulis</i> . Raii, Hist. p. 73; ou <i>Fucus caule tereti ramossissimo, pedunculis alternis vesiculis oblongis acuminatis</i> . Linn. Spec. plant.             |

RACINES en griffe au lieu d'empatement.	{	à main.	{ N.º 7. <i>Fucus arboreus, polychides, caule plano &amp; tortuoso.</i> Hist. de l'Acad. année 1711. Raii, Hist. pag. 75.
		Baudrier.	{ N.º 8. <i>Fucus folio singulari, longissimo, lato; in medio rugoso.</i> Raii, Synopf. 6. Le Baudrier, Hist. de l'Acad. 1711.

Les quatre premières plantes que nous venons de nommer, servent particulièrement à la fabrique de la soude; elles sont en plus grande quantité que d'autres sur les côtes de Normandie, & connues pour y donner le plus de soude & de meilleure qualité.

Numéro 1.<sup>er</sup> Le Numéro 1.<sup>er</sup> est commun sur les côtes de Picardie, & principalement sur celles de Normandie. M. de Reaumur qui l'a observée sur les côtes d'Aunis & de Poitou, l'a décrit & fait graver dans les Mémoires de l'Acad. de l'année 1711. Nous nous appuierons souvent pour les détails de la fructification de ceux qu'en a donné cet habile Physicien.

La feuille (*d*) de cette plante est grasse, épaisse & dentelée; chaque découpeure de cette feuille a quelque ressemblance avec celles du chêne, ce qui l'a fait nommer par des auteurs *Quercus maritima*. (Voyez Pl. I, fig. 5 & 9).

La plante dans la mer est d'un vert brillant, qui s'éteint & devient plus sombre à mesure qu'elle se sèche, & qu'elle a été privée d'eau; chaque division de la plante est plus ou moins large, les bords en sont toujours dentelés, mais plus ou moins profondément; une nervure principale la partage suivant sa longueur, elle est en relief sur l'une & l'autre des surfaces de la feuille. (Voy. Pl. I, fig. 3 & 5). Cette plante dans son premier état n'a que la grandeur d'une laitue, (fig. 1, a), qui sort de la graine. Cette feuille divisée à son extrémité supérieure s'étend & produit de nouvelles

---

(*d*) Nous nous servons du mot *feuille*, quoique nous convenions, qu'à parler plus strictement, la plante ne soit formée que par des découpeures,

& de nouvelles divisions de la même feuille. Nous développerons cette idée dans la suite de ce Mémoire.

découpures, (fig. 1, 2, 3 & 4); toute la plante n'est donc formée que par des divisions de la première feuille; ces feuilles toujours divisées en deux parties, ont servi aux Botanistes de caractères pour partager les *fucus*; & ceux à deux divisions ont été mis dans la Dychotomie.

L'extrémité de la feuille est plus ou moins large, & plus ou moins arrondie, elle se termine par une simple dentelure, ou le plus souvent, étant dentelée profondément, la nervure partage également la feuille; ces différences sont autant de variétés dans cette espèce.

Les feuilles de cette plante sont garnies de filets blancs, rassemblés en espèce de houpes, & dispersés çà & là; ces aigrettes très-apparentes sur le varech frais, font un plus bel effet encore, lorsqu'on les examine baignées par l'eau de la mer. Ils forment, en se séparant, une houe blanche agréable, (Pl. I, fig. 5 & 9, xx)

M. de Reaumur a regardé ces filets comme les fleurs mâles de la plante, il avoue cependant n'avoir jamais vu leurs extrémités garnies de *sommets*, comme le sont la plupart des étamines fécondantes; mais on connoît différentes sortes d'étamines. Il y en a qui paroissent n'être que des filets, & qui sont cependant des sommets, comme dans le *Riccia* & l'*Anthoceros* de Micheli. Ces plantes étant aussi des *fucus*, il y a tout lieu de croire qu'elles doivent ressembler à nos *fucus* marins, par les parties de la fructification.

Nous avons trouvé plusieurs de ces plantes vers le mois de Septembre, dont les feuilles étoient garnies, à leurs extrémités, de petits tubercules ressemblans aux capsules des graines, qui sont plus apparents dans la plante suivante, où nous nous proposons de les examiner.

Ce *fucus* a une tige ronde, ployante, soutenue sur la pierre par un fort empatement, (Pl. I, fig. 6, 7 & 8).

On sait que les feuilles concourent, dans toutes les plantes, à favoriser leur végétation, mais leur nécessité est encore plus prouvée pour l'accroissement des *fucus* marins; & il semble, comme nous le dirons plus bas, qu'ils tirent leur nourriture

principalement par ces productions, l'empatement de la tige servant plutôt à les retenir au rocher sur lequel ils végètent.

La plante parvient ainsi à la perfection dans l'espace d'une année ou deux, & acquiert la hauteur d'un pied, de deux, & même de trois dans les bas-fonds. Nous avons remarqué que les plantes en vieillissant perdent de leur adhérence aux rochers; & les Ouvriers qui font la Soude, prétendent que la mer, dans ce temps, les enlève facilement de dessus la roche; & que cette cause, en produisant le dépérissement des anciennes plantes, concourt à leur renouvellement.

Numéro 2. On trouve fréquemment sur les côtes de Normandie le varech Numéro 2; dans certains cantons il est en plus grande abondance que le Numéro 1.<sup>er</sup>. Ce varech a des vessies plus ou moins grosses au bout des feuilles; la plante a la feuille plus ou moins épaisse, unie, souvent point dentelée, & plus ou moins large; ce sont encore autant de variétés (fig. 10).

Quelques auteurs, & M. de Reaumur dans son Mémoire, année 1711, ont pensé que les Numéros 1 & 2 étoient les deux individus; ils ont cru que l'*Alga marina latifolia* Raii, étoit le mâle, tandis que la plante à vessies placées à l'extrémité des branches que nous examinons maintenant, étoit l'individu femelle.

Les vessies que nous disons se trouver à l'extrémité des branches de cette plante, sont plus ou moins renflées, elles sont simples ou fourchues, & ont deux ou trois cornichons, (fig. 10 & 12); si l'on regarde à la loupe l'extérieur de ces vessies, on y voit de petites aspérités (fig. 11, d, e), dont les sommets sont surmontés de courts filets. Lorsque cette plante est restée long-temps hors de l'eau, il suinte de ces boutons une liqueur jaunâtre, qui a une odeur différente de celle de la plante.

Si l'on coupe ces grosses vessies au sortir de l'eau, on voit que ces boutons sont attachés (fig. 11, f, g) à l'enveloppe générale du fruit, & que toute la capacité est remplie d'une liqueur gélatineuse, plus ou moins épaisse & transparente, suivant que la plante est plus proche de sa maturité. Ray avoit regardé ces boutons comme les graines de la plante, mais M. de Reaumur



pense que ce sont les capsules qui contiennent les semences de ces plantes (*fig. 11, g*). Lorsque l'on écrase ces vessies, elles font un bruit sous les pieds en s'éclatant.

Quelquefois cette plante, au lieu d'avoir des vessies à l'extrémité de ses feuilles, n'a que des boutons peu éminens; celles-là seroient une variété dans l'individu femelle, & nous avons dit, en parlant de la première plante, que nous avions découvert sur certains pieds à l'extrémité de leurs feuilles, des tubercules ou boutons entièrement semblables à ceux de l'espèce à grosses vessies que nous examinons maintenant; quoique la partie inférieure de ces feuilles, fut aussi garnie de filets blancs, que M. de Reaumur regarde comme caractérisant l'individu mâle. Ces pieds seroient donc des hermaphrodites, qui, comme d'autres végétaux, auroient sur la même plante des fleurs mâles & des fruits; & cette observation auroit échappé à la sagacité de M. de Reaumur. (*Voy. Pl. I, fig. 5*).

Souvent l'on trouve les *fucus* dont nous parlons avec des Numéro 3. vésicules globulaires, un peu aplaties à l'endroit où elles sont attachées aux plantes, & dispersées çà & là sur les ramifications de la plante. Nous les avons désignées, d'après les auteurs qui en ont parlé, sous le n.º 3.

Ces vésicules sont plus ou moins grosses, elles sont creuses & ne contiennent qu'un réseau composé de filamens fins, déliés & transparents, (*fig. 13, h, i*).

Ces vésicules *h* qui contiennent de l'air, seroient-elles destinées à soutenir la plante, en la rendant beaucoup plus légère que le volume d'eau qu'elle déplace? Les plantes qui ont des fruits, où ces vésicules se trouvent en plus grande quantité, sont aussi celles qui ont le plus besoin de ce secours.

Nous éprouvons des difficultés pour fixer avec sûreté dans les végétaux terrestres, les vraies espèces & les distinguer des variétés; elles doivent se multiplier encore, quand il s'agit d'établir les mêmes distinctions entre des plantes marines.

Nous serions disposés à ne regarder ces trois varech que comme des variétés, parce que nous avons trouvé sur la

même racine six tiges, dont une étoit le varech à feuille dentelée avec des filets ou houpes sur les feuilles, une autre tige avoit des vésicules répandues sur les feuilles; enfin des tiges qui outre ces vésicules avoient encore des vessies au bout de leurs branches; mais nous convenons qu'ici chacune de ces tiges pourroit être provenue d'une graine particulière, qui s'étant déposée sur un empatement d'une vieille plante, auroit ainsi donné lieu à leur réunion.

Nous croyons que l'on ne peut mieux comparer la fructification de ces varech, qu'à celle d'une plante décrite par M. Marchant, dans les Mémoires de l'Académie, année 1711, sous le nom de *lithophiton terrestre, digitatum, nigrum*; avec la seule différence qu'au *lithophiton* de M. Marchant, les fleurs mâles sont au bout des branches, & que les fleurs femelles sont répandues sur le reste de la plante, au lieu que les fleurs sont posées tout différemment dans les *fucus* marins que nous examinons. Nous indiquons ceci pour mettre sur la voie ceux qui desireroient d'étudier plus particulièrement la façon dont se multiplie le varech, & les différentes espèces de vraies plantes marines.

Ces plantes grasses, & principalement celles qui sont garnies de vessies, permettent difficilement que l'on marche dessus, & ce n'est pas sans courir les risques de tomber, que l'on parcourt les rochers qu'elles recouvrent.

Donati, *Essai sur l'Histoire Naturelle de la mer Adriatique, traduit de l'Italien. La Haye, 1758*, dit que les plantes marines diffèrent des terrestres dans les parties de leur fructification, en ce que dans les premières le principe d'où elles dépendent, consiste en un fluide mucilagineux, tandis que dans les dernières le principe fécondant est sous la forme de poussière régulière.

Nos observations ne nous mettent pas à portée de décider comment sont fécondées les parties femelles des *fucus* de mer, mais il paroît hors de doute que les semences sont humectées par cette liqueur gluante ou ce mucilage, & c'est encore une occasion d'admirer la sagesse de la Providence, qui dans certains végétaux,

végétaux, & principalement pour les *fucus* de mer, a pourvu la graine d'un mucilage qui la rend adhérente aux rochers sur lesquels elle doit germer & croître, tandis que d'autres graines terrestres sont en poussière, ou ont la forme de grains ailés qui sont emportés par le vent ou arrondis, qui roulent sur la terre, ou pointus & épineux pour s'arrêter & s'accrocher vers les endroits où ces grains, étant recouverts de terre, germeront & se multiplieront sans le soin du Cultivateur, ou au moins en lui épargnant les précautions pour les semer.

Nous ne parlerons point de l'une & de l'autre de ces plantes sur lesquelles il se trouve des feuilles qui, ayant été piquées par quelques insectes ou un peu mangées par d'autres animaux, sont devenues monstrueuses : celles-là s'allongent extraordinairement, ou prennent des formes plus ou moins singulières.

Nous avons trouvé sur ces varech, différens polypiers : ils se placent ou le long de la tige de ces plantes, ou sur une des feuilles ; un de ces polypiers occupe un espace circulaire, qui a assez la forme d'un bouton : lorsqu'on l'observe à la loupe dans l'eau de la mer, on reconnoît qu'il est composé de plusieurs loges en tuyaux, d'où il sort un polype dont la tête est surmontée de filets. M. de Jussieu l'a décrit dans les Mémoires de l'Académie, année 1742 ; Petiver l'avoit nommé *millepora arenosa Anglica*, & Dillenius *Escara*. Nous avons aussi vu sur le varech un autre polypier qui garnit une grande partie de la plante, & dont les loges sont plus allongées qu'au premier & ont assez la forme d'un sabot, avec deux petites pointes sur l'ouverture de la loge. M. de Jussieu l'a aussi décrit (*Mém. de l'Académie, année 1742*), & il avoit été nommé par Imperati, *porus cervinus* ; c'est le *fucus telam* aut *sericeam texturâ æmulans* de Ray, parce que souvent au lieu de s'attacher comme ici à une plante étrangère, le polypier entier, étant composé de deux plans de loges posés l'un sur l'autre, ressemble, par la forme qu'il prend, à un *fucus* ; ce qui l'a fait ranger par ces Auteurs, dans la classe

des végétaux. M. de Reaumur l'a décrit (*Mém. Acad. année 1712, page 42*) sous le nom de *coralline*.

La côte de la basse Normandie par sa disposition, rend le varech d'échouage très-commun; on en emploie une grande partie à faire de la soude, & il s'y rencontre, plus souvent qu'ailleurs, des varech de bas-fonds de plusieurs espèces, qui ne sont pas également bons au travail de la soude; d'ailleurs nous avons déjà dit qu'il y avoit des espèces de *fucus*, communes sur une côte & qui ne se trouvoient pas sur d'autres. L'espèce suivante, n.<sup>o</sup> 4, est assez généralement répandue aux environs de Cherbourg, pour être employée avec d'autres à la fabrique de la Soude; elle y est connue sous le nom de *Robert*: cette espèce est ordinairement peu branchue, formée dans son étendue par la division de deux branches; sa tige menue est un peu aplatie, & elle a des nœuds ou de grosses vessies qui divisent ces branches de distance en distance, elles sont terminées par de petites feuilles charnues; sa racine est en empatement moins large qu'au *quercus maritima*. Le *nodosus* qu'a fait graver M. de Reaumur dans les Mémoires de l'année 1712, ne nous a pas paru semblable à celui-ci (*voyez planche II, fig. 23 & 24*); nous croyons en avoir trouvé deux variétés, *ibid.*

M. de Reaumur a décrit les fruits d'un *nodosus*, mais ayant été à portée de voir un fruit différent de celui dont il a parlé (*Mém. Acad. année 1712, page 28*) nous l'avons fait graver ici. C'est une masse charnue, un peu renflée, sillonnée & relevée de petites éminences (*voyez planche II, fig. 23 & 24*). Ce fruit est ordinairement placé au bout des branches, ou ce sont des feuilles qui se gonflent & forment des vessies; dans quelques espèces ces vessies semblent être portées par un long pédicule. Il s'attache souvent à ce *fucus* une plante parasite, composée de filets fins & doux sous les doigts, d'une couleur violette sombre presque noire.

L'espèce de *fucus* que l'on a nommée *lacets*, est aussi très-commune sur les côtes de Normandie, elle vient encore

dans les bas-fonds, & par conséquent fait souvent partie du varech d'échouage (*pl. I, fig. 14*). La tige de cette plante a peu de longueur; au-dessus de la racine, on remarque une sorte de chapeau (*planche II, s, t, t, fig. 18 & 19*), qui caractérise cette espèce. Quelques-uns de ces *fucus* ont plusieurs tiges (*fig. 19*) & chaque tige a sa soucoupe (*t, t, t*), ou cette espèce de chapeau, placé un peu au-dessus de la racine; les feuilles qui sont souvent d'une longueur singulière donnent par leurs subdivisions multipliées beaucoup d'étendue à cette plante. J'ai dessiné une des ramifications de cette plante vue à la loupe; l'on y découvre de petits suçoirs que M. de Reaumur a déjà remarqués, & qui sont les capsules des graines de ce *fucus* (*planche I, y, fig. 14*).

Il se rencontre encore assez fréquemment parmi les varech une espèce *n.º 6*, dont la plus grande longueur est d'environ 10, 12 ou 15 pouces; elle est composée d'une & plus souvent de plusieurs tiges, qui partent d'un même empatement de racines (*pl. II, fig. 20 & 21*), la feuille est mince & alongée; la plante porte aux extrémités de ses branches, des siliques (*fig. 22, l, m, n, o, p, q*), plus ou moins longues & comme composées d'articulations.

Au premier coup-d'œil, on seroit tenté de croire que les graines de cette plante vont se trouver dans l'intérieur de ces siliques, qui dans quelques-unes sont divisées par différentes cloisons *m, n*, & ressemblent beaucoup extérieurement aux enveloppes des semences de plusieurs plantes terrestres, mais ce seroit inutilement qu'on chercheroit des graines dans l'intérieur des siliques, on n'y voit que des filamens déliés *n* qui s'entrelacent entre chaque cloison, & qui ressemblent à ceux que nous avons décrits en parlant des vessies dispersées sur les feuilles propres à une espèce de varech, *n.º 3*. Nous avons représenté cette silique ouverte & les filets qui sont entre chaque cloison (*planche II, fig. 22, n*). Ces siliques sont cependant le fruit de cette plante, & les graines y sont placées dans l'enveloppe extérieure; il est aisé de les y voir principalement sur celles où l'on découvre quelques boutons

assez semblables à ceux que M. de Reaumur a décrit dans l'espèce de *fucus* à grosses vessies, n.<sup>o</sup> 2 (voyez planche II, fig. 22, 1). Quelques-uns de ces *fucus* ont les articulations de leurs filiques plus ou moins apparentes à l'extérieur, & les unes sont arrondies par leurs extrémités, d'autres sont surmontées d'un court filet o, p, n.

On trouve sur les côtes de Normandie, & sur-tout dans les bas-fonds le n.<sup>o</sup> 7; ce *fucus* (planche II, figure 17) est ordinairement sur une forte tige ronde ou aplatie, qui est surmontée d'une espèce de palette, divisée ensuite comme les doigts d'une main; la racine *u* se sépare en plusieurs ramifications ou espèces de griffes qui s'accrochent au rocher, & l'y retiennent avec beaucoup de force. La couleur de ce *fucus* est d'un jaune-clair. Il y a plusieurs variétés dans cette espèce; souvent la plante n'a qu'une tige, & les divisions de la palette ne commencent qu'après un espace large, qui ressemble à la paume de la main: ces divisions ou lanières sont plus ou moins longues, & en plus ou en moins grande quantité.

Ray l'a nommé *fucus arboreus polychides, edulis*; lorsqu'il est jeune, il laisse dans la bouche une saveur assez agréable, & les Irlandois mâchent cette espèce.

M. de Reaumur a décrit les fleurs de cette plante, mais il n'a point vu de semences. *Mém. Acad. 1712, page 24.*

Les environs de Cherbourg offrent une variété dans cette espèce qui n'a pas encore été décrite; cette plante diffère du *polychides* commun, dont la palette se divise en plusieurs lanières par la tige qui, dans cette variété est plate; on voit vers la racine, des bourfes renflées attachées à la tige, qui, dans l'eau, font le plus singulier effet, & qui par leurs sinuosités, ressemblent assez à ce qu'on nomme la *fraîse*, dans le veau, ou aux plis du mésentère.

On trouve aussi le *fucus*, n.<sup>o</sup> 8, qui prend la forme d'un ruban, ce qui lui a fait donner ce nom, ou celui de boudrier, parce qu'il ressemble à une lanière de peau; il est plus ou moins large, uni ou bien godronné, & d'un vert d'olive ou bigarré de vert & de jaune: ce *fucus* a quelquefois quatorze

ou quinze pieds de longueur (*voyez pl. I, fig. 15*). Sa racine est en griffes terminées souvent par des espèces de suçoirs, ou des parties peu renflées.

M. de Reaumur (*Mém. Acad. année 1712*) a décrit les fleurs mâles de cette espèce & n'a point vu la graine; il nous a paru que les capsules des graines sont le long de deux lignes nerveuses qui partagent ces feuilles suivant leur longueur, & voisines de quelques parties renflées qui sont plus ou moins apparentes sur des espèces de ces *fucus*, & sur-tout lorsqu'elles sortent de la mer, ou qu'on les y observe, quand, dans les grandes marées, la mer étant très-basse, permet d'approcher du lieu où croissent ces plantes.

Nous avons dit que nous ne décrivions ici que les espèces que l'on brûloit pour les réduire en soude; cependant nous devons faire mention d'un *fucus* parasite qui souvent s'attache à d'autres *fucus* & végète sur ceux-ci; cette espèce a les feuilles larges d'environ cinq à six lignes, & souvent chaque pied n'est composé que d'une feuille, mais plusieurs poussent près les unes des autres; elles sont ordinairement rougeâtres ou couleur de lie-de-vin: nous avons trouvé ce *fucus* parasite sur le vrai varech ou sur le boudrier, c'est celui que Tournefort a appelé *fucus lactuca folio*. Quelques personnes le mangent en salade.

On trouve encore sur les côtes de Normandie plusieurs espèces de *fucus*, mais dont quelques-unes n'ayant point assez de parties solides, se réduisent à presque rien en séchant, ou d'autres plantes qui étant trop petites, ne servent point à la fabrique de la soude. On ne les prend que lorsqu'elles sont voisines de quelques-unes des espèces que nous venons de décrire, & seulement en arrachant ces dernières plantes utiles.

Dans ce nombre sont, l'*ulva oblonga*, *plana*, *undulata*, *membranacea*, *viridis*. Flora Suec. 1156, & le *fucus pumilus Dichotomos*, *segmentis ex unâ parte gibbosis, ex alterâ excavatis*. Raii, Synopf. app. 31.

Enfin, parmi les *fucus*, on voit plusieurs espèces de corallines, & différens polypiers dont nous ne parlerons pas ici, parce

que nous avons prévenu que nous ne prétendions pas faire l'histoire entière & complète des plantes & polypiers de nos côtes.

*Comment pousse le Varech à feuilles de Chêne, convient-il mieux de l'arracher que de le couper ?*

En traitant de la multiplication du varech, ce seroit le lieu, sans doute, de parler du développement des graines de cette plante ; mais nous avouons que le premier moment de leur naissance, a échappé à toutes nos recherches ; ainsi pour ne point hasarder, nous n'ajouterons rien à ce que M. de Reaumur en a dit dans les Mémoires de l'Académie, *ann. 1711*, & nous renvoyons au travail de cet habile Physicien.

Ces *fucus* jeunes sont, ou sur l'empatement des racines de vieilles plantes arrachées, où on les voit pousser ( & c'est le plus grand nombre ), sur des roches à des endroits où il n'existe plus de racines, & sans doute ceux-là viennent de graines.

Nous avons vu vers le mois d'Août des rochers entièrement couverts de plantes, qui en naissant étoient aussi proches les unes des autres, que pourroient l'être sur une couche, des laitues qui sortiroient de leurs graines ; on conçoit que ces pieds s'éclaircissent, & que le nombre de ces plantes diminue, les plus fortes étouffant les plus petites. (*Voyez pl. I, fig. 1, a, b*).

Nous avons déjà dit en décrivant la première & la seconde espèce de varech, que dans ces deux *fucus*, la feuille très-petite dans son origine *a, b*, s'élargit par son extrémité & se découpe en deux parties ; la tige s'allonge, les productions de la plante ne sont que des développemens de cette première feuille, qui toujours en se partageant en deux, donnent de nouvelles découpures, & forment une grande plante. (*Voyez pl. I, a, b, c ; & fig. 2, 3 & 4*).

Cette loi est générale pour la plupart des *fucus* dont nous avons donné ici la description, il n'est pas besoin de dire



qu'il ne faut pas comprendre dans ce nombre les *fucus polychides* & le boudrier n.<sup>os</sup> 7 & 8, mais elle a son application aux espèces appelées *chêne de mer*, dont on se sert principalement pour faire de la soude; la plante parvient à la perfection suivant les ouvriers, au bout d'un an, quoiqu'elle puisse croître ou au moins subsister pendant trois ou quatre années.

Il y a quelquefois sur une racine des feuilles qui donnent l'origine à plusieurs plantes, mais plus communément il n'y a qu'une tige sur chaque empatement. Sur le même rocher & près d'un grand pied de varech, on en voit d'autres qui sont encore jeunes & petits; les ouvriers (ainsi que nous l'allons dire) ont grand soin de ménager ces derniers, en faisant la récolte des grands varechs.

Les vessies ou les fruits du varech qui sont à l'extrémité des branches, ne paroissent que lorsque la plante a acquis une certaine grandeur : nous les avons vus dès le mois d'Avril. Pour les vésicules que nous avons dit se trouver dispersées sur les feuilles d'une espèce, on les voit dès que la plante a des feuilles formées, & de grandeur à pouvoir les porter.

Les gelées gâtent les grandes plantes en les déracinant ; il est encore constant que les *fucus* poussent pendant l'hiver, & dans cette morte saison, les petites plantes se forment un empatement de racines, & ne font que de foibles productions en comparaison du printemps ou de l'été, qui sont bien plus favorables à leur végétation. Nous prévenons ici que les ouvriers qui sont en Normandie la soude avec le varech, arrachent les plantes, quoiqu'un article de l'Ordonnance prescrive de les couper : on a tenu la main à l'exécution de la loi, jusqu'à ce que les ouvriers de cette province aient représenté, qu'ils ne coupoient le varech qu'au détriment de la multiplication de la plante, & depuis on a fermé les yeux sur la façon dont ils en faisoient la récolte.

Les usages pour la façon de récolter le varech, varient ; dans d'autres provinces, au lieu de l'arracher (comme nous venons de dire qu'on le faisoit en Normandie), on le coupe avec une faucille.

Nous n'ignorions pas que souvent les préjugés entraînent aisément les gens dénués de connoissances, & il étoit de notre devoir, d'examiner si l'intérêt ne conduisoit pas ceux qui font la soude, au détriment du bien général; enfin si engagés par l'appât d'un gain apparent pour une année, ils ne le sacrifioient pas à l'avantage qu'ils en auroient pu eux-mêmes tirer par la suite.

Nous avons donc premièrement écouté les ouvriers, ils nous ont fait voir qu'il leur en coûtoit plus de temps & de peine pour arracher que pour couper ces plantes, car (comme nous l'avons dit) elles tiennent fortement à la pierre, & souvent en les enlevant avec la force nécessaire, on emporte des morceaux de pierre qui tiennent aux racines, & il faut ensuite les ôter, avant de brûler les plantes pour les réduire en soude; on récolteroît donc ces *fucus* beaucoup plus promptement, en les coupant avec la faucille; mais un grand avantage attaché à la façon d'arracher les plantes, c'est qu'au mois d'Avril, on ménage avec le plus grand soin, des pieds trop jeunes, pour être alors employés, & qui se trouvent le long & près des grands: ceux-là donnent lieu à une seconde récolte vers le mois de Septembre de la même année.

Les ouvriers ajoutoient encore à cette première raison, qu'ils s'étoient convaincus que les pieds coupés ne pouffoient plus, qu'ils pourrissoient, & que si on les coupoit près de leurs extrémités supérieures, qu'ils ne faisoient plus que de foibles productions, & nuisoient à la pousse des jeunes plantes voisines, qui seroient devenues beaucoup plus belles, ils nous faisoient voir quelques extrémités de tiges, qui, s'étant cassées à la dernière récolte en voulant les arracher, n'avoient point poussé & commençoient à pourrir.

Il convenoit donc de déterminer le vrai sur un objet aussi important: l'on avouera que l'on pouvoit déjà avoir quelque confiance, en ce qu'avançoient des gens accoutumés à voir ces plantes; mais eux-mêmes sont d'avis différens dans la Normandie & la Bretagne, quoique sur les mêmes espèces de plantes,

Nous

Nous choîsîmes donc vers la fin d'Avril, deux endroits éloignés l'un de l'autre de plusieurs lieues, en préférant un terrain le mieux garni en varech (*quercus maritima*) & celui le moins exposé à être endommagé : nous fîmes marquer un espace, & nous le divisâmes en trois parties; dans la première, le varech fut arraché entièrement; dans la seconde, on en coupa plusieurs rangées à deux pouces de l'empatement de la racine, d'autres à quatre; & les dernières rangées aux trois quarts de sa hauteur.

Enfin dans la troisième & dernière partie, nous laissâmes le varech, en recommandant qu'on le respectât, & dans le dessein de pouvoir (si la mer ne l'emportoit pas) juger du temps où le varech des endroits qui découvrent, peut croître & rester sur la roche, sans se détruire de lui-même; ce moyen nous paroissoit le plus propre à décider le temps de sa crûe : des circonstances que nous ne pouvions prévoir, nous ont empêché de prononcer sur ce dernier article; mais nous pouvons faire part de nos observations, recueillies dans ces deux endroits différens, elles serviront à décider, s'il est plus avantageux en récoltant le varech, de le couper ou de l'arracher.

A la fin de Septembre, la partie dont nous avions arraché les plantes au mois d'Avril, étoit garnie de nouvelles, qui avoient autour de 2 à 3 pouces de hauteur, & le 25 Novembre, le varech avoit environ 6 pouces, & quelques pieds étoient déjà crus de plus de 9 pouces.

Celui qui avoit été coupé ayant été examiné à la fin de Septembre, nous reconnûmes qu'il étoit encore dans le même état que dans le mois d'Avril où on l'avoit soumis à l'expérience. On se souviendra que les tiges des premières rangées avoient été coupées assez près de leurs racines, celles-là étoient dans le même état, les tiges avoient pris une couleur plus noire, & principalement leur extrémité près de la partie coupée.

On voyoit seulement çà & là quelques pieds qui étoient venus de graines, & éloignés des tiges dont nous venons de parler.

La seconde rangée de ces plantes coupées à 3 & 4 pouces de leurs racines, n'offroit rien de différent des premières; seulement quand on n'avoit pas coupé des feuilles latérales, on y voyoit une houppe de nouvelles feuilles qui ne paroissent pas devoir donner de belles productions. Le 25 de Novembre, ces tiges coupées étoient entièrement fanées, & il ne s'est trouvé, dans tout le carré réservé pour cette expérience, qu'un seul pied coupé, sur la racine duquel on ait vu une nouvelle tige d'environ un pouce & demi de hauteur attachée à son empatement, & ceci nous donne occasion de remarquer que les *fucus* s'attachent indifféremment sur tous les corps; les jeunes pieds de semence peuvent se trouver posés sur un empatement de racines anciennes, comme sur d'autres parties du rocher; mais ayant déjà dit que les pieds en vieillissant perdent de leur adhérence à la pierre, il est à craindre que les empatemens, en se détachant, n'emportent les jeunes pieds qui seroient crûs sur les racines. Les faits se sont présentés de la même manière dans l'un & l'autre des deux endroits destinés à cette expérience. Si l'on se rappelle que les ouvriers, pour confirmer leur façon de penser, nous faisoient voir que la plupart des pieds qui avoient été cassés, en voulant les détacher de dessus les rochers, se pourrissoient sans donner aucune production. Enfin, si l'on joint à ces remarques une réflexion tirée d'après la peinture que nous avons faite de la quantité de plantes qui couvre les bords de la mer, & les rochers que l'eau baigne dans les marées (même dans les endroits où depuis plusieurs années, on arrache constamment ces plantes); ne sera-t-on pas obligé au moins, d'avouer que ce moyen employé dans la Normandie pour récolter le varech, n'est point nuisible à la multiplication de ces plantes; & nos observations ne peuvent-elles pas encore conduire à penser qu'il est même plus avantageux d'arracher le varech que de le couper, & que les ouvriers demandoient, pour le bien, & pour concourir à une plus grande multiplication de cette plante utile, qu'on ne suivît pas l'Ordonnance qui prescrit de le couper?

Si l'on considère que la plupart des *fucus*, & principalement ceux à feuilles de chêne, sont le développement successif d'une première feuille, qui par de nouvelles divisions forment la plante; que la plante entière, ainsi que s'explique M. de Fontenelle en rendant compte (*Hist. Acad. année 1710, p. 72*) des observations M. le Comte Marfigli, est plutôt une espèce de racine, entourée de toutes parts de l'élément propre à lui fournir la nourriture convenable, & qu'ainsi ces plantes, plus qu'aucune autre, semblent devoir particulièrement leur principe de végétation à l'eau de la mer qu'elles pompent ou reçoivent plutôt par leurs feuilles que par leurs racines; on concevra aisément comment en coupant les feuilles, & ne laissant que la tige, on nuit essentiellement à la production de la plante.

## EXPLICATION DES FIGURES.

### PLANCHE I.

**FIGURE 1.** *a.* Le *quercus maritima* n.<sup>o</sup> 1, *a* sa première crûe, *b* un peu plus grand, *c* plus grand encore; l'échancrure que l'on voit à l'extrémité des plantes *b*, *c*, indique la première division qui doit se faire dans ce varech.

**Fig. 2.** Ce varech assez grand pour que l'on puisse y voir la division de deux feuilles.

**Fig. 3.** Le même varech dont les divisions subséquentes sont indiquées par des nervures.

**Fig. 4.** Le *quercus maritima*, avec plusieurs divisions auxquelles on a donné le nom de *feuilles*.

**Fig. 5.** Un fragment de feuille du *quercus maritima*, sur laquelle on voit en *xx* les poils que M. de Reaumur a regardés comme les étamines de la plante; à l'extrémité de cette feuille, il y avoit aussi des boutons qu'il croyoit contenir les graines.

**Fig. 6, 7 & 8.** La racine du *quercus maritima* n.<sup>o</sup> 1, 2 & 3, elle forme un empatement, & s'attache sur la roche ou les cailloux qu'elle embrasse, comme on le voit *fig. 8*.

**Fig. 9.** La feuille du *quercus maritima* n.<sup>o</sup> 1, avec les poils qui dénotent l'individu mâle.

*Fig. 10.* L'extrémité de la feuille du *quercus maritima* n.° 2, avec de grosses vessies à deux cornichons, & qui est regardé comme l'individu femelle.

*Fig. 11.* La peau de ces vessies & la vessie coupée, vues à la loupe avec les tubercules *d e* qui contiennent les graines *g*.

*Fig. 12.* Une vessie à trois cornichons.

*Fig. 13.* Le varech n.° 3, à *vésicules*; *h* ces vésicules; *i* la vésicule ouverte, & dans laquelle on voit un réseau très-fin.

*Fig. 14.* Le varech n.° 5, appelé *lacet*; *y* un fragment de la feuille qui porte la graine.

*Fig. 15.* Le varech n.° 8, nommé *baudrier*. Quand ce varech est fraîchement cueilli, on voit sur la feuille des parties plus relevées & différemment colorées.

## P L A N C H E I I.

*Fig. 16.* La racine du varech n.° 8, la tige est ronde.

*Fig. 17.* La racine du varech n.° 7, la tige de celui-ci est plate; la tige imite la figure de la paume de la main, & se partage ensuite en plusieurs lanières: l'extrémité des racines est en fuçoirs.

*Fig. 18.* La racine du varech n.° 5, appelé *lacet*, avec le chapeau *s*, qui est ordinairement à l'origine de la tige.

*Fig. 19.* La racine du *lacet* n.° 5. Quand la plante a trois tiges, il s'y trouve aussi trois soucoupes ou chapeaux *t t t*.

*Fig. 20.* La racine du varech n.° 6, à *filiques*.

*Fig. 21.* Cette racine avec un petit empatement.

*Fig. 22.* Les filiques *l, m, n, o, p, q* de cette espèce de varech n.° 6; certaines sont comme articulées *m*, & divisées par des cloisons *n*; les unes sont terminées par une partie arrondie *o*, d'autres sont pointues *p, q*.

*Fig. 23.* Une variété de l'espèce n.° 4, connu sous le nom de *nodosus*; *r* son fruit.

*Fig. 24.* Autre variété du *nodosus*; *rrr* son fruit porté par un long pédicule. Les nœuds de cette variété sont concaves vers leurs centres, & relevés par les bords.



## M É M O I R E

*TOUCHANT LA SUPÉRIORITÉ DES PIÈCES D'ARTILLERIE  
longues & solides, sur les Pièces courtes & légères;  
& où l'on fait voir l'importance de cette supériorité  
à la Guerre.*

Par M. le Marquis DE VALLIÈRE.

**I**L y avoit environ trois siècles que toutes les Nations policées, travailloient à l'envi, à perfectionner leur Artillerie, lorsque feu M. de Vallière fut chargé de travailler à la perfection de la nôtre, comme il avoit déjà travaillé à la perfection du Corps destiné à son service. Notre Artillerie alors s'étendoit depuis la pièce de 33 livres de balle, jusqu'à celle du fauconneau de  $\frac{1}{4}$  de livre; & on avoit, outre cela, des pièces courtes & légères depuis le calibre de 4 livres jusqu'à celui de 24 livres, particulièrement destinées pour la guerre de campagne.

Ce ne fut point arbitrairement & sur des conjectures vagues, que M. de Vallière se détermina dans la réforme importante qui lui étoit confiée. Il avoit vu pendant les vingt-huit dernières années du règne de Louis XIV, les effets & les inconvéniens des différentes Artilleries de l'Europe; & il les avoit médités à loisir, pendant la longue paix dont jouit la France, au commencement du règne de Louis XV. Ce fut d'après cette longue étude qu'il conçut le projet si simple & si fécond d'une seule Artillerie réduite à cinq calibres, depuis 4 livres jusqu'à 24, qui tous étoient propres à l'attaque & à la défense des Places, & dont les trois premiers, combinés suivant les circonstances, l'étoient particulièrement pour la guerre de campagne; de sorte que dans le besoin, les Places pourroient fournir aux Armées & les Armées aux Places. En conséquence de ce premier point de

vue, M. de Vallière déterminâ la longueur des pièces, par celle qui leur étoit nécessaire pour servir dans des embrasures: propriété indispensable dans l'attaque & la défense des Places, qui devient souvent nécessaire pour la guerre de campagne, & qui fournit une longueur avantageuse pour le pointement, la force & la portée des coups; il donna à ces pièces toute la solidité dont sa longue expérience lui avoit fait connoître la nécessité, tant pour la résistance & la durée des pièces, que pour la sécurité de ceux qui seroient employés à leur service. Quant aux affûts & autres attirails, il eut particulièrement égard à leur solidité & à la facilité de leurs construction & réparation: il négligea l'agrément du coup-d'œil, aujourd'hui si fort à la mode.

Ces cinq calibres de canons suffisoient alors, parce que la France n'avoit pas encore adopté le système de l'association indissoluble de l'Artillerie avec l'Infanterie. L'Artillerie concertoit ses manœuvres propres avec celles de l'Infanterie & de la Cavalerie, mais elle ne les assimiloit pas à celle d'aucun de ces deux Corps; elle préféroit les positions les plus avantageuses, à des dispositions symétriques à tant de pièces par bataillon, lorsque, à l'exemple des Étrangers, au lieu de perfectionner notre Tactique, nous nous déterminâmes à lui donner ces faux appuis; les pièces de 4 courtes, appelées à la *Suédoise*, remplissoient cet objet; elles étoient déjà introduites parmi nous; mais l'expérience de guerre ne leur ayant pas été favorable, elles n'étoient propres qu'à cet usage, auquel on ne pouvoit employer commodément de meilleures pièces plus longues & plus pesantes.

Le système des pièces courtes & légères, s'est accrédité dans le nord de l'Europe, au point de l'adapter, non-seulement aux pièces de Régiment, vu, disoit-on, la commodité de pouvoir les manœuvrer à bras, mais encore aux pièces des calibres supérieurs qui ne se peuvent plus manœuvrer à bras. Les partisans de cette nouvelle Artillerie ont osé même contester la supériorité des pièces longues, sur les pièces courtes & légères, de même calibre; & toutes les fois qu'ils se sont



vus forcés dans un retranchement si peu soutenable, ils ont recouru au subterfuge de dire, que cette supériorité est inutile à la guerre; & quand on les force dans ce second poste, ils rentrent dans le premier. Si le préjugé tient chez eux à trop de racines pour céder aux preuves que je vais accumuler de leur double erreur, j'espère au moins qu'elles suffiront pour toutes les personnes qui cherchent uniquement la vérité, & qui ont assez de discernement pour la reconnoître.

## ARTICLE PREMIER.

*SUPÉRIORITÉ des Pièces longues, sur les Pièces courtes de même calibre.*

*Supériorité de portée.*

QUAND on voit que constamment le fusil porte plus loin que le pistolet; quand on apprend, par une tradition uniforme, que les coulevrines portoient plus loin que les autres pièces; comment peut-on douter que les pièces plus longues portent plus loin? Pour éluder la force de la comparaison du fusil au pistolet, on abuse de la maxime qu'il ne faut pas conclure du petit au grand.

On conviendra bien que les effets ne paroissent pas toujours croître ou diminuer exactement dans la même proportion que croît ou diminue la cause qui les produit, mais il n'est pas moins incontestable que toutes les fois que la cause augmentera, l'effet augmentera dans quelque proportion que ce puisse être, & diminuera réciproquement, plus ou moins, suivant les circonstances incidentes, lorsque la cause diminuera, comme il s'annulera par la cessation absolue de la cause.

En effet, les Auteurs les plus célèbres qui ont travaillé à établir les principes de l'Artillerie, Robins, Euler, d'Arcy & d'Antoni, sont d'accord qu'on peut ici conclure, du petit au grand, puisqu'ils ont fait la plupart de leurs expériences avec de petits canons semblables à ceux de fusils & de pistolets.

Pour infirmer la seconde comparaison (de la coulevrine); on oppose des exceptions peu approfondies à des faits innombrables; & on dit qu'un morceau de deux pieds & demi de longueur étant emporté par le boulet, de l'extrémité de la volée d'une pièce extrêmement longue, il se trouva qu'après cet accident, la même pièce chassoit son boulet plus loin qu'auparavant; mais la nature même de l'accident prouve que l'ame de cette pièce n'étoit pas droite, & que sa courbure occasionnoit au boulet, un choc qui devoit retarder sa vitesse, avant que cet obstacle fût emporté. La coulevrine de Nanci, dit-on, encore, portoit moins loin que des pièces plus courtes; on peut répondre 1.<sup>o</sup> que les défauts de cette pièce, excessivement longue, ne concluent rien contre les plus grandes longueurs actuellement en usage: 2.<sup>o</sup> que la surprise même qu'a causée cette pièce, & les recherches qu'on a faites sur ses défauts de portée & de justesse, prouvent assez qu'on étoit bien convaincu que les pièces plus longues, quand elles sont bien faites, doivent avoir plus de portée & plus de justesse; & que l'on regardoit le défaut de ces deux qualités, comme un signe certain & non équivoque de quelque vice réel, quoique caché dans la construction de la pièce: 3.<sup>o</sup> si on considère combien il étoit difficile, pour fondre une pièce aussi longue, de faire tenir le noyau assez bien assuré dans un moule proportionné à cette longueur excessive, pour que la chute & le bouillonnement du métal en fusion, ne le pussent ébranler ni déranger; on conviendra que l'ame de cette pièce ne pouvoit être bien droite.

Pour faire illusion aux personnes peu instruites, on avance que les avantages attribués aux pièces longues, étoient supposés sans preuve, & qu'on n'avoit fait aucune expérience pour les constater. Compte-t-on donc pour rien les expériences de guerre sans nombre qui leur ont constamment confirmé cette supériorité? Ne sont-elles pas, au contraire, la vraie pierre de touche en pareille matière, & les seules décisives?

En effet, combien d'opérations & d'épreuves ont réussi  
un

un jour supérieurement dans des exercices particuliers d'une École, qui, répétées le lendemain, ont manqué, quoiqu'on eût, en apparence, observé les mêmes précautions; quelquefois du matin à l'après-midi ! Rien de plus difficile que de faire bien, des expériences; celles de l'Artillerie peut-être plus que toute autre. Que de variations dans la poudre & dans ses effets ! Dans la poudre, quoique fabriquée dans les mêmes manufactures, soit par la qualité des salpêtres, plus ou moins raffinés, du charbon plus ou moins pulvérisé, du soufre plus ou moins pur, du mélange plus ou moins égal ; soit par son inflammabilité plus ou moins complète, à raison du plus ou moins de siccité. Quelle différence ne fait pas une compression plus ou moins exacte du boulet contre la poudre, un peu plus ou moins de vent au boulet, le plus petit défaut dans la sphéricité ! que d'inconvéniens de la part de la température de l'air ; s'il est sec le matin, humide l'après-midi ; de chaud s'il devient subitement froid ; si le vent vient en face, en arrière ou de côté, ne doit-on pas s'attendre à autant de variations dans les effets ? Ce qui réussit à la guerre, réussira par-tout ; mais ne réussira pas toujours à la guerre, ce qui aura réussi ailleurs. Ce n'est pas que l'on doive blâmer des expériences bien méditées, faites sans prévention & avec le desir de trouver la vérité, favorable ou non à un système qu'on aura adopté d'avance. J'observe seulement, qu'autrement elles ne pourroient servir qu'à étayer ou établir de fausses opinions ; confirmer l'erreur ou détruire les connoissances déjà acquises ; & que c'est avec la plus grande réserve qu'on y peut donner sa confiance, jusqu'à ce qu'elles aient reçu le sceau de l'épreuve faite à la guerre, seule décisive de leur utilité. Y a-t-il en effet quelqu'un assez peu instruit de l'histoire de l'Artillerie, pour ignorer les efforts qu'ont faits à l'envi, les différentes nations de l'Europe pour la perfectionner, & les résultats de leurs opérations ? Entre un grand nombre d'expériences qu'on pourroit leur citer, on choisira celles que fit faire M. de Montecuculli, dont la réputation & les ouvrages sont connus de tous les militaires.

Il fit fondre, dit-il dans ses Mémoires, quantité de pièces de degrés en degrés, depuis la plus courte jusqu'à la plus longue; depuis la plus légère jusqu'à la plus grosse; & il fit tendre ensuite, d'espace en espace, depuis la plus petite distance jusqu'à la plus grande, un grand nombre de toiles, l'une derrière l'autre, en travers dans la ligne du coup. Il fit encore tirer plusieurs coups contre une terre plus ou moins épaisse, afin de juger à l'œil, de la résistance, de la justesse & de la force des pièces, & de connoître de plus, l'étendue & le genre de la ligne que le boulet auroit tracée dans l'air. C'est d'après ces épreuves qu'il conclut que l'Artillerie trop légère, ne peut faire un grand effet, qu'elle recule trop, qu'elle s'échauffe en peu de temps, qu'elle ne tire pas toujours juste, &c. & que les coulevrines auxquelles il donne depuis 32 jusqu'à 36 calibres de longueur d'ame, servent pour porter loin. Il est vrai que ce grand homme blâme aussi l'Artillerie trop grosse & trop pesante; mais à en juger par celle qu'il adopte, il est clair que ce blâme est bien éloigné de tomber sur la nôtre.

Quelque fondé que l'on pût être à croire que feu M. de Vallière, l'auteur de la célèbre Ordonnance de 1732, qui a blanchi au milieu des feux de l'Artillerie, & qui a eu part, dans la longue carrière de sa vie, à plus de soixante-dix sièges ou batailles, fût capable de former une excellente Artillerie; on ne citera point son autorité aux partisans du nouveau système. Il osoit dire, après des expériences faites à l'aise, sur un terrain choisi, dans la tranquillité d'une école, en temps de paix, dont il favoit occuper le loisir à des recherches utiles pour perfectionner l'Artillerie, qu'on n'en pouvoit encore bien juger que dans une guerre véritable & vigoureuse. Ils ne manqueroient pas de dire que toutes ces expériences anciennes ont été mal faites, & que les effets de guerre ont été mal vus.

Passons donc aux plus savans d'entre les modernes qui ont traité cette matière, tant par l'expérience que par le calcul. M. Robins établit pour sa seconde maxime pratique résultante de sa théorie expérimentale, que si deux pièces du même

calibre, mais de différente longueur, sont chargées de la même quantité de poudre, la plus longue imprime plus de vitesse à son boulet que la plus courte. Il cite à ce sujet l'expérience faite avec une coulevrine de 60 calibres de longueur, laquelle réduite à 20 calibres, ne put faire pénétrer son boulet qu'à la moitié de la profondeur où il s'enfonçoit avec la pièce de 60 calibres, quoiqu'avec la même charge.

M. le Chevalier d'Arcy, de l'Académie Royale des Sciences, qui a répété en France, avec la plus grande exactitude, les expériences de Robins, & qui a employé encore de nouveaux moyens pour les vérifier, a trouvé constamment que les coups les plus foibles d'un canon de 6 pieds, surpassoient les plus forts d'un canon de 4 pieds de même calibre, quelque petites que fussent les charges, pourvu qu'elles fussent les mêmes pour l'un & l'autre canon, & qu'on eût tiré sous le même angle.

Le célèbre M. Euler, qui a porté le flambeau des Mathématiques le plus avant dans l'Artillerie, a démontré que la charge étant la même, la vitesse imprimée au boulet est d'autant plus grande, que la pièce contient plus de fois son calibre dans toutes les longueurs admissibles dans la pratique.

M. d'Antoni, Directeur de l'école d'Artillerie de Turin, qui a donné un si bel Ouvrage sur les principes de l'Artillerie, sous le titre d'*Examen de la Poudre*, regarde d'abord, comme incontestable, la supériorité de portée des pièces plus longues; il la prouve par le raisonnement qui se trouve confirmé dans la suite de son Ouvrage, par des expériences, quoique faites dans d'autres vues.

Ainsi la théorie d'accord avec l'expérience, a démontré que les pièces plus longues impriment plus de vitesse à leurs boulets à charge égale : on convient que la portée n'est point proportionnelle à cette vitesse initiale, à cause de la résistance de l'air; mais 1.<sup>o</sup> on ne peut au moins disconvenir que la portée ne soit plus grande, dans quelque rapport que ce soit, pour ceux d'entre les boulets de même calibre qui reçoivent la plus grande vitesse primitive; 2.<sup>o</sup> sous l'horizontale & les

degrés voisins, cette force non épuisée à la première chute, produira des ricochets très-étendus, aussi utiles au moins que les coups de plein fouet. Mais, diront les défenseurs du nouveau système, dans les expériences & les démonstrations citées, on n'a point eu égard aux ingénieux moyens que l'on a découverts pour retrouver dans les pièces courtes, l'égalité de portée avec les pièces longues de même calibre; nous y parvenons, 1.<sup>o</sup> en donnant un demi-degré ou  $\frac{2}{3}$  de degré d'élévation de plus à nos pièces; 2.<sup>o</sup> en diminuant le vent de leurs boulets; 3.<sup>o</sup> en vous obligeant d'augmenter celui des vôtres beaucoup au-delà de ce que prescrit l'Ordonnance de 1732. Pour excuser ce qu'il y a de révoltant (dans cette troisième prétention sur-tout), ils disent avoir trouvé, quelque part dans nos Arsenaux, des boulets qui avoient beaucoup plus de vent que ne prescrit l'Ordonnance de 1732; mais en supposant que ces boulets ne fussent, ni d'un calibre étranger, ni antérieur à l'Ordonnance de 1732, peut-on se servir d'une infraction pour attaquer une Ordonnance? Quelle loi dans l'Univers pourroit subsister, si l'infraction étoit un titre pour ne la plus reconnoître?

Aucune Nation faisant usage des armes à feu, n'a ignoré qu'on augmentoit leurs portées, en augmentant le degré d'élévation de la pièce, & en diminuant le vent des boulets. De quel droit prétendent-ils s'arroger le privilège exclusif d'employer au service de leurs pièces, des moyens connus de tout le monde, avec lesquels, toute pièce ancienne, de tout calibre indistinctement, sera assurée d'augmenter, & sa force & l'étendue de sa portée? Si la simple exposition de ces misérables subterfuges, ne suffit pas pour en faire voir le ridicule, j'ajouterai 1.<sup>o</sup> que lorsque l'augmentation du degré ne sera point désavantageuse pour l'effet qu'on se propose, la pièce longue pourra la prendre, comme la courte, & n'en conservera pas moins sa supériorité sur celle-ci; mais lorsque cette augmentation de degré sera désavantageuse, aucune des deux n'en doit faire usage; 2.<sup>o</sup> j'en dirai autant de la diminution du vent: l'avantage qui en résulte n'appartient

pas plus aux pièces courtes qu'aux longues; & quand celles-ci emploient ces boulets concurremment avec les pièces courtes, elles conservent toujours, ainsi que dans le cas précédent, leur supériorité primitive, & acquièrent en proportion une nouvelle augmentation de portée.

On n'imagine pas que ce soit à titre d'inventeurs de cet expédient, que les zélateurs de la nouvelle Artillerie, prétendent s'en servir seuls, & en interdire l'usage à tous autres.

Dès le temps de Louis XIII, on avoit réduit en France le vent à une ligne pour le calibre, même de 7 livres 4 onces, & pour tous ceux au-dessous; & M. de Vallière, dès 1747, avoit envoyé des ordres aux forges, pour faire, à une ligne de vent, les boulets des pièces dites de 4 livres, & ceux des autres calibres à proportion. Ce seroit donc à tort qu'on les donneroit pour les inventeurs de cette réduction de vent; & quand ils le feroient, comment peuvent-ils se dissimuler, que cet avantage devenu commun aux pièces longues, aussi-bien qu'aux pièces courtes, non-seulement conserve constamment aux premières la supériorité décidée sur les dernières, mais encore que la pièce longue peut bien mieux profiter de cette diminution de vent que la courte, parce que le fluide élastique de la poudre enflammée, retenu par ce moyen plus long-temps dans l'ame de la pièce plus longue, continuera encore dans ce surplus de longueur, ses pressions redoublées contre la surface postérieure du boulet, & le chassera par conséquent bien plus loin? La diminution de vent n'appartient donc pas plus de droit que de fait à l'Artillerie raccourcie,

### *Supériorité de Justesse.*

La supériorité pour la justesse du tir des pièces longues sur les pièces courtes du même calibre, tirées à charge égale & sous le même angle, ne sera pas plus difficile à démontrer. La comparaison du fusil au pistolet du même calibre, tirés à même charge l'un & l'autre, & avec les mêmes attentions, a déjà prouvé que la longueur du canon donnoit au fusil,

toutes choses étant égales d'ailleurs, une supériorité de portée très-considérable sur celle du pistolet. La même expérience démontre aussi complètement la supériorité de la justesse du tir des pièces longues ; & si sensiblement, que l'on regarde comme un prodige d'adresse peu commun, d'atteindre avec un pistolet un objet médiocrement éloigné, que la personne la moins expérimentée au maniement des armes, atteindra sans peine du premier coup, avec un fusil. Cette expérience journalière & connue de tout le monde, paroîtroit seule devoir convaincre toute personne dépouillée de prévention ; mais les épreuves faites en grand, je veux dire avec des pièces d'Artillerie, ne peuvent laisser aucun doute aux personnes de bonne foi les plus prévenues.

Feu M. le Maréchal de Saxe qui avoit vu faire usage des pièces Suédoises dans les guerres d'Allemagne, voulut, lorsque le feu Roi lui confia le commandement de ses Armées, les employer une campagne. La légèreté de ces pièces, qui sembloit offrir plus de facilités pour le transport & pour les manœuvres, étoit un appât séduisant qui leur avoit concilié une grande faveur dans le Nord, & donné une réputation dans l'Europe. Mais ce Général trop éclairé pour que la prévention tint chez lui long-temps contre l'évidence, ne tarda pas à reconnoître les défauts essentiels de cette légèreté illusoire, lorsqu'il eût vu par lui-même, les effets bien supérieurs de nos pièces longues de même calibre, tant pour la portée & la force, que pour la justesse des coups & leurs effets destructeurs : aussi déclara-t-il qu'il ne vouloit pas qu'on mît plus de dix de ces pièces courtes dans son équipage d'Artillerie à la campagne suivante, & revendiqua les pièces de l'Ordonnance de 1732.

En effet, nos pièces longues, d'après cette Ordonnance, ont plus de justesse, tant du côté du pointement, que du côté du tir. 1.<sup>o</sup> Elles ont plus de justesse du côté du pointement, car il est démontré qu'entre des instrumens semblables, celui qui a le plus long rayon, sans sortir des bornes de la vision distincte, est le plus juste ; le canon a d'autant plus



besoin de longueur pour obtenir la justesse, qu'il n'a pas, ni ne peut avoir, comme les instrumens de Mathématiques, le secours des pinnules. Il est donc sensible que la même déviation du rayon visuel vers la bouche de la pièce courte, donneroit à quatre ou cinq cents toises, une erreur qui seroit très-considérable; il faut donc convenir que les pièces plus longues, ont plus de justesse du côté du pointement. 2.<sup>o</sup> Elles ne l'ont pas moins du côté du tir; car les pièces ont d'autant plus de justesse du côté du tir, que leurs coups sont plus rasans & que leurs boulets s'écartent moins de la direction du but. Or, les pièces longues ayant plus de portée, toujours à égalité de charge, ont encore, à raison de l'impression du mouvement qui a persévéré plus long-temps dans l'excédant de la longueur, plus de vitesse; leurs boulets arrivent plus promptement au but, & les effets de la pesanteur étant comme les carrés des temps, il s'ensuit que moins de temps mettra un boulet à parcourir un espace donné, moins la pesanteur l'aura fait décliner de sa ligne de mire: les coups seront plus rasans & on n'aura plus besoin que d'un angle moindre, pour compenser l'effet de la pesanteur. On ne sera plus dans le cas de chercher au hasard, & par l'estimation seulement, l'angle nécessaire pour faire arriver le boulet, qui, avec les pièces courtes, ne peut atteindre le même but, qu'à la faveur d'un plus grand angle, à la fin de sa chute, en plongeant, après avoir perdu presque toute sa force, & n'ayant guère plus que celle de la pesanteur, qui lui ôte même celle de faire ricochet.

Ainsi la longueur de la pièce diminue deux causes principales de l'incertitude des coups, qui sont, l'élévation de la pièce & l'effet de la pesanteur: & par conséquent la pièce plus longue a plus de justesse du côté du tir; & comme on a fait voir qu'elle avoit le même avantage du côté du pointement, il s'ensuit que le raisonnement est d'accord avec l'expérience, pour lui adjuger la supériorité de justesse. Je pense que ce que je viens de dire, doit suffire à quiconque ne cherche qu'à s'assurer du vrai.

On s'attend bien que les défenseurs des pièces courtes repliqueront, qu'au moyen d'une hausse mobile qu'ils ont adaptée à leurs pièces, ils ont paré si bien à cet inconvénient, qu'ils se sont procuré même, s'il faut les en croire, la supériorité de justesse. Pour vouloir trop prouver, on ne prouve rien; si la hausse mobile étoit capable de procurer un si grand avantage par elle-même, en l'adaptant à la pièce longue, qui n'en seroit pas moins susceptible que la pièce courte, celle-là en acquérant un nouveau degré de perfection & de supériorité sur elle-même, l'acqueroit dans la même proportion sur celle-ci. Mais il faut considérer, 1.<sup>o</sup> que la hausse mobile, tant pour la pièce longue que pour la courte, est un mauvais instrument; 2.<sup>o</sup> qu'elle ne peut servir presque jamais qu'à faire tirer, lorsqu'on ne devoit pas tirer; 3.<sup>o</sup> que son opération est toujours tâtonneuse & souvent impossible. J'ai dit, 1.<sup>o</sup> que la hausse étoit un mauvais instrument, parce qu'à la guerre les mouvemens seront souvent embarrassés par la rouille, la poussière & la boue qui s'y introduiront; & parce que la fragilité la rendra sujette à se fausser & à se briser, étant maniée par des mains grossières, avec la précipitation qu'excitent l'ardeur du combat & la vue du danger.

J'ai dit, 2.<sup>o</sup> qu'elle ne peut servir presque jamais qu'à faire tirer; lorsqu'on ne devoit pas tirer, parce que l'effet de la hausse est de donner de l'élévation à des pièces qui en ont peut-être déjà beaucoup par leur construction: or les boulets tirés de cette manière, n'agissant que sur le point où ils tombent en plongeant, & faisant peu ou point de ricochets, ne pourront rencontrer l'ennemi que par le plus grand hasard; & quand ils le rencontreront, ne blesseront guère qu'un homme. Il vaudroit donc mieux, généralement parlant, conserver les munitions pour le moment où elles seront plus utiles. J'ai dit, 3.<sup>o</sup> que son opération est toujours tâtonneuse & souvent impossible; en effet, pour en user utilement, il faudroit pouvoir observer la chute du premier boulet, afin de donner en conséquence plus ou moins de degrés de hausse, selon que le boulet seroit tombé trop près ou trop loin. Mais vis-à-vis  
de

de l'ennemi, fait-on de combien le boulet est tombé trop près ou trop loin? D'ailleurs les portées ne sont-elles pas sujettes à varier? & pour atteindre une ligne de trois hommes de profondeur, par la simple chute du boulet, il faut la plus grande précision. Que de tâtonnemens pour vaincre ces difficultés! & peut-on se flatter de les vaincre? Mais si on ne peut pas observer la chute des boulets, comme il arrivera très-fréquemment, si l'ennemi est en mouvement; si on y est soi-même; n'est-il pas évident que les moyens de régler ces tâtonnemens deviennent impraticables, & que par conséquent l'usage de la hausse devient impossible?

Je crois avoir solidement établi la supériorité des pièces longues, sur les pièces courtes, tant pour la portée que pour la justesse; je pense avoir mis dans la plus grande évidence la frivolité & l'insuffisance des moyens par lesquels on a prétendu retrouver dans les pièces courtes une égalité de portée & de justesse avec les pièces longues: moyens qui n'en imposeront à aucun Militaire éclairé, encore moins à aucun Officier d'Artillerie expérimenté, & qui, bien appréciés, seront si l'on veut, des expédiens ingénieux & adroits pour défendre une mauvaise cause, mais qui, dans le vrai, ne sont qu'un aveu forcé de l'infériorité des pièces courtes. Il n'est qu'un point seul sur lequel on ne peut malheureusement leur refuser une fâcheuse supériorité, c'est celle du recul.

La théorie seule nous apprendroit que les pièces courtes & légères ont plus de recul que les pièces longues de même calibre, & à même charge, pour trois raisons; la première, parce que la poudre enflammée leur imprime plus de vitesse en arrière, à proportion de leur plus de légèreté; on sait que l'explosion de la poudre enflammée agit dans tous les sens, tandis qu'elle chasse le boulet en avant du côté de la bouche, elle repousse la culasse en arrière avec la même impétuosité. La pièce courte étant plus légère que la pièce longue de même calibre, il est tout naturel qu'à même charge de poudre, elle recule plus loin que la pièce longue dont le poids oppose plus de résistance; la deuxième, parce que la pièce courte

essuie moins de frottement sur le terrain, dans le rapport de cette même légèreté; la troisième, parce que l'essieu de fer souffre moins de frottement dans le moyeu dont le dedans est garni de boîtes de cuivre, suivant le nouveau système. L'expérience confirme pleinement la théorie, puisque dans des épreuves faites à Grenoble, on a trouvé que le recul des pièces du nouveau modèle étoit plus que triple de celui des pièces de l'ancien.

C'est un inconvénient, il est vrai, que la pesanteur énorme de l'Artillerie; on conviendra que ce seroit un très-grand bien, si on pouvoit l'alléger encore, sans en altérer la valeur & sans lui faire rien perdre de ses avantages; mais quelque pesante qu'elle soit, avons-nous à nous plaindre, lorsque nous la comparerons à la balistique des Anciens? On ne pouvoit fabriquer une partie de leurs machines que sur les lieux, sous les yeux des ennemis: une sortie d'une ville assiégée, détruisoit par le feu, sans ressource & en moins d'une heure, le travail de plusieurs mois. Nos pièces d'Artillerie, quelque pesantes qu'elles soient, plus mobiles que les machines des Anciens, sont toujours transportables; & à combien d'usages de plus ne sont-elles pas employées! Les avantages infinis que nous en retirons, nous dédommagent amplement des difficultés qu'il nous reste à surmonter, à raison de cette pesanteur.

Nous avouons cependant avec franchise que, quelque inférieures que soient ces difficultés à celles des machines des Anciens, elles ne sont encore que trop considérables, pour ne pas porter la plus grande attention à éviter tout ce qui peut, ou les augmenter, ou les multiplier.

C'est-là sans doute que les défenseurs de la nouvelle Artillerie, exalteront la prétendue légèreté de leurs pièces. Qui croiroit que c'est précisément cette nouvelle Artillerie qui éprouve elle-même, & fait éprouver à toute une armée, l'embarras de sa pesanteur? En voici la preuve; leur Artillerie est plus légère, disent-ils, elle vole; des hommes la portent sans le secours de chevaux, par-tout où l'on veut. Soit, mais tout au plus pour la pièce de quatre, car il est prouvé, par les

essais faits dans les exercices même, où l'on a tous les secours à souhait, que la manœuvre à bras est impraticable pour les calibres supérieurs, pour peu que le terrain offre de difficulté. D'ailleurs, quand même cette Artillerie seroit transportée avec plus de facilité, quels seront ses effets comparés avec ceux des pièces longues ? On peut déjà le conclure de ce qui précède, & on le verra plus amplement détaillé dans la seconde partie de ce Mémoire. Or la mobilité d'une mauvaise pièce qui ne sert à rien, ou à peu de chose, & qui occupe la place d'une autre qui seroit beaucoup d'effet, loin d'être un avantage dans une armée, n'est qu'un embarras de plus & une ressource de moins ; en effet, personne n'ignore qu'un des plus grands embarras d'une armée, est de faire marcher l'Artillerie avec ses munitions, chaque pièce, petite ou grande, exigeant que ses munitions soient portées dans une voiture séparée, attelée ordinairement de quatre chevaux. Or, les partisans de la nouvelle Artillerie ne font point de mystère de dire ouvertement, dans leurs Écrits, qu'en vertu de cette grande légèreté, ils augmenteront au moins d'un quart, ou d'un tiers, le nombre de leurs pièces dans un équipage de campagne. Si au lieu de cent vingt, cent trente, supposons cent cinquante pièces de l'ancienne Artillerie, ils en mettent deux cents de celle soi-disant légère, dont la majeure partie fera de gros calibre, au rebours de l'usage ancien, où le gros calibre étoit la plus petite proportion dans un équipage, croit-on que cette Artillerie qui, avec sa légèreté, somme toute, ne peut aller plus vite que ses munitions, sans lesquelles elle devient nulle ; croit-on, dis-je, qu'elle sera moins embarrassante & plus facile à conduire dans une longue marche, sur une grande route, qu'un équipage de l'ancienne Artillerie qui sera meilleure, sans contredit, quoique moins nombreuse, sur-tout en gros calibre, & dont la file sera d'un quart, & même d'un tiers plus courte. Qu'importe qu'on puisse porter cette Artillerie à bras, si ses munitions doivent marcher de concert, qu'apparemment on ne proposera pas de faire porter aussi à bras par des Soldats ? Que de

peine un jour de bataille pour porter, placer cette multitude immense de pièces de Régimens ! Eh combien d'elles totalement inutiles, ou qui ne servent qu'à consommer, en pure perte, des munitions précieuses, & qu'à faire du bruit sans effet, ne pouvant tirer que vis-à-vis trois hommes de hauteur, dont c'est un grand hasard, si un seul en est atteint, tandis que trois ou quatre batteries de pièces longues, placées avantageusement pour tirer d'écharpe ou de flanc sur des corps entiers, ou sur une ligne, décideroient souvent du sort d'une bataille ? Dira-t-on que cette multitude de pièces oisives, qui ne marchent qu'avec leur approvisionnement ou munitions, quelque légères qu'elles soient, ne soit pas une surcharge inutile, & par conséquent embarrassante pour une armée ? Leur légèreté n'est donc qu'un véritable leurre. Mais si les pièces courtes du nouveau système, ne peuvent être au pair avec les pièces longues du même calibre de l'Ordonnance de 1732, & ne peuvent, dans l'occasion, remplir ces mêmes services, encore incomplètement, sans substituer un calibre supérieur ; n'est-il pas vrai, à la lettre, que l'Artillerie prétendue légère est intrinsèquement & de fait plus pesante que l'Artillerie de l'Ordonnance de 1732 ?

Qu'il faille substituer la pièce de 8<sup>e</sup> courte à celle de 4<sup>e</sup> longue pour en égaler les effets, il ne faut pas croire que ce soit une simple supposition, il y a peu d'Officiers d'Artillerie qui ne soient convaincus de ce fait ; mais ce qui tranche décisivement toute espèce de doute, est une pièce dont personne ne peut suspecter la fidélité, l'exactitude & l'authenticité. C'est un Mémoire raisonné sur les épreuves de la nouvelle Artillerie, faites à Strasbourg, de M. Leduc, Officier de mérite & éclairé, nommé par le Roi pour y assister en qualité de Commissaire de Sa Majesté, & qui, d'après ces expériences, dont le procès-verbal est connu, conclut qu'il falloit abandonner la pièce de 8<sup>e</sup> courte, & la remplacer par notre ancienne pièce de 4<sup>e</sup>.

Or, s'il est vrai, comme on n'en peut douter, que l'Artillerie nouvelle, pour être au pair avec l'ancienne, & rendre

le même service que les pièces longues, doive fournir le calibre de 8 court, où suffisoit celui de 4 long, & soit forcée d'employer celui de 12 court, où celui de 8 long seroit suffisant, non-seulement ce calibre supérieur sera, à la lettre, intrinsèquement plus pesant \* que la pièce longue du calibre inférieur, mais il faudra que la pièce courte s'approvisionne du double de munitions, au moins d'une moitié en sus, si on veut qu'elle tire autant de coups que la longue, ou elle aura moitié, ou au moins un tiers moins de coups à tirer que la pièce longue; & on appelle cela une Artillerie légère! Dieu veuille que nos ennemis la conservent à jamais, & le Ciel nous préserve de les imiter!

Une fois avouée par les panégyristes de la nouvelle Artillerie, ou du moins une fois démontrée la supériorité de nos anciennes pièces longues, sur les courtes nouvelles, pour la portée, pour la justesse du tir, & même pour la légèreté & la facilité des transports, on auroit lieu de croire la discussion terminée, & la question décidée sans retour; mais il n'en est pas ainsi, ils prétendent que toutes ces supériorités, fussent-elles, disent-ils, réelles, sont inutiles à la guerre, & que la nouvelle Artillerie a plus qu'il n'en faut, à tous égards, pour satisfaire à tous les cas qui peuvent se rencontrer; c'est ce que nous allons examiner dans l'article suivant!

## ARTICLE SECOND.

### *Importance de la Supériorité des pièces longues.*

1.<sup>o</sup> Si le théâtre de la guerre s'éloigne des frontières, il faudra, dans le nouveau système, transporter deux équipages complets d'Artillerie, l'un pour les sièges, & l'autre pour la guerre de campagne. Dans l'ancien système, il suffisoit d'ajouter quelques pièces de 16 & de 24, à des pièces de campagne, qui sont propres à toutes espèces de guerre. Qu'on

---

\* Voyez à la fin de l'addition à ce Mémoire, le poids des pièces des trois calibres, tant anciennes longues, que nouvelles courtes, tant montées sur (& avec) leurs affûts, que seules sans leurs affûts.

compare l'embarras, la dépense, la différence est énorme !

2.<sup>o</sup> Si la guerre se fait sur les frontières, l'embarras & la dépense ne seront que diminués. A chaque siège qui se présentera, il faudra faire venir toute l'Artillerie de siège, parce que l'Artillerie de campagne de l'armée assiégeante, ne peut entrer en batterie : dans l'ancien système, celle de l'armée feroit une partie considérable de celle de siège.

3.<sup>o</sup> Si quelqu'avantage remporté, ou un mouvement volontaire de l'ennemi met dans le cas d'attaquer une Bicoque, qui exige cependant des batteries, faudra-t-il s'y morfondre pour attendre l'arrivée des pièces qui puissent servir dans des embrasures, & que l'ennemi pourra peut-être intercepter ? Non, dit-on, ce sera un cas prévu, & on aura eu soin de se pourvoir d'Artillerie propre à cet usage : on répond qu'on pourra souvent être surchargé de cette Artillerie, pendant toute une campagne, sans trouver la circonstance favorable de l'employer ; & tout ce qu'on peut conclure de ceci, c'est qu'il seroit bien plus avantageux d'avoir une Artillerie de campagne avec laquelle on pût, sur le champ, saisir les circonstances heureuses.

4.<sup>o</sup> On construit quelque ouvrage, soit pour défendre une tête de pont, soit pour s'assurer d'un passage important, soit pour fortifier un camp, ou même un champ de bataille ; mais le canon de campagne de la nouvelle Artillerie est trop court, il ne peut servir dans des embrasures ; on fera, sans doute, encore venir de l'Artillerie de siège de ces places de dépôt !

5.<sup>o</sup> Quand les circonstances qui ont exigé ces pièces longues, seront passées, qu'en fera-t-on ? Les renverra-t-on aux places de dépôt ? Ce seroit un mouvement perpétuel, dispendieux, embarrassant & souvent dangereux, & ces inconvéniens augmenteroient à mesure qu'on s'éloigneroit de ces places de dépôt, car on n'est pas maître d'en avoir à la portée qui soient sûres. Si on vouloit garder ces pièces, on surchargerait une Artillerie déjà trop nombreuse, & on tomberoit dans des embarras beaucoup plus grands que ceux qu'on prétendoit éviter par l'Artillerie nouvelle.



6.<sup>o</sup> Combien de fois la supériorité de force que donnent les pièces longues, ne sera-t-elle pas avantageuse pour rompre, percer, renverser les obstacles qu'oppose l'ennemi, comme colonnes de troupes, retranchemens, abatis, &c. effets qu'elles produiront d'autant plus promptement, qu'elles y joindront la justesse du tir; & combien de fois le succès à la guerre dépend-il de la promptitude de l'exécution!

7.<sup>o</sup> Toutes les fois qu'on combattra, Artillerie contre Artillerie, quel avantage n'aura pas sur l'autre, celle qui aura en sa faveur la supériorité de force, de portée & de justesse, dirigée avec intelligence? C'est ce que l'Artillerie françoise a constamment éprouvé dans les guerres précédentes, & notamment à Berg-op-zoom où M. le Maréchal de Lowhendal commandoit. Il y avoit plusieurs semaines que la tranchée étoit ouverte, la Place approvisionnée d'une Artillerie formidable, répondoit à nos feux sur le front de l'attaque avec une vivacité sans égale. Une de leurs pièces démontée par hasard par des coups trop directs, étoit bientôt remplacée par une autre qui ne donnoit pas le temps d'apercevoir le vide de la première. Un feu réciproque, continu & des plus vifs devenoit meurtrier. Le siège menaçoit de tirer en longueur. On aperçut le défaut. Des coups directs, tirant de face contre une ligne où sont rangés plusieurs objets, n'en peuvent heurter qu'un seul; & s'il y a plus de vide que de plein, il doit y avoir des coups sans nombre de perdus. On prolongea la première parallèle de droite & de gauche, & en embrassant un plus vaste terrain, des deux extrémités où l'on plaça deux batteries, l'une de huit pièces à la droite de l'attaque & six mortiers, l'autre de trois pièces & quatre mortiers à la gauche, on se trouva posté avantageusement pour tirer, non-seulement obliquement, ce qui est toujours favorable pour rencontrer plus d'objets, mais encore pour tirer presque de flanc; moyen le plus destructeur de tous les obstacles qu'on veut ruiner. On ne fut pas long-temps à en voir l'effet. Deux jours passés, il ne fut plus question des feux de la place au front de l'attaque. L'ennemi avoit une bonne Artillerie,

la nôtre ne lui cédoit en rien. Tant que nous ne tirions que directement, nous combattions à armes égales; la position n'étoit pas plus avantageuse pour l'un que pour l'autre, le combat eût duré long-temps. Nous n'eumes pas plutôt occupé deux postes qui procurèrent une direction favorable pour l'Artillerie, que la chance tourna; deux batteries éteignirent seules des feux que n'avoient pu éteindre, pendant plusieurs semaines, les nombreuses batteries qu'on leur avoit opposées. Nouvelle preuve, comme l'a bien reconnu le Roi de Prusse, que ce n'est pas la quantité d'Artillerie, ni même la bonne seulement, qui fait prendre des villes & gagner des batailles, mais que c'est de la bonne disposition & de la direction bien entendue d'une bonne Artillerie, que l'on doit attendre le succès, & non pas du nombre qui, trop grand, nuit toujours plus qu'il ne sert.

Si la réussite dans les sièges dépend moins du nombre des pièces d'Artillerie, que d'une juste direction de leur feu, il n'est pas moins vrai que dans les batailles, nonobstant le changement successif des positions, qui sont au contraire stables & permanentes dans les sièges, ce n'est qu'autant que l'on saisira des directions heureuses pour tirer de flanc, s'il est possible, ou au moins d'écharpe sur les troupes ennemies, qu'on doit espérer de tirer parti, même de la meilleure Artillerie; on en a eu une preuve non équivoque à l'affaire de Dettingen, où une seule batterie qui suivoit l'ennemi, en se conformant à sa marche, tua plus de monde que n'eussent fait toutes les autres batteries ensemble.

Que résulte-t-il de ces faits notoires? Que quiconque mettra sa confiance dans une nombreuse Artillerie, fût-elle aussi bonne que la courte est mauvaise, sera déçu dans ses espérances, s'il ne connoît pas les avantages d'une bonne position, & s'il ne fait pas, ou ne peut pas se la procurer; & que quiconque connoîtra ces avantages, se gardera bien de s'embarasser inutilement d'une Artillerie trop nombreuse, mais adoptera toujours celle qui sera du meilleur service. C'est ce qui a bientôt fait reconnoître le peu d'utilité des  
pièces

pièces à la Suédoise, qui sont des pièces courtes, & de fait, incapables de produire les effets des pièces longues.

Il fut fait, en 1740, à Strasbourg, en présence de M.<sup>rs</sup> les Maréchaux de Broglie & d'Asfeldt, des épreuves pour comparer la vivacité du feu, entre la pièce à la Suédoise, que la nouvelle de 4 représente aujourd'hui, & la pièce de 4 ordinaire; on reconnut que par minute, la pièce courte tiroit onze coups, contre neuf de la longue; mais que la première s'échauffant plus vite, il falloit interrompre son feu, pendant que l'autre continuoît encore son service sans avoir besoin d'être rafraîchie.

Si indépendamment de cet inconvénient, (dont on sent mieux l'importance dans le moment d'une action) on considère qu'il ne faut pas se flatter que l'on puisse tirer aussi promptement en présence de l'ennemi, qui ne manqueroit pas, par son feu, d'y mettre obstacle; & que de plus, quand on le voudroit, la seule fumée permettroit à peine de tirer cinq à six coups par minute: il sera toujours plus utile de tirer avec des pièces du calibre de 4, de bonne construction, qui ont de la portée, de la justesse & de la résistance, & qui servant encore à beaucoup d'autres usages, ne remplissent que plus supérieurement les seuls cas particuliers où les pièces courtes pourroient être de quelque service, rendent superflu l'usage des pièces courtes, dont la plus grande vivacité est absolument inutile dans la pratique, & diminuent les embarras de la multiplicité des différentes constructions.

8.<sup>o</sup> Toutes les fois qu'il sera question de défendre ou de tenter le passage d'une rivière; dans la défense, il s'agit 1.<sup>o</sup> de maîtriser par son canon l'embouchure des autres rivières qui tombent dans celle que l'on défend, parce que c'est ordinairement sur celles-là que l'ennemi fait ses préparatifs en secret & en sûreté, & c'est par elles qu'il débouche; le canon le plus propre à s'y opposer, n'est-ce pas celui qui a plus de portée & plus de justesse dans le tir? La comparaison qu'on fit à ce sujet en 1744, en présence de l'armée commandée par M. le Maréchal de Coigny, des pièces de 4

longues, avec celles à la Suédoise, ne laisse aucun doute. Ce Général ordonna qu'il seroit placé sur la rive gauche du Rhin dix pièces de 4, pour battre le confluent du Necker & couler à fond les bateaux qui s'y présenteroient : M. le Comte de Balincourt, depuis Maréchal de France, demanda des pièces à la Suédoise; M. de la Gaucherie, officier de mérite, l'un des Commandans de l'Artillerie, représenta qu'elles ne rempliroient pas l'objet qu'on s'étoit proposé : on employa des pièces à la Suédoise & des pièces de 4 longues; les boulets des premières n'arrivoient au terme marqué, que sous un angle trop ouvert, plongeoiient & ne ricochoient point; ceux des pièces de 4 ordinaires, portoient sous un degré beaucoup plus bas, beaucoup au-delà de ce terme, & faisoient plusieurs ricochets après la première chute sur la surface de l'eau; toute l'armée en fut témoin. Il s'agit 2.<sup>o</sup> quand l'ennemi fait son embarquement sur le fleuve même, de le battre pendant qu'il s'approche de l'autre bord, pendant l'embarquement & pendant le trajet. La supériorité de portée servira pour le premier cas; la supériorité de justesse pour tous les trois. Veut-on passer à l'autre bord en présence de l'ennemi? l'objet de l'artillerie de l'armée qui tente le passage, doit être de balayer tous les obstacles qui se présentent à l'autre rive, tant artillerie que troupes; n'est-il pas évident que les pièces longues ayant plus de portée & de justesse, peuvent opérer plus efficacement cet effet? & soixante ou quatre-vingts toises de portée de plus ou de moins sont-elles, en ce cas, un objet indifférent?

9.<sup>o</sup> Si une armée ou un corps de troupes vouloit en obliger un autre, par la canonnade, d'abandonner un poste inabordable, quel avantage ne donneroient pas les pièces supérieures en portée, à l'armée qui auroit le bonheur de les avoir? Le succès n'en dépendroit-il pas totalement? On pourroit parcourir toutes les actions de guerre, on trouveroit par-tout quelques-uns des avantages des pièces longues. J'en viens à l'action principale qui est la bataille.

10.<sup>o</sup> Quand les colonnes de l'armée ennemie arrivent

sur le champ de bataille, si le Général projette de les attaquer avant qu'elles aient fait leurs dispositions, il ordonnera de les canonner pour les troubler & les retarder. Comme elles ne se sont point encore étendues en une ligne mince, à trois hommes de profondeur, elles offrent un but suffisant pour les canonner avec succès, si elles sont à moins de mille toises de distance; car les pièces de 4 longues à 4 degrés, & les calibres supérieurs à 3 degrés portent à cette distance, y compris les ricochets qui sont plus propres que les coups de plein fouet pour troubler les manœuvres; les pièces courtes, à même distance, ne pourroient porter que sous un trop grand degré d'élévation qui les priveroit du ricochet, & ne feroit tomber le boulet que sur un point, & par conséquent sur un seul homme, si par hasard il s'y rencontroit. Si l'ennemi se forme & s'avance, les pièces courtes pourront tirer avec quelque succès, mais alors les pièces longues commenceront à prendre des directions obliques qui feront un bien plus grand effet, de sorte que l'ennemi étant à 400 toises, la pièce longue pointée sous une obliquité qui forme sur la ligne du front de l'armée ennemie un angle environ de 30 degrés, pourra mettre, à charge égale, à chaque coup, sept à huit hommes, & peut-être plus hors de combat, s'ils sont ferrés à l'ordinaire, pendant que la pièce courte tirant directement, comme on le propose, n'en peut mettre au plus que trois. Si elle veut prendre, dans ce cas, la manière de tirer de la pièce longue, son boulet n'arrivera point; s'il arrive, ce ne sera qu'à la faveur d'un degré d'élévation plus considérable; par conséquent il ne tombera que sur un seul point, en plongeant, & sans ricocher. Il est même tel degré d'obliquité, celui de 10, auquel la pièce longue peut d'un seul coup mettre quinze à dix-huit hommes hors de combat: que fera de mieux à cette distance, la cartouche à balle tant vantée? De plus, la pièce courte pointée directement, doit opter entre tirer sur le canon, ou sur les troupes; la pièce longue moyennant le tir oblique, pourra se proposer ce double but toutes les fois que le canon ennemi débordera sa ligne; il pourra atteindre

l'un & l'autre du même coup, ou l'un au défaut de l'autre, rarement les manquera-t-on tous deux. Mais ce n'est pas le tout. Une batterie de pièces longues, capable de porter à mille toises, peut, au gré du Général, réunir tous les feux sur telle partie de la première ligne de l'Armée ennemie, par où il lui plaira de faire commencer l'attaque, rompre cette ligne, y mettre le désordre & porter la confusion jusque dans les seconde & troisième lignes, assurer la marche des attaquans, qui dans ce trouble auront peu à redouter les coups directs des pièces courtes de l'ennemi. Pendant que ceux-ci achèvent avec l'activité si caractéristique de la Nation d'enfoncer un corps déjà ébranlé jusqu'à la troisième ligne, cette même Artillerie change un peu sa direction, répète sur une autre partie de la même ligne, la plus voisine, la même manœuvre; & promenant ainsi successivement les feux sur le restant de la ligne, non-seulement empêche les Bataillons ennemis de se secourir réciproquement, mais donne jour à de nouveaux assauts & prépare à de nouvelles attaques: voilà le véritable office de l'Artillerie dans les batailles; & c'est ainsi qu'il lui convient de protéger l'Infanterie françoise, & abandonner le reste à sa valeur. Si on ajoute à tout cela le désavantage qu'ont souvent les pièces courtes de ne pouvoir saisir des positions favorables que présente le local, les unes parce qu'elles sont trop éloignées pour leur portée, les autres parce qu'elles sont trop étroites pour leur recul; il faudra convenir de bonne foi, que les pièces légères & raccourcies, sont bien moins propres pour un jour de bataille que pour un exercice de parade.

Les batailles de Raucoux, de Dettinghen & d'Hastembeck fournissent des preuves mémorables de ces vérités; dans la première, M. le Maréchal de Saxe, qui voyoit une colonne se former & venir à lui, employa des pièces longues du calibre de 16, qui décidèrent bientôt du gain de la bataille. De quelles ressources eût été l'Artillerie nouvelle, quoique contre des troupes seulement, dans une circonstance où ce Général, qui ne manquoit pas d'Artillerie de Campagne

jugea s'assurer mieux la victoire, en préférant un calibre de siège?

A la bataille de Dettinghen, commandée par M. le Maréchal de Noailles, lorsqu'on commença à apercevoir à plus de six ou sept cents toises, le projet que l'Armée Angloise avoit de s'assembler dans la plaine de Dettinghen pour livrer la bataille; qu'eussent fait, à cette distance, les pièces minces & courtes de la nouvelle Artillerie, que consommer en pure perte beaucoup de munitions sans atteindre l'ennemi? Incapables par leur peu d'épaisseur, d'augmenter sans risque, la charge modique de poudre à laquelle leurs partisans les ont restreintes pour ménager leur foiblesse, plutôt que pour faire une frivole économie de poudre, elles n'eussent fait que du bruit & point d'effet; obligées de s'élever de plusieurs degrés pour obtenir leur plus grande portée, chacun de leurs boulets, lancé dans la course en l'air, à une grande élévation, n'eût pu dans sa chute, tomber, encore par hasard, que sur un seul homme au plus, sans pouvoir ricocher. Quelle différence des pièces longues, même d'un calibre inférieur! Une seule batterie, placée dans une direction avantageuse, dont la manœuvre aussi simple qu'ingénieuse, est rapportée dans nos Mémoires de l'année 1765, par un feu rasant, dirigé sous un angle modique, rompit toutes les mesures des Anglois & leur fit perdre beaucoup de monde.

On voit bien sensiblement par cet exemple, que comme l'a observé le Roi de Prusse, revenu depuis long-temps du préjugé de la nombreuse Artillerie, il s'agit moins pour gagner des batailles d'en avoir une très-nombreuse qui ne fait que multiplier les embarras, que d'en avoir une bonne & des Officiers intelligens.

Combien de temps n'eût-on pas perdu à la bataille d'Hastembeck, gagnée par M. le Maréchal d'Estrées, s'il eût fallu attendre, pour tirer, que l'ennemi eût approché à cinq cents toises; il avoit conçu le projet d'attaquer notre ligne par colonnes & de se former ainsi à une distance considérable de plus de six à sept cents toises. Qu'eût fait à un pareil

éloignement une Artillerie courte, oisive par économie, ou par impuissance? Une Artillerie qui ne doit pas, suivant ses partisans, tirer de plus de cinq cents toises, eût laissé croître cette colonne formidable, & lui eût donné le loisir de se former à l'aise, & sans la moindre inquiétude. Que firent les pièces longues? on s'aperçut par les mouvemens de l'ennemi, de son dessein, avant qu'il eût commencé à l'exécuter: on prit sur lui des feux de front, d'écharpe, & de revers, qui le désolèrent; & plus il s'opiniâtroit à fortifier sa colonne, plus il éprouvoit les feux meurtriers de notre Artillerie, qui, en les multipliant & en les avançant sans interruption, mit l'armée ennemie dans une déroute totale, & nous procura une victoire complète sans perte de notre part.

Je me flatte que les personnes qui ne cherchent que le vrai, qui auront lû ce Mémoire, même avec quelque prévention, ne laisseront pas d'en conclure que l'Artillerie de l'Ordonnance de 1732, réunissoit toutes les qualités que nous avons détaillées, dont le concours est nécessaire pour former une bonne Artillerie; qu'elle étoit réduite à la plus grande simplicité, si desirable dans tout objet compliqué, dispendieux & embarrassant, & que l'adoption que l'on avoit faite des obusiers ne laissoit rien à desirer pour toutes les occasions où il convient d'employer de l'Artillerie.

Je crois avoir démontré la supériorité des pièces longues sur les pièces courtes, non-seulement du même calibre, qui sont bien loin de soutenir la comparaison, mais aussi sur celles du calibre supérieur.

J'ai prouvé cette prééminence de la pièce longue, tant à raison de sa solidité, qu'en égard à l'étendue de sa portée, à sa justesse dans le tir, à la médiocrité de son recul, à la simplicité de sa construction, à celle de ses affûts, & à la facilité de faire réparer en tous lieux, & par toutes sortes d'ouvriers, les accidens qui peuvent survenir, quoique plus rarement qu'aux pièces courtes: enfin relativement à l'économie, puisque les pièces de l'ancien calibre de 4, faisant



l'office (& supérieurement) du calibre de 8 nouveau, le 8 ancien pareillement fournissant complètement le service du nouveau de 12; il s'ensuit qu'il faut dans un équipage d'Artillerie, composé de pièces longues anciennes, un tiers (on pourroit dire moitié) moins de poudre, un tiers moins pesant de boulets; en un mot, beaucoup moins de chariots, de voitures, de charretiers, de chevaux que dans un équipage de la nouvelle Artillerie, prétendue légère, si celle-ci veut paroître égaler le service de l'ancienne.

Quant à l'importance de cette supériorité à l'armée; qui auroit jamais imaginé qu'on eût osé la mettre en problème, encore moins la combattre sérieusement? Cependant les partisans du nouveau système, dans l'impuissance où ils se trouvent réduits de prouver une égalité de valeur & d'effets entre leur Artillerie courte & notre ancienne longue, veulent paroître aujourd'hui n'avoir discuté la parité de ces avantages que par surabondance de preuves, & par un effet de leur persuasion intérieure, & nullement comme nécessaire au soutien de leur système-pratique; ils la croient d'une assez légère importance pour les autoriser à proposer de substituer leur nouvelle Artillerie à la nôtre, & pour consentir, mais par grâce, à abandonner cette supériorité. « Elle est, disent-ils, inutile; vos pièces tirent à plus de 1000 toises? nous ne voulons tirer „ qu'à 500 toises; vos pièces tirent, à une grande distance, „ aussi juste que les nôtres à 500 toises; la justesse de cette „ distance nous suffit; on ne doit pas tirer au-delà. A 500 toises „ nous sommes égaux, c'en est assez. L'excédant est une super- „ fluité qui ne feroit que nous embarrasser. Et si tant est que „ ce soit un avantage, n'est-il pas plus que compensé par celui „ que procure la grande célérité, avec laquelle marche & „ manœuvre notre Artillerie? » Mais de quelle autorité, & sur quelle garantie, les défenseurs du nouveau système établissent-ils cette règle? Peut-on ordonner à l'ennemi d'approcher à 500 toises, lorsqu'il sera posté à 600? Restera-t-on spectateur oisif de ses travaux & de ses manœuvres, jusqu'à ce qu'il lui plaise de s'approcher de 100 toises encore? « Au-delà de

» 500<sup>t</sup>, dira-t-on, on ne porte avec l'Artillerie d'aujourd'hui,  
 » en usage dans toute l'Europe, que des coups incertains;  
 » mais de près, ce feu sera bien plus vif. Il faut avec ses  
 ennemis se battre à armes égales sous peine d'être battu ».

D'accord, si on n'en a pas de meilleures. Mais si l'on en possède qui lancent des coups meurtriers de plus loin, & qui atteignent vigoureusement l'ennemi; qui à 7 ou 800 toises mettent le désordre dans son monde, comme il pourroit faire dans le nôtre à 500 toises; doit-on attendre qu'il soit approché à cette distance où son feu sera aussi meurtrier contre nos troupes, que le nôtre contre les siennes, tandis qu'on a le loisir avec une Artillerie meilleure que la sienne de le prévenir avec une entière sécurité, & de lui rendre impraticables les approches du point où il se trouveroit en passe de pouvoir mesurer son Artillerie contre la nôtre; pendant que l'on aura encore l'avantage avec des batteries de pièces longues qui le prendront de flanc ou d'écharpe, non-seulement de l'empêcher d'arriver à 500 toises, d'où il pourroit nous nuire, mais encore avant qu'il puisse nous atteindre, de fatiguer & même de rompre les troupes qu'il oseroit faire avancer?

Combien d'exemples pourroit-on citer où l'on a été redevable de la victoire à la solidité de nos pièces longues pour soutenir long-temps, sans interruption, un feu continuuel dans une action animée: à leur longue portée, qui met autant d'hommes hors de combat par les ricochets, que par les coups de volée: à leur justesse pour le tir, qui est indispensable pour démonter des batteries & éteindre des feux meurtriers, d'où dépend souvent le sort d'une action? Quelle ressource offrent dans tous ces cas des pièces qui, de l'aveu de leurs panégyristes, ne commencent à tirer juste qu'à 500 toises?

Voilà ce que nous a, jusqu'à ce jour, appris l'expérience de près de cinquante années, pendant lesquelles nous avons été successivement, mon père ou moi, chargés de la direction générale de l'Artillerie, sous l'autorité du Ministre; & ce que

que nous avons constamment observé, tant par nous-mêmes, que par les comptes qui nous étoient rendus.

C'est à ces vérités importantes, ainsi qu'à la bonne discipline qui avoit été établie dans le Corps Royal d'Artillerie, que nous avons dû, mon père & moi, les succès dans l'Artillerie, dont le feu Roi a eu la bonté plusieurs fois de nous témoigner sa satisfaction. Ces vérités nous survivront; elles peuvent dans des temps s'obscurcir: le penchant assez naturel de tous les hommes pour des nouveautés séduisantes, peut faire illusion à notre Nation, comme il l'a fait dans une partie du Nord de l'Europe; c'est pour prévenir ce malheur que j'ai cru que le devoir de la place de confiance que j'ai eu l'honneur d'occuper depuis mon père, dans le Corps Royal d'Artillerie, & que j'ai encore celui de remplir actuellement, exigeoit aujourd'hui de moi de rassembler ces vérités sous un point de vue, pour les déposer dans les archives de l'Académie, destinées à conserver & à transmettre à la postérité la mémoire de ce que les travaux & les recherches dans les Arts & les Sciences, ont pu faire découvrir d'utile & d'intéressant pour le bien public.

Ma carrière s'avance, mais quoique ma santé soit affoiblie par les peines & les fatigues que j'ai essuyées, mon dernier soupir n'en sera pas moins consacré au service du Roi. Après avoir eu l'honneur de servir son Aïeul pendant plus de quarante-cinq ans; quand la reconnaissance des bienfaits que nous en avons reçus, mon père & moi, ne m'obligerait pas à servir son auguste Petit-fils avec le même zèle, une nouvelle ardeur ranimerait bientôt un corps altéré par de longs travaux, si j'étois assez heureux pour employer ce qui me reste de jours à vivre, à quelque chose qui pût être utile à un Monarque, qui, dans l'âge où communément l'on ne s'occupe que de ses plaisirs, n'en a d'autre que celui de protéger ses sujets & d'assurer leur tranquillité, & ne connoît de peines que les obstacles qui s'opposent au bonheur de son peuple ou qui le retardent.

J'ai cru dans ce moment ne pouvoir lui donner de témoignage

plus expreffif de mon entier dévouement pour la Perfonne facrée, & du vif intérêt que je prends à fon bonheur préfent & à venir, que de réunir dans un Écrit les points capitaux, reconnus tels par une longue fuite d'expériences à la guerre, qui ont acquis à l'Artillerie françoife cette fupériorité avouée même des Etrangers, faute defquels elle décherroit bientôt de fa prééminence. Ces obfervations font trop intéreffantes pour la gloire de ce Prince, trop importantes pour le falut de l'État, pour l'honneur du Corps Royal d'Artillerie, pour celui de ma Patrie & pour le bien du fervice, pour ne pas affurer leur fort, en les confignant dans des archives refpectables. Dans quel dépôt, en effet plus facré, pouvois-je remettre une collection de vérités précieufes & avouées par tout ce que nous avons connu d'Officiers plus favans & de perfonnes plus intelligentes dans le Corps Royal d'Artillerie, que nous avons recueillies dans le cours de plus de quatre-vingts années d'études, d'expériences, de méditations & de pratique à la guerre? Je fais, eh qui l'ignore? que chaque particulier eft idolâtre de fon opinion, & la prend prefque toujours pour l'évidence. Mais traitera-t-on d'opinions d'un particulier des vérités cherchées pendant des fiècles, trouvées de concert par tant de perfonnes éclairées dans le Corps Royal, reconnues & confirmées par les fuccès conftans de la pratique, & fans avoir jamais été démenties pendant une fi longue fuite d'années? Qui pourra dire, après de pareilles recherches, que l'on a pris l'ombre de la vérité pour la vérité même?

Tel a été le motif qui m'a infpiré ce Mémoire.

*ADDITION au Mémoire précédent, par laquelle on verra, en comparant les deux Artilleries, même à nombre égal, de combien l'Artillerie légère augmente les embarras, le nombre des voitures, des chevaux, &c. & la dépense, dont on a désiré avoir un détail.*

J'AI exposé dans mon Mémoire, le point de vue qui avoit dirigé la réforme de l'Artillerie Française en 1732, qui étoit d'avoir une Artillerie qui fût en même-temps propre pour la guerre de sièges & la guerre de campagne. De-là résultoient plusieurs avantages très-importans, outre celui de l'économie.

1.<sup>o</sup> De n'être jamais obligé de se surcharger d'un double équipage, un pour les sièges & l'autre pour la guerre de campagne; 2.<sup>o</sup> de se trouver toujours en mesure vis-à-vis de toutes les circonstances qui se présentent dans la guerre de campagne, comme attaque ou défense de redoutes, châteaux, ou autres postes fortifiés; 3.<sup>o</sup> de pouvoir dans le besoin tirer des places une Artillerie propre pour l'armée, & jeter promptement dans des places menacées, un supplément d'Artillerie, en même temps qu'on y jette un supplément de troupes.

Pour donner un tableau de comparaison de l'ancienne Artillerie avec la nouvelle, qui puisse présenter une idée juste de la différence considérable qu'il y a entr'elles, & de la grande supériorité à tous égards de la première sur la seconde, il est bon de se rappeler, que les partisans du nouveau système, en vertu de la légèreté de leurs pièces, dont on peut connoître la valeur par l'exposé que j'en ai fait, prétendent en augmenter considérablement le nombre, dans les équipages de campagne.

Il n'est pas inutile d'ajouter que les pièces courtes de la nouvelle fabrique, à raison même de ce qu'elles contiennent moins de métal, sont plus légères, ont un recul double &

triple, & par conséquent se tourmentent beaucoup dans leurs affûts, ce qui oblige à y faire des réparations continuelles, & souvent à des rechanges; nonobstant la prudente précaution qu'ont les peuples qui les emploient, de diminuer la charge de poudre usitée pour le même calibre; précaution sage, qui découvre, il est vrai, la foiblesse de ces pièces, nuit (il n'est pas besoin de le dire) à l'effet, mais nécessaire pour les faire figurer un peu plus long-temps, & leur faire durer la campagne, s'il est possible. Il est vrai qu'ils auroient peine à persuader que s'ils en usent ainsi, ce n'est que par une louable économie, & pour ménager une quantité de poudre dont leurs pièces ont le merveilleux avantage, dit-on, de n'avoir pas besoin, pour produire les mêmes effets que les longues, avec une charge plus forte.

Enfin, il est essentiel d'exposer le principe sur lequel on a, jusqu'à présent, formé un équipage de campagne, avec l'ancienne Artillerie de pièces longues, des trois calibres de 12, de 8 & de 4. L'usage confirmé par l'expérience & par d'heureux succès, a appris à employer environ un septième du calibre de 12; le double du calibre de 8, & à peu-près les trois cinquièmes en pièces de 4.

Les partisans de la nouvelle Artillerie, au rebours, composent leurs équipages de quatre cinquièmes des deux plus gros calibres, savoir; deux cinquièmes du 12, deux cinquièmes du 8, & seulement un cinquième du calibre de 4. Ce mépris qu'ils font de leur calibre de 4 employé dans une si foible proportion, ne semble-t-il pas annoncer un aveu de son inutilité, ou du moins de son peu de ressource, & combien souvent ils prévoient devoir se trouver forcés d'employer du 8, où l'Artillerie ancienne n'employoit que du 4, & de se servir de leur 12, où le 8 ancien suffisoit?

Qu'on joigne à ce procédé le projet qu'ils forment (apparemment qu'ils en reconnoissent la nécessité) d'augmenter, de beaucoup, le nombre des pièces d'Artillerie du parc; nous sommes bien en droit de ne vouloir pas entrer en comparaison

à nombre égal. Mais pour prouver que nous n'avons rien avancé au hasard, en disant que leur Artillerie légère, est de fait, à la lettre, & intrinséquement plus pesante, plus embarrassante, & ( nous ne l'avons pas dit encore ) infiniment plus dispendieuse que l'ancienne ; nous allons faire la comparaison à nombre égal, sans cependant renoncer au droit que l'équité nous donne de réclamer un autre calcul qui suivra le premier.

Les partisans de la nouvelle Artillerie demandent pour une armée de cent bataillons, deux cents pièces de canon. Jamais armée Françoisé ne mena une pareille Artillerie en campagne ; mais pour soutenir la comparaison, nous allons former un équipage pareil en nombre, & d'après les principes reçus & usités dans le Corps Royal d'Artillerie, & le mettre en parallèle avec cette Artillerie étrangère.

*Comparaison de deux Artilleries du Parc, pour une armée de cent bataillons, avec leurs chevaux & leurs voitures.*

*Combinaison dans les principes de la nouvelle Artillerie, dans le système des Puissances du Nord, d'un équipage de deux cents pièces d'Artillerie, dites légères.*

	Voitures.	Chevaux.
80 pièces de 12, à sept chevaux & à trois voitures de munition chacune.....	240.	1520.
80 pièces de 8 à cinq chevaux & deux voitures..	160.	1040.
40 pièces de 4 à trois chevaux & une voiture...	40.	280.
<u>200 pièces.</u>	<u>440.</u>	<u>2840.</u>

*Combinaison en pièces longues de l'ancienne Artillerie, en nombre égal à la combinaison précédente.*

	Voitures.	Chevaux.
30 pièces de 12, à neuf chevaux & trois voitures.	90.	630.
60 pièces de 8, à sept chevaux & deux voitures.	120.	1000.
70 pièces de 4 longues ordinaires, à quatre chevaux & une voiture. ....	70.	560.
40 pièces de 4 légères à trois chevaux & une voiture*.	40.	280.
<u>200 pièces.</u>	<u>320.</u>	<u>2470.</u>

## R É S U L T A T.

	Voitures.	Chevaux.
Artillerie légère, 200 pièces. ....	440.	2840.
Artillerie ancienne, 200 pièces. ....	320.	2470.
Différence. ....	<u>120.</u>	<u>370.</u>

L'Artillerie des Étrangers, soi-disant légère, exige donc pour un équipage de deux cents pièces de canon, cent vingt voitures, & trois cents soixante-dix chevaux de plus que notre ancienne, pour un pareil équipage composé aussi de deux cents pièces des trois calibres.

Or on n'a jamais mené dans une armée Française de cent bataillons, deux cents canons, non compris ceux que depuis quelques années, on a donnés aux Régimens; rarement un équipage de campagne excède-t-il cent trente ou cent quarante au plus. Mais pour accorder aux partisans de l'Artillerie étrangère, tout l'avantage possible dans la comparaison, voici un calcul pour un équipage de notre ancienne Artillerie sur le pied de cent cinquante pièces.

\* Si nous mettons ici quarante pièces de 4 légères, ce n'est pas que nous y reconnoissons d'utilité particulière; mais les regardant comme superflues, nous ne les avons employées que pour compléter le nombre de 200 que nous

étions engagés de mettre en parallèle, & prouver nos assertions; l'équipage étant déjà bien suffisant, en état de faire face à tout évènement, & de satisfaire à tous les cas possibles de la compétence d'une Artillerie de campagne.



*Combinaison d'un Équipage de cent cinquante pièces de l'ancienne Artillerie, comparé à celui de deux cents de pièces légères.*

	Voitures.	Chevaux.
20 pièces de 12, à neuf chevaux & trois voitures.	60.	420.
40 pièces de 8, à sept chevaux & deux voitures.	80.	600.
70 pièces de 4, à quatre chevaux & une voiture.	70.	560.
20 pièces à la Suédoise à trois chevaux & une voiture.	20.	140.
	<hr/> 230.	<hr/> 1720.

*R É S U L T A T.*

	Voitures.	Chevaux.
Artillerie légère, 200 pièces.....	440.	2840.
Artillerie ancienne, 150 pièces.....	230.	1720.
Différence.....	<hr/> 210.	<hr/> 1120.

L'Artillerie des Étrangers ou légère, surpasse donc dans cette combinaison, notre ancienne, de deux cents dix voitures superflues, de onze cents vingt chevaux, & de quantité d'attirails & de munitions qui ne le font pas moins. Quelle légèreté !

Il reste à donner une idée de l'économie de la poudre : voici l'état des charges de tous les calibres de campagne, tant de l'ancienne que de la nouvelle Artillerie.

	Anciennes Pièces.	Nouvelles.
Pièces de 12.....	5 <sup>2</sup> .	4.
de 8.....	3.	2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> .
de 4 ordinaire.....	2.	1.
de 4 à la Suédoise.....	1 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> .	11

Or, nous avons fait observer que la nouvelle Artillerie des Étrangers, pour égaler les effets de notre ancienne, étoit obligée d'opposer le calibre de 8, pour égaler nos anciennes pièces de 4, & d'employer le 12, pour remplacer nos pièces de 8 ; ainsi, où nous dépensons 2 livres de poudre, les Étrangers

en dépenferont  $2\frac{1}{2}$ ; & ils feront les frais de 4 livres, où nous ne faisons que ceux de 3, non compris l'augmentation d'une moitié en sus du poids des boulets de la pièce de 12 substituée à la 8 longue, & du double de la pièce de 8 courte, à la place de celle de 4 longue. Quelle économie !

<i>Pièces de 4.</i>	<i>Poids du métal.</i>	<i>Poids de l'affût seul avec son avant-train.</i>	<i>Poids de la Pièce sur son affût complet.</i>
Anciennes. . . . .	1150. . . . .	1288. . . . .	2438.
Nouvelles. . . . .	600. . . . .	1219. . . . .	1819.
Différence. . . . .	550 moins.*	69 moins..	619 moins.
<i>Pièces de 8.</i>			
Anciennes. . . . .	2100. . . . .	1479. . . . .	3579.
Nouvelles. . . . .	1200. . . . .	1727. . . . .	2927.
Différence. . . . .	900 moins..	248 plus..	-652 moins.
<i>Pièces de 12.</i>			
Anciennes. . . . .	3200. . . . .	1766. . . . .	4966.
Nouvelles. . . . .	1800. . . . .	1954. . . . .	3754.
Différence. . . . .	1400 moins..	188 plus..	1212 moins.

On voit par ce tableau, qu'avec tout ce qu'on a pu imaginer pour alléger ou plutôt énerver les pièces anciennes, on n'a pas pu parvenir à porter l'allègement d'aucuns des calibres à un quart seulement, & que la diminution ne roule, entre calibres égaux de l'ancienne & de la nouvelle Artillerie, que d'un peu moins d'un quart à environ un cinquième du poids de chaque pièce montée sur son affût complet. Mais comme nous avons observé & démontré que cette comparaison de calibre à calibre ne peut avoir lieu dans la pratique, où,

\* C'est à la pièce nouvelle qu'il faut appliquer la diminution ou l'augmentation des poids, désignées par ces mots *moins*, *plus*, sauf quelques différences inévitables de poids dans la construction des affûts & la fonte des pièces, tant de l'ancienne que de la nouvelle Artillerie.

pour faire quelque comparaison de service, il faut opposer le calibre supérieur des pièces légères au calibre inférieur des pièces longues, on compare dans le tableau ci-dessous les pièces de 4 longues à celles de 8 courtes, & celles de 8 longues à celles de 12 légères; & il sera évident que l'Artillerie annoncée comme légère est à la lettre intrinséquement plus pesante, & par surcroît, prodigieusement multipliée en nombre de pièces.

*Comparaison des Pièces de 4 anciennes avec les nouvelles de 8, & de 8 anciennes avec celles de 12 nouvelles.*

	Poids du métal.	Poids de l'affût complet.	Poids de la Pièce sur son affût complet.
Pièce de 4 ancien.	1150.....	1288.....	2438.
Pièce de 8 nouv.	1200.....	1727.....	2927.
Différence....	50 plus..	439 plus...	489 plus. (a)
Pièce de 8 ancien.	2100.....	1479.....	3579.
Pièce de 12 nouv.	1800.....	1954.....	3754.
Différence....	300 moins.	475 plus..	175 plus. (b)

(a) Non compris le poids du double de boulets pour pouvoir tirer autant de coups que la pièce de 4, & non compris l'augmentation de la charge de poudre (*Voyez le tableau des charges de poudre*), sans compter d'autres attirails pour les rechanges qui sont plus fréquens à l'Artillerie légère.

(b) Item. Non compris moitié en sus du poids des boulets, l'augmentation de poudre, &c.

*Longueurs d'Ames des pièces, tant anciennes que nouvelles, dans les trois calibres qui influent si considérablement sur la portée.*

		pieds. pouces. lignes.		
Pièce de 4....	Anciennes.....	6.	6.	11
	Nouvelles.....	4.	3.	4
	Différence....	2.	2.	8
Pièce de 8....	Anciennes.....	7.	10.	11
	Nouvelles.....	5.	4.	6
	Différence....	2.	5.	6

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

P

		<i>pieds, pouces, lignes.</i>		
Pièce de 12....	Anciennes.....	8.	8.	„
	Nouvelles.....	6.	2.	„
	Différence....	2.	6.	„

Laquelle de ces deux Artilleries réunit en foi les avantages & les qualités essentielles, incomparablement sur l'autre? savoir, la justesse dans le tir, & sous un moindre degré; l'étendue dans les portées, la simplicité dans les constructions & dans les services, soit qu'on tire à barbettes ou à embrasures; le moins d'embaras dans les marches & dans les actions, la solidité relative à la sûreté autant qu'à la durée, la force nécessaire aux effets, la légèreté réelle, l'économie de la poudre, celle du terrain pour les reculs, celle de dépense superflue, & les succès confirmés par l'expérience à la guerre?



S U I T E D U  
VOYAGE FAIT PAR ORDRE DU ROI,  
EN 1753,  
à la côte de Portugal & à l'île de Madère.

S E C O N D E P A R T I E.

S E C T I O N P R E M I È R E.

*RELATION historique d'un Voyage fait par terre à Aveiro, bourg de la province de Beira dans le royaume de Portugal, pour y observer l'Éclipse de Soleil du 26 Octobre 1753; & d'un autre Voyage à l'île de Madère, pour en déterminer la position Astronomique.*

Par M. DE BORY.

A R T I C L E P R E M I E R.

*Sujet du Voyage.*

**L**A position du cap Finistère influe beaucoup sur celle de cette partie de l'Europe que baigne la mer Océane jusqu'au détroit de Gibraltar. Si ce cap a été, sur les Cartes, trop avancé dans la mer, le reste de la Carte a dû se ressentir de ce défaut.

Tandis que je cherchois à faire naître les occasions de m'en assurer par de nouvelles observations, qui pussent confirmer celles que j'avois faites précédemment, M. le Monnier, de cette Académie, me fit part du projet qu'il avoit formé d'aller observer l'Éclipse du Soleil du 26 Octobre 1753, dans l'endroit des côtes de Portugal où elle devoit être

centrale. Il me proposoit d'être de la partie; mais les ordres de Sa Majesté ayant fait préférer par cet Astronome le voyage de Fontainebleau à celui de Portugal, je formai un plan d'observation. Il me parut naturel de profiter de la circonstance de l'Éclipse pour lier ensemble différens points de cette Carte occidentale du continent d'Espagne, & pour y joindre l'île de Madère, dont la position exactement connue, peut rectifier beaucoup d'erreurs dans la Navigation.

Les îles Açores ne sont, jusqu'à présent assujetties à aucune observation astronomique: il étoit donc important de les comprendre dans le travail que je proposois.

Plein de cette idée & de la part que devoit avoir dans cette entreprise, l'Académie de Marine, qui ne peut point perdre de vue la perfection de la Géographie & de la Navigation, je présentai un Mémoire au Ministère; je demandai l'armement d'une frégate, pour transporter dans les endroits indiqués des Académiciens marins, qui fussent chargés d'y faire les observations nécessaires.

Le but de M. le Monnier étoit purement astronomique: quoique ce Savant fût persuadé que la Lune n'a point d'atmosphère bien sensible, cette question cependant lui paroissoit problématique par le calcul de l'Éclipse totale de 1724, dont il est fait mention dans les Transactions philosophiques de l'année 1739. Son zèle pour les progrès de l'Astronomie, l'engageoit à entreprendre un nouveau voyage pour lever les doutes que l'on pourroit avoir à ce sujet.

Voyant que cet Académicien étoit obligé d'abandonner l'exécution de son dessein, je crus que l'on pourroit y suppléer, & je représentai qu'outre l'utilité première & sensible que l'on retireroit de ce voyage par la détermination de quelques points importants, on pourroit raisonnablement se promettre un autre avantage; que peut-être on s'assureroit positivement si la Lune a une atmosphère.

J'avançois que cet éclaircissement ne seroit pas simplement curieux, qu'il seroit connoître le degré de précision dont sont susceptibles les occultations des Étoiles fixes par la Lune.

puisque'il est évident que la réfraction que les Fixes souffriroient à l'approche de cette Planète, si elle a une atmosphère, peut produire quelque changement dans ces observations, qui sont si fort recommandées pour la détermination des Longitudes terrestres.

Le Ministère approuva mon Mémoire, & il fut décidé que l'on armeroit à Brest la frégate du Roi *la Comète*, de trente canons; qu'elle seroit commandée par M. de Chefac, Capitaine de Vaisseau, Commandant des Gardes de la Marine, & Membre de l'Académie de Marine; que je serois partie de l'État-major, aussi-bien que M.<sup>rs</sup> les Chevaliers de Goimpy & de Diziers-Guyon, Enseignes de Vaisseau; & que nous serions chargés de la partie astronomique.

Dans le même temps, M. de l'Isle publia des *Calculs exacts de la trace de l'ombre de la Lune sur l'Espagne & le Portugal, dans l'Éclipse de Soleil du 26 Octobre 1753, faits sur les Tables de M. Halley, par M. Libour.*

Parmi les endroits qu'indiquoit cet Académicien pour être ceux auxquels on verroit cette Éclipse centrale, Aveiro, bourg du royaume de Portugal, & Cartagène, ville de celui d'Espagne, étoient à chaque extrémité de la route de l'ombre sur ces Royaumes.

En conséquence, le Ministère donna à M. de Chefac des instructions qui portoient que M.<sup>rs</sup> de Goimpy, de Diziers & moi, nous irions à Aveiro, & M. de Chabert reçut ordre de se rendre à Cartagène. Il étoit nécessaire de profiter des deux points extrêmes, & le moindre avantage qui pouvoit en résulter étoit de conclure la largeur de ce continent; c'étoit aussi un moyen de plus pour faire évanouir les soupçons que l'on peut former sur l'atmosphère lunaire.

Les instrumens que j'avois portés deux ans auparavant sur la côte d'Espagne, étoient bien suffisans pour les opérations dont j'étois chargé alors, mais celles que j'allois faire en exigeoient d'autres. Il falloit mesurer exactement les diamètres du Soleil & de la Lune: pour cet effet, je fis faire un héliomètre pour une lunette de 12 pieds, d'après le Mémoire

de M. Bouguer, imprimé parmi ceux de l'Académie, *année 1748*, & un micromètre pour une lunette de 6 pieds.

Ces instrumens faits par le sieur Canivet, & les verres par le sieur George l'aîné, étoient fort bons les uns & les autres.

## ARTICLE DEUXIÈME.

### *Départ de Brest, arrivée à Lisbonne.*

MUNIS de tout ce qui nous étoit nécessaire, nous partîmes de Brest le 20 de Septembre, & nous mouillâmes devant Lisbonne le 3 d'Octobre.

L'ancre n'étoit pas encore jetée, que M. de Chefac m'envoya chez M. le Comte de Baschi, Ambassadeur de France en cette Cour. Il étoit informé du sujet de notre voyage, & il en avoit déjà prévenu les Ministres de Sa Majesté Très-Fidèle, qui lui avoient paru disposés à favoriser notre projet : vraisemblablement notre passeport eût été expédié sur le champ, si le Roi n'eût pas été alors à Mafra, château bâti par le roi Jean V.

Sa Majesté en revint peu de jours après. Dans une audience particulière accordée aux Officiers de *la Comète*, il nous honora d'une gracieuse réception ; il parut s'intéresser au succès de notre voyage : il ajouta même qu'il vouloit qu'on lui rendît compte du résultat de l'observation de l'Éclipse du Soleil : enfin il accorda avec beaucoup de bonté à M. le Comte de Baschi la permission que lui demanda cet Ambassadeur pour que nous fissions des observations Astronomiques aux îles Açores & de Madère.

Le 13 Octobre, jour de cette audience, M. Sébastien-Joseph de Carvalho d'Iveira, depuis Comte d'Oeyras, & à présent Marquis de Pombal, alors Secrétaire d'État de la guerre & des affaires étrangères, nous expédia fort poliment la permission nécessaire pour aller à Aveiro.

Il ne s'agissoit plus que de faire les préparatifs nécessaires pour le départ. Ils furent bientôt prêts : nous avions besoin



d'un compagnon de voyage qui entendît bien la langue du pays ; M. le Comte de Baschi nous associa M. l'abbé Garnier : cet Abbé qui a été ensuite Aumônier de la chapelle de France, joignoit à l'intelligence du Portugais plusieurs autres connoissances qui pouvoient nous être utiles.

## ARTICLE TROISIÈME.

### *Départ de Lisbonne pour Aveiro.*

LES voitures les plus en usage en Portugal, sont des chaises à deux places, attelées de deux mulets, & assez douces, quoique sans ressorts. Le 13 Octobre nous fîmes partir deux de ces chaises, qui avoient ordre de nous attendre à *Vallada*, village à 12 lieues de Lisbonne, & nous nous embarquâmes le 14 au soir dans une chaloupe sur laquelle nous remontâmes le Tage à l'aide d'une marée.

Nous fumes alors par nous-mêmes qu'à quelques lieues au-dessus de Lisbonne, ce fleuve qui recevoit les plus grands vaisseaux cesse d'être navigable pour d'autres bâtimens que pour des canots, & même pour des bâtimens plats. Les eaux qui le grossissent sont celles de la mer, & c'est-là sans doute la raison pour laquelle le courant de ce fleuve, pendant le reflux, est très-foible ; bien différent en cela de plusieurs rivières moins considérables, mais que l'on ne peut remonter contre leur courant.

Nos mulets portoient nos instrumens & les provisions indispensables lorsqu'on voyage dans un pays où l'on ne trouve que le pain & le couvert. Il ne faut pas oublier de se munir de lits, d'ustensiles de cuisine & même de sel.

Le jour de l'Éclipse approchoit ; il étoit nécessaire que nous nous rendissions à Aveiro le plus tôt possible. Nous ne pouvions faire d'autre remarque que celle qu'offrit aux yeux des voyageurs la vue d'un pays plus ou moins cultivé.

A la seconde journée nous sortîmes de l'Estremadure pour entrer dans les montagnes de la province de Beira : ce changement est sensible. L'Estremadure, province de la Cour

& de la Capitale, est peuplée & cultivée, les chemins y sont très-beaux. Dans les montagnes de la province de Beira, les chemins sont difficiles, le terrain est de peu de rapport, & la pauvreté des villages indique celle des habitans.

On est deux jours à traverser ces montagnes que l'on quitte à quatre lieues de Coimbre ; la campagne des environs de cette ville est riante & dédommage l'œil de l'aridité fatigante de la province d'où l'on sort.

M. Patern Gordon, dans sa Géographie, place à huit lieues de Coimbre une fontaine célèbre, & qui engloutit tout ce qui touche la surface de ses eaux, comme on l'a souvent expérimenté. On remarque effectivement une belle fontaine dans le territoire d'Alcadebeque, village à deux lieues de Coimbre : elle déborde dans certains temps ; alors elle couvre une assez grande plaine qui est auprès. On prétend qu'elle communique avec une petite rivière voisine, & que l'on a trouvé dans celle-ci des bois jetés dans la fontaine peu de temps auparavant. Le temps ne nous a pas permis de vérifier cette communication.

## ARTICLE QUATRIÈME.

### *Arrivée & séjour à Aveiro.*

LE 19 Octobre, nous arrivâmes à Aveiro. M. Sébastien de Castro, de l'illustre Maison de ce nom, & fils du Gouverneur de la province de Beira, nous fit l'accueil que font à des Étrangers ceux qui, sans aucune jalousie de Nation, s'intéressent sincèrement aux travaux utiles. Le peuple ne pouvoit concevoir que des François n'eussent dans ce voyage d'autre projet que celui d'observer une Éclipse de Soleil ; mais les gens d'un certain ordre, quoiqu'en petit nombre à la vérité, admiroient la protection constante que le Roi accorde aux Sciences.

Grâces aux soins de M. de Castro, nous obtinmes des Dominicains la permission de faire notre établissement dans une *Quinte*, ou Maison de campagne, appelée *Miraflores*, qui

qui leur appartient à une portée de fusil de la ville, & qu'ils nous prêtèrent fort gracieusement.

Une salle carrée, & qui n'étoit bornée par aucune de ses faces, fut celle que je choisis. Au-dessous est une longue galerie ouverte au Nord, qui conduit à un péristyle couvert & à un assez grand appartement. M. le Chevalier de Goimpy & M. le Chevalier de Diziers se déterminèrent à établir leur observatoire dans ce dernier endroit. Par un hasard qu'on ne pouvoit prévoir, nous étions, conformément au texte du Mémoire de M. de l'Isle, *tout près & dans le Sud d'Aveiro.*

Mais malheureusement notre position n'étoit pas la plus exacte, & au lieu d'une Éclipse totale, nous n'eumes qu'une Éclipse partielle de Soleil; ainsi nous fumes privés de la vue de ces phénomènes curieux qu'on ne peut observer que dans une Éclipse totale.

Nous ne pouvons donc en retirer d'autres fruits que de déterminer la différence des Méridiens entre Paris & Aveiro, par l'observation de la même Éclipse faite à Thury, qu'on a eu la bonté de nous communiquer; cette différence est de  $0^h 43' 17''$ .

Nous dirons aussi que cette Éclipse a dû commencer à Aveiro à  $7^h 27' 3''$ , qu'elle y a fini à  $10^h 1' 4''$ , & que sa grandeur a été de 11 doigts  $33' 45''$ .

*Aveiro*, petite ville de la province de *Beira*, est fort agréablement située sur un petit ruisseau appelé *Vouga*, près du bord de la mer à l'extrémité d'une plaine étendue & bien cultivée; elle a un port peu profond, mais très-sûr; il se partage en une quantité considérable de canaux: ceux-ci forment des salines assez abondantes, & c'est ce qui constitue la principale richesse des habitans: ces salines sont séparées de la haute mer par une langue de sable élevée; la coupure de cette langue de sable est l'entrée du port; il y a une barre sur laquelle la mer brise, presque toujours avec violence: c'est-là qu'est l'embouchure du ruisseau d'Aveiro; on peut le remonter en bateau, jusqu'à cinq ou six lieues dans les terres.

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

Q

Cette partie de la côte du Royaume de Portugal, forme un golfe dangereux, depuis le cap *Mondego*, jusqu'à celui de la Roque. On l'évite avec d'autant plus de raison, qu'il ne présente d'autre port que celui de *Porto*, port de marée, & par conséquent d'une ressource peu assurée; les marins nomment ce golfe, le *Cimetière des Anglois*.

La ville d'Aveiro est peu commerçante & peu habitée, le luxe n'a point encore corrompu les mœurs de ses habitans, qui sont pauvres, simples & fort honnêtes pour les Étrangers. Il est assez commun d'y entendre parler françois; on y trouve quelques personnes, qui, sans en être jamais sorties, ont appris notre langue & la savent assez bien. Elles se sont procuré nos bons livres, & même les Mémoires de cette Académie. Il y en avoit un, *M. Juan d'Egués*, qui en avoit plusieurs volumes, qui les avoit étudiés; ce qui doit être regardé comme une chose merveilleuse, si l'on fait attention que la Philosophie d'Aristote n'étoit pas encore bannie du Portugal.

C'est dans une église de cette ville que sont enterrés François de Tavora & Jeanne sa femme, qui en 1592, en ont réédifié une chapelle; ce nom est encore plus connu depuis l'exécration attentat commis, il y a quelques années, sur la personne du Roi de Portugal.

## ARTICLE CINQUIÈME.

### *Départ d'Aveiro pour Lisbonne.*

LE 30 Octobre, nous quittâmes Aveiro, & nous choisîmes; pour retourner à Lisbonne, la route qui devoit nous offrir le plus de choses intéressantes à voir.

Les villes ne renferment point d'édifices plus magnifiques que les couvens, & ceux-ci, comme l'on sait, doivent presque tous leur fondation à des Princes, qui, pour obtenir quelque grâce du Ciel, faisoient vœu d'établir une maison où l'on glorifiât le Seigneur.

Coimbre, grande ville située sur le fleuve Munda, autrefois

le séjour des Rois de Portugal, & maintenant celui d'une Université, a un Monastère célèbre, c'est celui des Religieux de Sainte-Croix; il a été fondé par Alphonse Henriquez, premier Roi de Portugal, pour des Chanoines réguliers de Saint-Augustin, de la Congrégation de Sainte-Geneviève, & maintenant unis par le Pape Benoît XIV, aux Chanoines de Saint-Jean de Latran.

Avant cette union, ils avoient été réformés par le Père Gaspard de Govéa : ce Religieux, Ministre de Jean V, quoique sans en avoir le titre, & qui de sa retraite gouvernoit le royaume avec autant d'autorité que son couvent, forma & exécuta le hardi projet d'ôter à ses frères la liberté de fortir, & par-là il leur a rendu, aussi-bien qu'à sa Patrie, un service signalé.

Convaincus de la nécessité de bien employer leur temps, ils cultivent les Sciences avec succès; ils lisent les ouvrages de Newton. De la clôture perpétuelle des Chanoines de Sainte-Croix, il a résulté un changement très-avantageux pour les études, & qui s'est fait sentir dans le Portugal, où les Sciences ont essuyé la même révolution que dans le reste de l'Europe.

Leur solitude ne les prive pas de la société des Étrangers; ils exercent l'hospitalité avec beaucoup de noblesse, & ils nous parurent avoir pour les François un amour franc & sincère. Leur Général est par sa place, Chancelier de l'Université, & cette année il en étoit Recteur, par la nomination du Roi.

Denys, surnommé *le Libéral, & le père de la Patrie*, est le fondateur de cette Université, la première du Portugal, & une des plus célèbres de l'Europe.

Les nouveaux édifices ajoutés aux anciens sont magnifiques, M. Magalhaens, alors Chanoine de Sainte-Croix, & maintenant Correspondant de cette Académie, fut chargé de nous montrer les curiosités du Monastère & la Bibliothèque de l'Université; il s'en acquitta avec beaucoup de complaisance & de politesse. En 1744, il a obtenu du Pape Benoît XIV,

un Bref pour sortir de la Congrégation , & après avoir voyagé en différens endroits de l'Europe , il réside & cultive à Londres les Arts & les Sciences.

De Coimbre nous fumes à Baralha , où les Dominicains ont un superbe couvent , fondé par Jean I.<sup>er</sup> ; ce Monarque prêt à donner , contre le Roi de Castille , aussi nommé Jean I.<sup>er</sup> , la bataille d'Aljubarotta , fit vœu de fonder , pour l'Ordre de Saint-Dominique , le plus beau monastère qui fût alors dans le monde : il gagna la bataille le 14 Août 1385 ; & il choisit dans le voisinage un lieu dont il fit une ville , sous le nom de Batalha ; ce monastère est de la plus grande solidité ; tout est voûté ; la salle Capitulaire en est le morceau le plus curieux ; c'est un carré de 56 pieds 8 pouces sur chaque côté , surmonté d'une voûte à plein ceintre ( en arc de cloître ) qui se soutient sans le secours d'aucune colonne.

L'Architecte , appelé Mathieu Fernandés , eut de la peine à réussir ; plusieurs fois les pierres tombèrent , à la fin il en vint à bout , & pour faire voir qu'il ne craignoit plus un pareil accident , il coucha sous la clef de la voûte pendant quatre mois de suite.

Il s'est sculpté lui-même dans un coin de cette salle. Sa femme , ses filles & lui sont enterrés au bas de l'église , qui est , ainsi que son portail , d'Architecture gothique.

Elle passe pour être la plus haute du Portugal ; on se promène facilement sur son comble , qui est de pierre de taille , & bordé d'un parapet sur lequel on a élevé de petits dômes , qui font de loin un effet agréable.

Baralha devoit servir de sépulture aux Rois de Portugal , mais ces Rois en transférant leur siège de Coimbre à Lisbonne , ont substitué au Couvent de Baralha , celui de Belem , bâti pour des Jéronymites , par le Roi Emmanuel , le plus grand des Rois qui ont occupé le trône du Portugal.

Cette destination de Baralha n'ayant point changé tout d'un coup , on y voit les tombeaux de beaucoup de Princes , entr'autres celui du Roi Jean II , mort en 1495 , son corps est embaumé : on n'ouvre son mausolée que très-rarement ,

& toujours la nuit, pour éviter le mauvais effet de l'air chaud.

On l'ouvrit pour nous, & nous fumes les maîtres de toucher ce corps ; nous trouvâmes à la peau de la mollesse, de la flexibilité, & même une certaine fraîcheur.

Ce Prince étoit fort grand ; pour le placer dans son cercueil, on fut obligé de lui rompre les os des jambes.

De Baralha nous fumes dans un autre couvent, celui-ci appelé *Alcobaca*, fut fondé en 1135, par le Roi Alphonse Henriquez, après la célèbre journée d'Ourraque, dans laquelle il défit cinq Rois Maures. C'est à cet événement mémorable qu'il faut rapporter l'érection du Portugal en royaume. Jusques alors les Souverains n'avoient porté que le titre de Comtes.

Des Bernardins, au nombre de cent cinquante, occupent le couvent d'Alcobaca ; leur église est gothique, longue & étroite ; elle a été destinée pendant quelque temps à être la sépulture des Rois : on y en voit plusieurs tombeaux, tels que celui de Pierre le Justicier, & un simple cercueil de pierre sans sculpture, sans ornement & sans inscription ; on nous assura que c'étoit celui de la malheureuse Inès de Castro, qui avoit été femme & maîtresse de Pierre le Justicier. Cependant tous les Historiens François & Portugais, disent que Don Pedro fit faire à Inès un tombeau magnifique.

La route que nous faisions nous mena à *Caldas*, lieu qui tire son nom d'une source d'eau chaude, sur laquelle on a bâti un hôpital ; ces eaux sont très-renommées par la singulière propriété qu'elles ont de guérir les maladies vénériennes les plus invétérées, les paralysies, & généralement toutes les maladies qui attaquent les nerfs ; elles sont assez abondantes pour faire tourner perpétuellement un moulin situé à deux cents pas de la source ; elles sont fort claires, cependant si on les fait séjourner dans un réservoir, elles y déposent une boue noire & épaisse ; sorties de-là, elles laissent encore un autre sédiment, celui-ci est blanc & ressemble à de la chaux.

L'hôpital de Caldas fondé en 1488, par la Reine Dona Léonore de Portugal, femme de Jean II, & Sœur du Roi Emmanuel, a été rebâti en 1747, & achevé en 1750, par

les ordres & aux dépens du Roi Jean V; outre les salles séparées pour chaque sexe, il y a des chambres honnêtes destinées aux malades qui, allant prendre les eaux, ne trouvent pas de logement dans les auberges.

Ces eaux agissent de deux façons différentes, ou intérieurement lorsqu'on en boit, ou extérieurement lorsqu'on s'y baigne.

Il y a deux sortes de bains, l'un de l'eau claire & courante, l'autre de la boue noire dont j'ai parlé. On prend cette dernière dans le réservoir & on la porte dans une salle où on la délaie avec l'eau même de la source: on y fait entrer ceux qui sont attaqués depuis long-temps du mal dont ils veulent guérir; au sortir de la boue ils vont se laver dans l'autre bain. Il s'exhale de cette eau une vapeur chaude & sulfureuse qui porte d'abord violemment au nez; mais cela se passe promptement en se frottant le visage avec cette eau.

La vapeur noircit en peu d'instans les métaux & les galons.

De Caldas nous arrivâmes, après une journée de marche fort rude, au monastère royal de Mafra.

Les Religieux de Saint-François, de la province d'Arrabida, desiroient avoir un hospice à Mafra; le Conseil de Conscience leur en refusoit la permission depuis quelques années. Le Frère Antoine de Saint-Joseph sachant le desir que Jean V. avoit de se voir des enfans, en promit à ce Prince s'il fondeoit à Mafra le couvent que ses frères desiroient. Jean V en fit le vœu: d'abord ce ne fut qu'un hospice, mais insensiblement le Roi voulut élever un monument qui surpassât l'Escorial en grandeur & en magnificence. Trois cents Capucins sans barbe y sont logés aussi magnifiquement que le Monarque, qui partage ce Palais avec eux, & qui peut y loger la Reine, les Infans, les Princes & toute sa Cour.

La chapelle partage en deux ce vaste édifice, dont la première pierre fut posée le 18 Novembre 1717; la chapelle fut consacrée le 22 Octobre 1730: sa longueur entière est de deux cents quatre-vingt-douze pieds: elle est extrêmement



riche : le marbre y est prodigué ; cette pierre que le pays produit en abondance est parfaitement travaillée , les ouvriers du Portugal manient le ciseau avec une grande adresse.

Le quartz n'y est pas moins commun que le marbre ; il contient une quantité d'argent assez considérable.

La coupole a un air de légèreté , de délicatesse & de solidité qui surprend. La hauteur du dôme est de cent quatre-vingt-seize pieds , celle des clochers de deux cents seize ; un d'eux renferme un des plus beaux carillons de l'Europe. C'est dans cette chapelle que sont ces belles grilles de fer faites à Paris en 1733 , par le feu sieur Deltriches : les vases sacrés , tout ce qui sert au Service Divin , & les ornemens ne répondent point à la magnificence de la chapelle ; les uns sont de cuivre simplement tournés , & les derniers sont de soie , sans or ni argent. Si on monte au haut de l'édifice on se promène sur de vastes terrasses faites en briques , d'où l'on a une vue extrêmement étendue.

Le parc de Masra est très-grand , il renferme une longue chaîne de montagnes ; il a beaucoup de gibier , mais alors il étoit dénué d'arbres.

Pour arriver à Lisbonne il nous falloit passer par Ceintra , où les Rois de Portugal ont un palais bâti par le Roi Emmanuel , qui servit de prison à Don Alphonse V après sa déposition. Ceintra est au pied du cap de la Roque , appelé autrefois le *Promontoire de la Lune*.

Près de Ceintra est un couvent de Capucins , *doublé de liège* ; on le nomme ainsi , parce qu'il est tout taillé dans le roc , & que pour prévenir les mauvais effets de l'humidité , inséparable du rocher , tout l'intérieur est couvert de liège.

La simplicité de cette Maison , fait un contraste parfait avec la magnificence du palais de Masra ; des Religieux du même ordre habitent l'un & l'autre.

Une rampe aussi douce que le terrain a pu le permettre , conduit à un couvent de Jéronymites , placé sur la pointe la plus élevée du cap la Roque ; la vue en est très-étendue , mais elle seroit fort triste , sans les bois qui ornent les coteaux

voisins de Ceintra & de Colares; cette verdure, la seule du pays, en est d'autant plus délicieuse.

C'est au milieu de ces bois & à *Pinhra Verde*, que le fameux Don Juan de Castro avoit établi sa retraite au retour des Indes, où il avoit fait des exploits si merveilleux; ce Héros dégoûté du monde, se plaisoit à défricher sa demeure, & à pratiquer dans le rocher des terrasses, qui en font encore aujourd'hui l'ornement.

C'est cette montagne du cap la Roque, que l'auteur des *Mémoires pour les Voyageurs*, dit être composée de pierres sans liaison & toujours prêtes à se séparer; elles sont effectivement placées les unes sur les autres sans ordre ni symétrie, & telles qu'elles pourroient être, si un volcan les eût vomies de son sein.

De Ceintra à Lisbonne, on compte quatre à cinq lieues d'un beau chemin, le long duquel on rencontre beaucoup de *Quintes*; la plus belle, sans contredit, étoit celle de M. l'Abbé de Mendouça; ce Secrétaire d'État avoit su rassembler dans la sienne tout ce que l'art & le goût peuvent fournir. Un des morceaux des plus curieux étoit une grotte toute de cristal de roche & de porcelaine du Japon.

Si on veut se procurer une ample connoissance du royaume de Portugal, on n'a qu'à consulter le Dictionnaire Géographique & Topographique du P. Cardoso, dont il n'avoit encore paru que deux volumes *in-folio*.

L'auteur entre dans le plus grand détail & nous l'avons trouvé d'une exactitude singulière pour les endroits que nous avons examinés.

## ARTICLE SIXIÈME.

### *Départ de Lisbonne pour les îles Açores & de Madère.*

NOUS arrivâmes à Lisbonne le 7 de Novembre; le 13 nous eumes de Sa Majesté Très-Fidèle une audience semblable à la première; nous lui rendîmes compte du voyage que nous venions de faire,

M. le

M. le Comte de Baschi renouvela ses sollicitations pour l'expédition du passeport dont nous avions besoin pour être reçus dans les îles Açores & de Madère. M. l'abbé de Mendoça, Secrétaire d'État de la Marine & des pays d'Outremer, s'y prêta avec ses grâces ordinaires. Il fit choisir le meilleur Pratique de ces îles, lui ordonna de s'embarquer sur notre frégate : le passeport fut signé le 18 Novembre, mais le vent ne nous permit de mettre à la voile que le 26 du même mois.

La traversée fut assez belle, & le 4 Décembre nous vîmes les îles de Sainte-Marie & de Saint-Michel. Notre Pilote Portugais, plus habitué que nous à ces sortes de voyages, s'estimoit beaucoup plus près de terre que nous; cependant on la vit encore plus tôt qu'il ne comptoit.

Cette erreur de navigation, qui vraisemblablement doit être rapportée à la mauvaise situation de ces îles sur les Cartes, prouve la nécessité de faire à l'une d'elles, une bonne observation de Longitude.

Entre Sainte-Marie & Saint-Michel, est un banc de roches appelé les *fournies*; les Cartes sont en erreur par rapport à ce danger; elles le placent trop près de Saint-Michel: il est véritablement à quatre lieues dans le Nord-est de la pointe du même nom de Sainte-Marie. Il rétrécit considérablement le canal entre ces deux îles, qui sans cela auroient dix-huit lieues de louvoyage ou de largeur.

Le vent cessa bientôt de nous favoriser, il se rangea dans la partie du Sud & du Sud-ouest, il rendit la mer grosse: quelqu'envie que M. de Chefac eut de me mettre à terre, pour y faire les opérations dont j'étois chargé, il fallut attendre au 6 Décembre; ce jour-là, quoique le vent fût constant, la mer étoit moins grosse qu'à l'ordinaire, & on put y mettre un canot: je m'y embarquai. Je faisois route pour la ville, lorsque je rencontrai une chaloupe de l'île qui étoit sortie aux signaux\* que l'on fait ordinairement

---

\* Ces signaux consistent à tirer des coups de canon, à mettre la flamme  
*Mém. 1772, II.<sup>e</sup> Partie,*

pour faire venir un bâtiment de la côte sur laquelle on est. Je me mis dans ce bateau, & mes guides, sûrs de leurs marques, gagnèrent avec précaution un canal étroit & court que la Nature a pratiqué entre plusieurs rochers : ce canal conduit à un petit bassin fait avec art, où l'on trouve un débarquement très-sûr & très-commode. Quelque agitée que soit la mer au large, on ne sent jamais sa violence dans ce petit bassin ; il peut contenir une centaine de bateaux pêcheurs.

La ville où je débarquai, s'appelle *Punta Delgada* ; dès que j'y eus mis pied à terre, je fus conduit chez le Commandant, c'étoit un vieillard vénérable ; je lui montrai mon passeport ; pénétré du plus profond respect, à la vue des ordres de Sa Majesté Très-Fidèle, il m'assura que je serois le maître de m'établir, où, & quand je le jugerois à propos.

Après quoi, je retournai promptement à bord de la Frégate, qui étoit restée sous voile. Le mouillage est fort près de la ville ; on n'y laisse donc jamais tomber l'ancre, que lorsque le vent vient de terre, & ceux qui y sont mouillés doivent toujours être prêts à appareiller si le vent souffle du large, parce qu'alors la mer est extrêmement grosse.

Cette raison rend la navigation de ces îles fort dangereuse l'hiver, & comme dans cette saison les vents abandonnent rarement la partie du Sud & celle de l'Ouest, le commerce y est interrompu pendant les mois de Décembre, Janvier & Février, & alors on tire presque toujours les bateaux de pêche à terre.

Nonobstant cela, je me flattois de pouvoir le lendemain retourner à la ville avec les instrumens dont j'avois besoin, mais cette attente fut vaine ; dans la nuit même le vent força considérablement, la mer devint agitée, & huit jours consécutifs d'un aussi mauvais temps, firent perdre l'espérance

---

& le pavillon de la Nation dont on est ; mais ce dernier est plissé dans le sens de sa largeur & guindé dans cet état au haut du bâton de pavillon : cela s'appelle mettre son pavillon *en berne*.

du débarquement. La lame déjà forte, le jour que j'avois été à terre, devoit l'être bien autrement, & il falloit une semaine de tranquillité pour rendre la côte accessible; il n'étoit pas naturel de se flatter que le temps deviendrait bientôt favorable à l'exécution de notre projet. M. de Chefac se trouva donc forcé d'y renoncer & de faire route pour l'île de Madère, où ses ordres l'appeloient.

Pour ne pas perdre son temps dans la croisière involontaire autour de l'île de Saint-Michel, il chercha à tirer de son Pratique Portugais des connoissances sur sa position; l'éclaircissement le plus important qu'il en ait eu, concerne la vigie la *Baleine*. Ce pilote allant un jour de l'île de la *Tercère* à celle de Saint-Michel, la vit après avoir pris hauteur, ce qui l'a déterminé à la placer par 39<sup>d</sup> 15' de latitude, & dans le Nord-quart-nord-est de la ville de *Ribeyra grande*.

Cette position est différente de celle que lui donne la Carte du Dépôt de l'année 1742; on y voit cette roche par 38<sup>d</sup> 40' de latitude, & dans le Nord-nord-est de la pointe du Nord-est de l'île de Saint-Michel.

Je passe sous silence d'autres remarques moins essentielles, dont la plupart même ne regardent que les autres îles des Açores. Un voyage fait exprès dans cet Archipel nous donneroit des instructions beaucoup plus exactes, & l'on parviendrait peut-être à s'assurer de l'existence & de la direction des courans; s'il y en a autour de ces îles, nous n'en avons aperçu aucunes traces, ainsi nous n'en parlerons point.

A mesure que nous nous éloignions des Açores pour courir dans le Sud, nous éprouvions un changement sensible; le vent d'aval jusqu'alors obstiné & violent, devenoit moins fort & plus variable; la mer étoit plus douce, le ciel plus serein, le froid diminuoit; nous n'étions pas dans les vents alisés, mais nous goûtions l'agréable température inséparable de leur voisinage.

Des circonstances aussi favorables, contribuent sans doute à la beauté du climat; tel est celui de Madère. Nous découvrîmes cette île fortunée le 21 Décembre, après avoir

vu celle de *Porto-Santo*, qui en est peu éloignée. Cette dernière Isle nous restoit au Nord-ouest-quart-ouest de la boussole, à dix ou douze lieues, & alors elle offroit à la vue quatre *mornes* ou pointes détachées, qui paroissoient être autant d'îles.

Lorsqu'on vient à Madère par la partie de l'Est, on voit outre *Porto-Santo*, trois îles appelées *Désertes*, elles sont presque Nord & Sud; celle du Nord est fort basse, & souvent on la confond avec l'île de Madère; celle du milieu & celle du Sud, sont fort élevées; celle-ci est coupée en forme de dents de scie, elle paroît faire deux Isles, à moins qu'on n'en soit fort proche, & cette fausse apparence peut causer l'erreur de prendre pour la Déserte la plus septentrionale, celle qui effectivement est au milieu des trois.

L'inconstance du vent ne nous permit pas de gagner la rade de Funchal, plus tôt que le Dimanche 23; notre Pratique de Lisbonne n'avoit jamais mouillé sous Madère, un Pilote de l'île nous indiqua le meilleur mouillage, & le même jour nous jetames l'ancre dans le lieu le plus sûr. On y est fort près de terre; le milieu de la plus Nord des Désertes, restoit à l'Est-sud-est 2 degrés Est, & la plus Sud au Sud-est 4 degrés Est de la boussole.

## ARTICLE SEPTIÈME.

### *Séjour à Madère.*

LE 24, je fus à Funchal joindre M.<sup>rs</sup> les Chevaliers de Goimpy & de Diziers, qui, après avoir montré les ordres dont ils étoient porteurs, avoient eu dès la veille, de M. le Comte de Saint-Michel, Gouverneur de l'île, la permission de s'établir à terre, & avoient choisi une maison propre à nos opérations.

L'île de Madère a de longueur dix-sept à dix-huit lieues; & de largeur sept à huit; elle a été découverte en 1420, par Martin Vas & Jean Consalve; elle appartient aux Portugais; elle a tant de montagnes, & celles-ci sont si hautes, que l'on

peut dire que l'île elle-même n'est qu'une montagne coupée par beaucoup de précipices: elle court de l'Est à l'Ouest; du côté du midi, elle s'abaisse en une pente d'abord assez roide, qui s'adoucit insensiblement & mène à une plage au bord de la mer. C'est au bas de cette pente, qu'est bâtie la ville de Funchal, capitale de l'île; elle est dans une espèce de plaine, longue & étroite, ce qui la rend un boyau, uni dans le sens de sa longueur, mais qui va en montant dans celui de sa largeur.

Deux ruisseaux la traversent, & y fournissent toute l'année une eau excellente; dans les grandes pluies, ces ruisseaux deviennent des torrens; alors ils ne suffisent pas pour l'écoulement des eaux qui tombent des montagnes. On y a remédié en pratiquant dans les rues, des canaux qui reçoivent & portent à la mer les fontes de neiges, qui souvent y sont abondantes.

La ville de Funchal est ceinte d'une simple muraille; à chaque extrémité de la plage, est un fort garni de canons; dans la partie occidentale, est une citadelle élevée: c'est aux Espagnols que l'on doit ces fortifications\*.

La rade est toute ouverte, mais la tenue y est bonne; c'est un fond de sable vaseux; notre grosse ancre étoit par quarante brasses & celle d'affourche par vingt-sept; cette différence considérable de fond annonce un banc, il est fait en dos d'âne, & va en augmentant du côté de la terre, comme du côté du large.

Pour être bien mouillé il faut que la citadelle de la ville & l'ilot du Lion restent l'un & l'autre au même aire de vent, & il faut aussi que la pointe occidentale de la baie reste au même aire de vent qu'un rocher qui paroît, dans cette partie, être détaché de la terre ferme.

Dans ce mouillage on peut essuyer sans risque les plus violentes raffales qui viendront de terre depuis l'Est jusqu'au

---

\* Le plan que j'ai vu au dépôt de la Marine de Funchal, m'a paru excellent.

Nord-ouest, en passant par le Nord. Si le vent souffle du large, sa violence est rompue par les hautes terres de l'île; mais comme il change en côte, la mer qui y roule perpétuellement devient horrible, il faut appareiller promptement plutôt que de risquer une mort affreuse. On a pourtant vu quelquefois que des navires prévenus par le vent, ou arrêtés par quelqu'autre cause, n'ont pas mis sous voile, & qu'ils n'ont essuyé aucun accident. On prétend même que s'il s'en est jamais perdu quelqu'un, ce malheur n'est arrivé qu'à ceux qui avoient de mauvais cables ou de mauvaises ancrés.

A la pointe orientale de l'île sont les trois Désertes, qui ont chacune un nom particulier: la première, ou la plus septentrionale, s'appelle la *Rasé*; elle est fort basse & couverte de bois: la seconde se nomme la *Déserte*, & la troisième *Bougie*.

Il y a un bon passage entre la *Rasé* & *Madère*, mais il faut le connoître; car sa largeur apparente est rétrécie de près de moitié par une chaîne de rochers qui part de l'île de *Madère*. On ne peut point passer entre *Bougie* & la *Déserte*.

Ces îles rendent le mouillage de *Madère* moins sûr; car d'un coup de vent de Sud-ouest subit & forcé, on ne pourroit guère s'élever, & dans ce cas il faudroit donner dans le canal, entre la *Rasé* & *Madère*.

L'îlot du *Lion*, dont j'ai parlé, est séparé de la ville de *Funchal* par un bassin profond de dix brasses; dans sa partie occidentale est une chaîne de rochers qui va de l'îlot à la grande île. On pourroit asseoir une muraille sur cette chaîne: ce bassin se trouveroit fermé, & on y seroit à l'abri de tout vent. Tel qu'il est, les navires qui y mouillent s'y trouvent très-bien, & un gros vaisseau de guerre Portugais y a, dit-on, passé un hiver.

Cette île est fort peuplée: elle a au moins sept mille habitans: elle ne pourroit pas leur fournir du blé pour plus de trois mois; son vin y supplée; on y en fait une si grande quantité que cette denrée seule leur procure tous leurs besoins. Les Anglois obligés d'aller prendre ailleurs le vin qu'ils ne



trouvent pas chez eux, font presque seuls le commerce de Madère; ils y apportent du blé & les ouvrages de leurs manufactures, ils y achètent aussi des citrons. La rade est toujours garnie de leurs vaisseaux, & tous les ans un navire au moins de leur Compagnie des Indes Orientales y vient charger du vin pour ses comptoirs, en échange du blé qu'il y laisse.

L'île de Madère reçoit aussi des provisions de celle de Saint-Michel; cette dernière île est très-fertile en blé: sa partie du Nord-ouest porte le nom de *Bretagne* à cause de sa grande fertilité; elle n'abonde pas moins en bestiaux, qui se portent aussi à Madère.

Notre Observatoire étoit à peu-près au milieu du croissant que forme le rivage de la mer; nos opérations commencèrent le jour de notre établissement. Nous avons pu déterminer la hauteur du pôle à  $32^{\text{d}} 37' 40''$ , par beaucoup de hauteurs méridiennes du Soleil & d'Étoiles, prises exactement.

La variation de l'aiguille aimantée, que notre position & le défaut de méridienne nous a empêché de connoître à terre, a été souvent observée à bord de la *Comète*: elle s'est trouvée toujours entre  $10^{\text{d}} 35'$  &  $11^{\text{d}} 55'$ , ce qui donne pour résultat moyen  $11^{\text{d}} \frac{3}{4}$ .

Les observations de longitude paroissent faites avec précision: celles dont nous déduisons la longitude de notre Observatoire, sont deux immersions du premier satellite de Jupiter, une du troisième, & une occultation d'une étoile voisine de  $\delta$  du Taureau, derrière le disque de la Lune.

Leur résultat moyen place Funchal à  $1^{\text{h}} 16' 40''$  à l'occident du Méridien de Paris.

Ces observations décisives, sont bien suffisantes pour constater la position de l'île de Madère: cependant nous voulions employer pour cette détermination d'autres observations de la Lune.

Il est certain qu'elles sont d'un merveilleux secours pour la détermination des longitudes; on ne sauroit trop recommander cette nouvelle méthode; mais comme quelques-unes de ces Observations, & particulièrement les distances de la

Lune aux Étoiles, engagent dans des calculs fort longs, il nous paroît nécessaire de distinguer les cas auxquels on peut les employer avantageusement, de ceux auxquels elles deviennent presque inutiles.

Cette raison nous oblige de recourir au principe sur lequel elles sont fondées, & d'en tirer des conséquences qui puissent guider ceux qui voudront tenter ces sortes d'observations.

Les Astronomes voulant multiplier les moyens de parvenir à la connoissance des longitudes, ont cru trouver ce qu'ils cherchoient dans la rapidité du mouvement de la Lune; effectivement cet astre parcourt environ 13 degrés sur son orbite par jour, d'où il suit que 2 minutes de degrés dans son lieu apparent, doivent produire un degré en longitude ou 4 minutes de temps.

Ils ont donc proposé de déterminer, par observation pour un instant donné, le lieu de la Lune dans le ciel, sous un méridien inconnu, & de comparer ce moment avec celui auquel, sous un méridien connu, la Lune aura occupé le même lieu dans le ciel; la différence des instans donnera celle des méridiens: ce principe fort simple fournit trois moyens de connoître le lieu de la Lune par observation.

Le premier est celui de l'heure observée du passage de cet astre au méridien; le second la hauteur de cette planète, lorsqu'elle est à une distance assez considérable du méridien; le troisième est sa distance au Soleil ou à quelques Étoiles fixes dont la position soit parfaitement connue.

L'heure du passage de la Lune au méridien se détermine ou directement, quand un instrument est bien placé dans le méridien, ou indirectement par des hauteurs correspondantes de cet astre, prises avant & après sa médiation, ou par son passage à un vertical quelconque: sa distance au Soleil ou aux Étoiles fixes se mesure avec des instrumens propres à prendre des angles. Il en est de même de sa hauteur.

Le choix de ces trois moyens n'est pas indifférent, & chacun exige dans la pratique des précautions qui lui sont particulières.

Le passage direct de la Lune au méridien n'entraîne après lui aucun calcul, mais il est impossible à la mer, & fort difficile à terre, à moins qu'on ne soit muni d'un quart-de-cercle mural, exactement situé dans le méridien.

Son passage à un vertical quelconque, a d'autant plus d'exactitude, qu'au moment de l'observation, la Lune est plus proche du méridien; & ceci, très-facile à terre, sera d'une exécution presque impossible à la mer.

Tout le monde sait quels sont les momens les plus favorables pour les hauteurs correspondantes. Dans un observatoire fixe, ce sera pour la Lune la même règle que pour le Soleil, c'est-à-dire, qu'il faut que l'astre soit assez éloigné du méridien, pour que son mouvement en hauteur soit fort sensible. Mais dans un vaisseau, il y a encore une autre attention à faire; on commettra moins d'erreurs dans les observations, si la Lune est entre 5 degrés & 15 degrés de hauteur; la raison est que l'intervalle, compris entre l'horizon & la partie de la mer éclairée par les rayons directs de la Lune, est communément fort obscur, que par conséquent l'horizon lui-même est fort difficile à distinguer; d'où il suit que plus la Lune est haute, plus cet intervalle est grand, moins l'horizon est terminé, & plus on a de peine à prendre la hauteur de la Lune.

Lorsque cet astre est élevé de moins de 5 degrés au-dessus de l'horizon, sa hauteur vraie est trop altérée par la réfraction; Les termes de 5 degrés & 15 degrés sont donc les plus favorables pour cette observation. Cette dernière remarque a également lieu, si on veut déterminer la longitude par une seule hauteur quelconque, à moins qu'on ne choisisse le jour ou le crépuscule.

Quant aux distances de la Lune au Soleil ou aux Étoiles fixes, comme dans cette opération, l'on cherche à mesurer directement une portion de l'orbite de la Lune, en partant d'un point déterminé, il est évident qu'après le Soleil les Étoiles zodiacales sont celles auxquelles il faut principalement s'attacher. Nous disons, après le Soleil; cet Astre mérite la

préférence : 1.<sup>o</sup> la clarté qu'il répand rend le succès plus certain : 2.<sup>o</sup> il est toujours dans l'Écliptique. Mais le choix même des Étoiles zodiacales demande quelques réflexions ; celles qui sont dans la perpendiculaire à la ligne des Cornes, ou, ce qui est à peu-près la même chose, dans l'orbite de la Lune, sont sans contredit les plus propres de toutes à cette voie de trouver la différence des Méridiens.

De tout ceci, nous concluons, 1.<sup>o</sup> que pour les hauteurs de la Lune, les temps les plus opportuns sont ceux auxquels le mouvement apparent de la Lune est le plus rapide ; 2.<sup>o</sup> que pour les distances aux Étoiles, il convient d'en mesurer à celles qui sont situées dans la perpendiculaire à la ligne des Cornes, soit à l'Est, soit à l'Ouest ; que plus l'étoile sera éloignée de cette perpendiculaire, moins l'observation sera favorable, & que l'on ne pourroit en rien conclure pour la longitude, si la planète & l'étoile se trouvoient dans cet instant dans le même cercle de latitude, parce qu'alors la distance des deux astres ne change pas sensiblement dans un certain espace de temps. Quoique les distances de la Lune aux autres Étoiles que les zodiacales, prises dans des circonstances différentes de celles que nous venons d'indiquer, ne soient pas aussi favorables pour la déduction des longitudes, ce n'est pas une raison pour exclure ces sortes d'observations ; elles ont leur utilité, & l'on y peut avoir recours lorsque les autres ne sont pas praticables.

Il est vrai que dans ce cas il faudra mesurer de suite au moins deux de ses distances, puisque par une seule on ne pourroit pas déterminer le lieu de la Lune dans le ciel ; mais si l'on choisit une étoile qui soit dans la perpendiculaire à la ligne des cornes, une seule distance de la Lune à cette étoile, mesurée avec précision, sera suffisante ; & par ce moyen on évitera la répétition des erreurs qui peuvent se commettre à chaque opération, & que le hasard accumule quelquefois dans le même sens. Si cependant on avoit pris plusieurs de ces distances, voici une règle générale pour juger de leur exactitude.

Le temps, exprimé en minutes d'heures, que la Lune met à s'approcher ou à s'éloigner d'une Étoile, doit être à peu-près égal au double de la distance parcourue, exprimée en minutes de degré; c'est-à-dire, que s'il s'est écoulé 10 minutes de temps entre la mesure de deux distances, la Lune doit s'être approchée ou éloignée de l'étoile de 5 minutes de degrés.

Nous nous dispenserons de donner le procédé des calculs que l'on emploie pour réduire ces sortes d'observations: ils sont expliqués dans presque tous les livres d'Astronomie, & ce seroit grossir inutilement cet Ouvrage que de répéter ce qui se trouve ailleurs.

M. Pingré, dans son *État du Ciel* de 1755, a donné la résolution de plusieurs problèmes de cette espèce. Nous ne parlerons point non plus de la pratique de ces observations à la mer. M. l'Abbé de la Caille a discuté cet article d'une façon élégante & nouvelle dans le Discours qui est à la tête du cinquième volume des *Éphémérides*; nous y renvoyons.

M. de Goimpy nous proposa de placer notre instrument dans un vertical quelconque, de n'y plus toucher, & d'observer l'heure du passage de la Lune & de quelques Étoiles voisines, par le même fil. Nous choisîmes le 4 de Janvier: ce jour, la Lune étoit à la même hauteur que les Hyades, qui la suivoient de près au Méridien, & notre instrument n'étoit pas fort éloigné du plan du Méridien. Nous pûmes, à nous trois, marquer l'attouchement de la Lune au vertical, & ceux de presque toutes les Étoiles de la constellation que j'ai nommée. Nous ne ferons pourtant point usage de cette observation, ni de quelques autres: nous attendrons pour cela qu'il ait paru une Carte exacte des Hyades, où chaque Étoile sera placée convenablement.

Pendant notre séjour à terre, depuis le 24 Décembre 1753; jusqu'au 10 Janvier de l'année suivante, le temps fut fort incertain, & la beauté du climat souvent altérée.

Le 1.<sup>er</sup> Janvier, un vent de Nord-est très-violent, accompagné de beaucoup de grêle & de neige, nous fit juger que

dans les pays septentrionaux de l'Europe, le froid devoit être fort considérable. Ce mauvais temps ne dura que deux jours ; le 3 Janvier, le froid s'adoucit, & quelques jours après il faisoit fort chaud ; la neige des montagnes ne fondoît pourtant point, & il y en avoit encore quand nous avons quitté l'île.

Au reste, ce changement soudain est extrêmement rare dans ce climat ; il est ordinairement fort tempéré, & s'il y a eu une variation considérable cette année, il faut l'attribuer au froid excessif qui s'est fait sentir dans presque toute l'Europe, & à ce vent de Nord-est, qui, devenu général, s'est étendu jusqu'en Amérique, & en a rafraîchi les climats les plus chauds.

Voici des remarques générales que nous avons eu occasion de faire sur les vents à Madère, & qui nous ont été confirmées par les habitans de cette île.

Quand le vent est décidé à souffler du Nord-est, telle est à peu-près la route qu'il suit dans la rade que l'on fait être placée dans le Sud de l'île.

Le Soleil en se levant y fait sentir la brise de l'Est ; à midi on a celle de l'Ouest, & le soir calme ou un vent de terre ; il n'est pas rare d'y voir en même temps les deux brises opposées ; mais à terre le vent est constamment au Nord-est ; il en amène des nuages ; ceux-ci ne pouvant passer au-dessus des montagnes de l'île, s'y arrêtent : ces montagnes sont donc toujours couvertes. Les Désertes, qui ne sont guère moins élevées que Madère, présentent la même apparence ; & ces terres *embrumées*, sont signe de beau temps.

Si ces nuages se dissipent, & si les terres sont nettes, on peut s'attendre au vent de Sud ; celui-ci, cependant, ne peut se faire sentir plus de trois ou quatre jours ; le vent alisé est, au plus, à quatre degrés de cette île ; il souffle dans la direction opposée ; l'aliment du vent de Sud lui manque donc bientôt ; le calme lui succède, & le vent de Nord-est reprend ses forces, jusqu'à ce que quelqu'orage ou une autre cause dans la lisière du vent alisé, fasse reparoître le vent du Sud.

Nous avions choisi, pour vérifier notre sextant par le renversement, un point éloigné de quatre lieues sur ces Désertes, si souvent couvertes de vapeurs; cette circonstance rendoit plus rares les momens de notre opération; nous y avons pourtant réussi, & l'erreur de la lunette perpendiculaire, qui, en 1751, étoit en plus, a diminué successivement, & elle étoit alors en moins de 0' 50".

Le même endroit étoit trop remarquable pour ne pas savoir, par son moyen, si le cheveu tomboit sur 0<sup>d</sup> 0' 0", quand la lunette centrale & l'alidade étoient pointées sur le même objet, & nous vîmes que quand les lunettes étoient parallèles, & leur centre dirigé au même point, le cheveu tomboit sur 0<sup>d</sup> 19' 0".

Par des expériences réitérées, nous nous étions assurés qu'il y avoit cinq secondes & demie d'intervalle entre l'instant auquel on voyoit le feu d'un coup de canon tiré à bord de la Comète, & celui auquel on entendoit le bruit; c'est-à-dire, que cette frégate étoit à 951  $\frac{1}{2}$  toises de distance de notre observatoire, ou un tiers de lieue.

## ARTICLE HUITIÈME.

*Départ de Madère; arrivée à Lisbonne; départ de cette ville; retour à Brest.*

Nous n'avions plus d'observations à faire dans cette île; nous retournâmes tous à bord le 11 Janvier, & M. de Chesac mit à la voile le lendemain. Le vent variable du Sud au Sud-sud-est le détermina à faire le tour de l'île par sa partie occidentale; cette manœuvre, & celle de ranger la côte de fort près, nous en fit relever les différentes pointes l'une par l'autre; nous eûmes aussi occasion de remarquer que cette île est par-tout extrêmement élevée, mais qu'elle paroît l'être encore davantage dans sa partie septentrionale: on n'y aperçoit aucune habitation, elle n'a point de mouillage; bien différente, en cela, de la bande du Sud, qui offre

beaucoup de maisons de campagne, plusieurs villes, & quantité d'endroits propres à jeter l'ancre.

Les points les plus remarquables que nous voyions sont celles de l'Ouest de la baie de Funchal, & celle de Sol; elles sont Ouest, Nord-ouest & Est-sud-est du monde: celle-ci & celle du Jardin Nord-ouest-quart-d'ouest & Sud-est-quart-d'est: celle du Jardin & celle de Marazillo sont Nord-ouest-quart-nord & Sud-est-quart-sud: cette dernière & celle de Pargo, Nord-nord-ouest & Sud-sud-est.

La pointe de Pargo est la plus occidentale de l'île; entre elle & celle de Marazillo est un ancrage qui porte ce dernier nom.

Au-delà, l'île s'arrondit & tourne vers le Nord-est, la première pointe que l'on aperçoit est celle de *Tristan*; dans l'Est-nord-est, & à un quart de lieue d'elle est un petit îlot, puis enfin nous relevâmes une pointe, qui par celle de *Tristan* ressoit à l'Est-quart-sud-est 3 degrés Sud.

Les ordres de M. de Chefac lui enjoignoient de se rendre de nouveau à Lisbonne: notre route fut donc dirigée pour le Portugal: le 13 Janvier au soir, nous perdîmes de vue l'île de Madère, & le 16 au coucher du Soleil nous aperçûmes le cap la Roque dans l'Est-quart-sud-est du monde, à dix lieues environ.

Le Tage coule sous un climat dans lequel le vent est variable: cependant celui d'Est ou de Nord y souffle plus fréquemment qu'aucun autre: le Soleil n'y est presque jamais obscurci par les nuages, & les nuits y sont fort belles. Le seul cap la Roque, qui est très-élevé, rassemble sur sa tête les brouillards & les vapeurs que le vent du Nord-est chasse devant lui, & il s'y forme une enveloppe épaisse que les marins nomment *le chapeau du cap la Roque*. Quoique ce chapeau empêche souvent de bien distinguer ce cap, il n'indique pas moins sûrement le lieu où il est: si ce chapeau disparoit, c'est un indice de vent d'Ouest; celui d'Est tempère la grande chaleur que produiroit le Soleil sur une terre découverte, & toujours échauffée des rayons de cet astre.



Il souffle quelquefois avec une si grande force qu'il rend l'entrée du Tage fort difficile. Le courant de cette rivière repoussé par le flot, a produit à son embouchure deux bancs appelés *cachopes*; ces deux bancs & la rive du Nord font deux passes; la petite est la septentrionale, la grande est celle du sud: il y a louvoyage dans celle-ci seulement: obligés d'y donner, nous vîmes qu'il pouvoit y avoir entre les cachopes qui la forment, deux tiers de lieue de distance, & que pour les doubler contre le vent il falloit un fort long temps; nous y parvinmes cependant, & le 20 nous étions mouillés à Lisbonne sous le Palais des Rois.

M. le Comte de Baschi me permit de placer sur la terrasse de son hôtel, un observatoire portatif\* que j'avois embarqué; mais cette terrasse, faite de planches très-minces & placée sur quatre traverses, étoit si mobile qu'elle communiquoit à mon observatoire un ébranlement considérable. Le vent, toujours constant du Nord-est, arrêtoit ma pendule, presque à chaque moment; ainsi je n'ai pu profiter du séjour que nos ordres m'obligeoient de faire dans cette Capitale.

Le froid extrême du reste de l'Europe s'y faisoit sentir; il geloit presque toutes les nuits dans cette ville, où l'on ne se souvenoit pas d'avoir vu de gelée.

Lisbonne, située sur sept montagnes, comme la ville de Rome, présente un spectacle fort agréable à ceux qui la voient des vaisseaux mouillés dans le Tage.

Les curiosités qu'elle renferme, & que j'ai presque toutes vues, mériteroient qu'on en fit une description exacte, & qui pût remplacer un Ouvrage assez infidèle, qui a pour titre, *Description de Lisbonne*. Beaucoup d'édifices ont été renversés l'année d'après par le tremblement de terre; beaucoup aussi y ont résisté. Un des plus beaux monumens est sans contredit son aqueduc; il est remarquable par sa longueur, puisqu'il amène les eaux de plus de deux lieues, mais plus encore par sa largeur, & par la hauteur prodigieuse de quelques

---

\* Voyez sa description dans le volume de l'Académie de 1770, p. 612.

arches que la situation du terrain a obligé de faire; assez près de la ville, est un fossé profond creusé par les eaux, qui quelquefois y passent comme un torrent: on a voulu faire passer l'aqueduc par cet endroit; on y a construit plusieurs arches, dont la principale a, depuis la corniche jusqu'en bas, cent quatre ou cent six pieds; cette arche ainsi que les six plus voisines, a une voûte à tiers-point.

Lisbonne a beaucoup d'Églises, de Palais & quelques Places; la plus belle s'appelle la *Place du Palais*; c'est dans cette place que se fait le Couronnement du Monarque à son avènement au Trône.

L'objet de notre voyage rempli, nous appareillames de Lisbonne le 12 Février, & le 21 du même mois, nous étions dans la rade de Brest.

M. de Chesac, persuadé de l'importance qu'il y auroit à connoître l'extrémité du banc qui donne la sonde près des côtes de Bretagne, faisoit jeter le plomb de fort bonne heure. La première sonde fut de quatre-vingt-quinze brasses; fond de sable gris, très-fin & vaseux. Par les routes réduites depuis ce fond, jusqu'à la vue de l'île d'Ouessant, on a été certain qu'elle se trouvoit à cinquante lieues & demie, dans l'Ouest-quart-sud-ouest 5 degrés Ouest de cette Isle.



*SUITE*

S U I T E D U  
VOYAGE FAIT PAR ORDRE DU ROI,  
EN 1753,  
à la côte de Portugal & à l'île de Madère.

S E C O N D E P A R T I E.

S E C T I O N S E C O N D E ,

*Qui comprend l'Observation de l'Éclipse de Soleil, faite  
à Aveiro, & les Observations de Latitude & de  
Longitude à l'île de Madère.*

Par M. D E B O R Y.

A R T I C L E P R E M I E R.

*OBSERVATIONS pour la Latitude d'Aveiro.*

**I**L étoit indispensable de connoître la hauteur du Pôle du lieu où nous avons été envoyés, & cette opération devoit être accompagnée de celle de la vérification de notre instrument.

Pour n'avoir aucun reproche à nous faire sur la connoissance de l'erreur de la lunette perpendiculaire, la seule que nous ayons employée, nous avons eu recours à la méthode du renversement & à celle des hauteurs méridiennes d'Étoiles, prises dans une même nuit, les unes dans le Nord, & les autres dans le Sud.

1.<sup>o</sup> *Vérification par le renversement.*

Le 28 Octobre, le temps se trouvant favorable, dans l'après-midi nous pointames notre lunette sur une élévation  
*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

T

très-remarquable, située au milieu des montagnes de l'Est, & éloignée de quatre lieues au moins.

Nous trouvâmes que l'instrument étant droit :

Le fil-à-plomb battoit sur.....	88 <sup>d</sup> 47' 40"
L'instrument renversé, le cheveu battant sur le centre.	91. 10. 55
Somme.....	179. 58. 35
Moitié.....	89. 59. 17½
Distance à 90 <sup>d</sup> .....	0. 0. 42½

Telle est l'erreur dont l'instrument haussait.

2.<sup>o</sup> *Recherche de l'erreur de la même lunette par des hauteurs méridiennes d'Étoiles, prises dans le Nord & dans le Sud, dans la nuit du 28 au 29.*

Les hauteurs méridiennes de la Polaire, dont il est question ici & dans la suite, sont les hauteurs de cette Étoile, lorsqu'elle étoit au méridien supérieur.

Hauteur méridienne de la Polaire.....	42 <sup>d</sup> 41' 5"
Réfraction.....	— 1. 4
Hauteur apparente de la Polaire.....	42. 40. 1
Complément.....	47. 19. 59
Hauteur méridienne de Rigel.....	40. 53. 10
Réfraction.....	— 1. 8
Hauteur apparente de Rigel.....	40. 52. 2
Complément.....	49. 7. 58
Somme des complémens.....	96. 27. 57
Déclinaison de la Polaire.....	87. 59. 15
Déclinaison de Rigel.....	8. 30. 12
Distance vraie des deux Étoiles.....	96. 29. 27
Distance observée.....	96. 27. 57
Différence.....	0. 1. 30
Moitié ou erreur dont la lunette baisse.....	0. 0. 45

C'est cette erreur que nous appliquerons aux hauteurs

méridiennes que nous allons rapporter. Nous avertissons que le résultat des observations étant commun aux trois observateurs, nous ne spécifierons point à qui chacune en particulier peut appartenir.

*Le 23 Octobre 1753.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil.....	38 <sup>d</sup> 5' 0"
Déclinaison méridionale du centre du Soleil.....	11. 34. 52
Donc, hauteur du pôle.....	<u>40. 38. 10</u>

*Le 24 Octobre.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil.....	37. 44. 5
Déclinaison du centre.....	11. 55. 49
Donc, hauteur du pôle.....	<u>40. 38. 9</u>
Hauteur méridienne de la queue de la Baleine.....	30. 3. 35
Déclinaison méridionale.....	19. 20. 0
Donc, hauteur du pôle.....	<u>40. 38. 6</u>

*Le 25 Octobre.*

Hauteur méridienne de la queue de la Baleine.....	30. 3. 45
Donc, hauteur du pôle.....	<u>40. 37. 56</u>

*Le 26 Octobre.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil.....	37. 2. 30
Déclinaison du centre.....	12. 37. 11
Donc, hauteur du pôle.....	<u>40. 38. 25</u>
Hauteur méridienne de la queue de la Baleine.....	30. 3. 45
Donc, hauteur du pôle.....	<u>40. 37. 56</u>

*Le 27 Octobre.*

Hauteur méridienne de Fomalhaut.....	18. 30. 20
Déclinaison méridionale.....	30. 55. 22
Donc, hauteur du pôle.....	<u>40. 47. 53</u>
Hauteur méridienne de la Polaire.....	42. 41. 10
Déclinaison.....	87. 59. 19
Donc, hauteur du pôle.....	<u>40. 38. 39</u>

*Le 28 Octobre 1753.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil . . . . .	36 <sup>d</sup> 21' 50"
Déclinaison . . . . .	13. 17. 39
Donc, hauteur du pôle . . . . .	<u>40. 38. 39.</u>
Hauteur méridienne de la Polaire . . . . .	42. 41. 5
Hauteur du pôle . . . . .	<u>40. 38. 31</u>
Hauteur méridienne de Rigel . . . . .	40. 53. 10
Déclinaison méridionale . . . . .	8. 30. 12
Hauteur du pôle . . . . .	<u>40. 38. 31</u>
Hauteur moyenne du pôle . . . . .	<u>40. 38. 20</u>

## ARTICLE DEUXIÈME.

*Recherche de la marche de la pendule par des hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil.*

*Le Mercredi 24.*

<i>Hauteurs.</i>	<i>Le matin.</i>	<i>Le soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moitié.</i>
24 <sup>d</sup> 20'	9 <sup>h</sup> 15' 54"	3 <sup>h</sup> 0' 59"	24 <sup>h</sup> 16' 53"	0 <sup>h</sup> 8' 26" $\frac{1}{2}$
24. 30	17. 5	2. 59. 42	47	23 $\frac{1}{2}$
24. 40	18. 18	58. 31	49	24 $\frac{1}{2}$
24. 50	19. 31	57. 16	47	23 $\frac{1}{2}$
25. 0	20. 44	56. 6	50	25
Midi moyen . . . . .				0. 8. 25
Équation . . . . .				+ 0. 14
Midi vrai . . . . .				<u>0. 8. 39</u>

*Le Jeudi 25.*

<i>Hauteur.</i>	<i>Le matin.</i>	<i>Le soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moitié.</i>
24 <sup>d</sup> 30'	9 <sup>h</sup> 18' 23"	2 <sup>h</sup> 56' 48"	24 <sup>h</sup> 15' 11"	0 <sup>h</sup> 7' 35" $\frac{1}{2}$
Équation . . . . .				+ 0. 14 $\frac{1}{2}$
Midi vrai . . . . .				0. 7. 50
Midi vrai le 24 . . . . .				0. 8. 39
Différence . . . . .				<u>0. 49</u>

*Le Samedi 27.*

<i>Hauteurs.</i>	<i>Le matin.</i>	<i>Le soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moitié.</i>
26 <sup>d</sup> 10'	9 <sup>h</sup> 33' 48"	2 <sup>h</sup> 38' 14"	24 <sup>h</sup> 12' 2"	0 <sup>h</sup> 6' 1"
26. 20	35. 9	36. 54	3	1 $\frac{1}{2}$
26. 30	36. 29	35. 33	2	1
26. 40	37. 46	34. 14	0	0
26. 50	39. 6	32. 54	0	0
27. 0	40. 28	31. 32	0	0
Midi moyen.....				0 <sup>h</sup> 6' 0" $\frac{1}{2}$
Équation.....				+ 14 $\frac{1}{2}$
Midi vrai.....				0. 6. 15
Midi vrai le 24.....				0. 8. 39
Différence pour 3 jours.....				0. 2. 24
pour 1 jour.....				0. 0. 48
Midi vrai le 25.....				0. 7. 50
Midi vrai le 27.....				0. 6. 15
Différence pour 2 jours.....				0. 1. 35
pour 1 jour.....				0. 47 $\frac{1}{2}$

Nous sommes donc fondés à fixer le retardement de notre pendule à 48 secondes par jour.

## ARTICLE TROISIÈME.

*Observation de l'Éclipse de Soleil, du 26 Octobre 1753.*

LA nuit avoit été fort belle, & vraisemblablement nous en eussions passé une grande partie à observer des hauteurs méridiennes d'étoiles, si nous n'avions crain de nous fatiguer la vue, & de nous mettre par-là hors d'état d'examiner, avec la dernière attention, le phénomène important que nous attendions. Le 26, le Soleil parut vers 6<sup>h</sup> 40' du matin; son lever fut pur, serein & précédé d'un petit vent de sud-est, préface du temps le plus favorable.

Perfuadés que cette Éclipse seroit totale, nous commençâmes de bonne heure à mesurer, avec l'héliomètre, les

diamètres du Soleil, & nous remarquons, avec soin, que la différence considérable qui s'y étoit trouvée d'abord entre le vertical & l'horizontal, s'évanouissoit à mesure que cet astre en montant se dégageoit des vapeurs de l'horizon.

Nous ne rapporterons point ici la grandeur de ces diamètres; nous nous flattions qu'ils pourroient nous être de quelque utilité, nous avons été trompés dans notre attente, & l'exactitude que nous apportions à cette opération nous a de plus fait manquer le commencement de l'Éclipse.

A 7<sup>h</sup> 30' la Lune avoit déjà échanré le Soleil; cet instant arrivoit plus tôt que nous n'avions compté.

Le voyant passé, nous mesurames différentes phases avec le micromètre ajusté à la lunette de 6 pieds.

En voici le détail; les temps sont des temps vrais.

A 7 <sup>h</sup> 41' 11"	la partie lumineuse étoit égale à 2226 $\frac{1}{2}$ part. du micr.
8. 12. 7 $\frac{1}{2}$	..... à 1299 $\frac{1}{2}$ .
8. 15. 47	..... à 1210 $\frac{1}{2}$ .
8. 18. 38	..... à 1074 $\frac{1}{2}$ .
8. 24. 35	..... à 986 $\frac{1}{2}$ .
8. 27. 35	..... à 791 $\frac{1}{2}$ .
8. 29. 36	la Lune empêchoit de distinguer les bords du diamètre horizontal.

Le froid alors augmenta sensiblement: un thermomètre destiné à en connoître le degré avoit été rompu dès la veille, & quelques jours auparavant des tuyaux de baromètre avoient eu le même sort.

A 8 <sup>h</sup> 32' 14"	la partie lumineuse étoit égale à 511 $\frac{1}{2}$ parties.
8. 37. 47	..... à 268 $\frac{1}{2}$ .
8. 40. 44	..... à 149 $\frac{1}{2}$ .

Le milieu de l'Éclipse, temps fort difficile à bien distinguer, nous échappa, & vers 8<sup>h</sup> 46'  $\frac{1}{2}$  nous vîmes les cornes faire un mouvement subit, & se trouver tout d'un coup dans une direction différente de la précédente; ce moment fut celui de la diminution de l'Éclipse.



La remarque que nous venons de faire est pourtant une preuve bien authentique que nous étions près du terme où l'on devoit voir l'Eclipsé annulaire.

Pendant la plus grande observation, Jupiter & Mars parurent fort clairement : les oiseaux alloient se coucher ; cependant on put toujours écrire facilement avec un crayon , & l'obscurité ressembloit seulement à un beau crépuscule qui est vers son milieu.

C'étoit alors que l'atmosphère solaire eût pu se faire apercevoir ; mais il n'en parut aucune trace : on sait qu'elle ne peut être vue que pendant la totalité d'une Éclipsé.

Celle-ci, depuis le mouvement des cornes, diminuoit sensiblement : la clarté du jour revenoit fort vite. Nous mesurames les phases qui suivent.

A  $8^h 54' 33''$  la partie lumineuse étoit égale à  $453 \frac{1}{2}$  parties.

9.  $5. 53$  ..... à  $923 \frac{1}{5}$ .

On ne pouvoit encore mesurer aucun diamètre du Soleil.

9. 17.  $7 \frac{1}{2}$  la partie lumineuse égale à  $1268 \frac{1}{2}$  parties.

9. 26. 41 ..... à  $1688 \frac{1}{2}$ .

9. 46. 46 ..... à  $2335 \frac{1}{2}$ .

Enfin la Lune étoit prête à disparaître : nous nous attachames uniquement à en bien marquer le moment, & nous l'avons fait avec la plus grande exactitude.

M.<sup>rs</sup> de Goimpy & de Diziers, munis chacun d'une lunette de 12 pieds, étoient dans l'appartement qu'ils avoient choisi : leur pendule étoit réglée sur la mienne. M. de Goimpy détermina la fin de l'Eclipsé à  $10^h 8' 10''$ , & M. de Diziers à  $10^h 8' 2''$ .

Pour moi, placé assez loin de ces Messieurs, je l'ai observée, comme M. de Goimpy, à  $10^h 8' 10''$ . Nous examinames pendant quelque temps l'endroit par où la Lune étoit sortie, pour découvrir son apparence ; nous n'aperçûmes rien pendant l'observation, qui s'est faite avec des verres colorés ; les

bords des deux luminaires ont toujours été bien terminés, & sans aucun mouvement d'ondulation.

La fin de l'Éclipse se réduit en temps vrai sur le retardement journalier des 48 secondes qu'avoit ma pendule, & sur le midi vrai conclu le 26 Octobre à  $0^h 7' 2''$ .

*Le 28 Octobre 1753.*

Fin de l'Éclipse à la pendule.....	10 <sup>h</sup>	8'	10"
A midi, la pendule avançoit de.....		7.	2.
Première correction.....	10.	1.	8.
A 10 <sup>h</sup> la pendule avançoit plus qu'à midi de....	0 <sup>h</sup>	0'	4"
Donc, fin de l'Éclipse, en temps vrai, selon M. de			
Goimpy & moi.....	10 <sup>h</sup>	1'	4"
Selon M. de Diziers.....	10.	0.	56.

Si l'on compare la phase observée à  $8^h 54' 33''$ , aux trois phases observées à  $8^h 32' 14''$ , à  $8^h 37' 47''$ , & à  $8^h 40' 44''$ , on conclura le milieu de l'Éclipse à  $8^h 44' 3\frac{1}{2}''$ , temps vrai.

A midi, nous mesurames très-exactement avec le micro-mètre, le diamètre vertical du Soleil, & nous le trouvames égal à 2906 parties, ce qui, pour chaque doigt, donnera  $242\frac{1}{6}$  parties.

On nous a communiqué l'observation de la même Éclipse, faite à Thury par M. de Thury: nous nous en servirons pour connoître l'erreur des Tables, & la différence des Méridiens entre Paris & Aveiro.

Nous avons suivi la méthode donnée par M. l'abbé de la Caille, dans son *Mémoire sur le Calcul des projections en général*, qui se trouve dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1744, pages 191 & suivantes*.

Comme nous n'avons pas observé le commencement de l'Éclipse, nous supposons la latitude de la Lune, & nous ne cherchons que l'erreur des Tables en longitude; elle est de  $2' 9''.4$ .

Le lieu

Le lieu du Soleil à la fin de l'Éclipse étoit  $7^{\text{h}} 3^{\text{d}} 9' 45''$ , & celui de la Lune  $7^{\text{h}} 3^{\text{d}} 3' 4''$ .

La conjonction vraie sera arrivée, selon l'observation de Thury, à  $10^{\text{h}} 41' 17''$ , temps moyen; la Lune étant dans  $7^{\text{h}} 3^{\text{d}} 11' 36''$  de son orbite, &  $7^{\text{h}} 3^{\text{d}} 10' 26''$  sur l'Écliptique.

Sa latitude de  $34' 58''$  boréale, & l'argument de latitude de  $6^{\text{d}} 20' 25'' \frac{1}{2}$ .

La hauteur du point culminant à Aveiro, sera de  $48^{\text{d}} 51'$ : sa déclinaison  $0^{\text{d}} 31'$  australe: le nonagéisme de l'Écliptique  $162^{\text{d}} 6'$ : sa hauteur  $52^{\text{d}} 52'$ .

La somme des demi-diamètres du Soleil & de la Lune,  $32' 25''$ .

Avec ces élémens, nous trouvons pour différence des Méridiens entre Paris & Aveiro,  $43' 17''$  de temps, dont Aveiro est plus occidental, ou  $10^{\text{d}} 49' 15''$ .

## ARTICLE QUATRIÈME.

*Observations de Latitude & de Longitude faites à Funchal, capitale de l'île de Madère.*

*Vérification de la Lunette perpendiculaire.*

Nous faisons encore ici précéder les observations de latitude, par les opérations que nous avons faites pour connoître l'erreur de la lunette perpendiculaire, & nous avons également employé les deux méthodes connues.

### 1.<sup>o</sup> Recherche de l'erreur de la Lunette perpendiculaire par le renversement.

Le 5 Janvier, nous choisîmes sur l'extrémité septentrionale de la Déserte la plus méridionale, un point fort remarquable; il étoit situé à l'horizon, & éloigné de plus de trois lieues; le temps concouroit à la certitude de notre opération.

# 154 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

L'instrument droit, le fil partant du centre battoit sur	89 <sup>d</sup> 55' 0"
L'instrument renversé, le fil battant sur le centre...	90. 3. 24.
Somme.....	179. 58. 24.
Moitié.....	89. 59. 12.
Distance à 90 <sup>d</sup> 0' 0" ou erreur de l'instrument...	0. 48.

L'erreur est soustractive, parce que l'instrument hausse l'objet.

2.<sup>o</sup> *Recherche de l'erreur de la même Lune, par des hauteurs méridiennes d'Étoiles, prises fort exactement, les unes dans le Nord, les autres dans le Sud, le même jour & pendant le crépuscule, le 8 Janvier.*

Hauteur méridienne de la queue de la Baleine.....	38 <sup>d</sup> 3' 20"
Réfraction.....	— 1. 15
Hauteur corrigée.....	38. 2. 5
Complément.....	51. 57. 55
Hauteur méridienne de la Polaire (au mérid. supér.)...	34. 41. 0
Réfraction.....	— 1. 24
Hauteur corrigée.....	34. 39. 36
Complément.....	55. 20. 24
Somme des compléments.....	107. 18. 19
Déclinaison méridionale de la queue de la Baleine....	19. 21. 0
Déclinaison septentrionale de la Polaire.....	87. 59. 0
Distance vraie des deux Étoiles.....	107. 20. 0
Distance observée.....	107. 18. 19
Différence.....	1. 41
Moitié ou erreur d'instrument, soustractive.....	0. 50 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>

Nous appliquons cette erreur de 0' 50" à toutes les hauteurs méridiennes du Soleil & d'Étoiles qui suivent.

## ARTICLE CINQUIÈME.

*OBSERVATION de Latitude.**Le 25 Décembre 1753.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil . . . .	34 <sup>n</sup> 16' 20"
Déclinaison méridionale . . . . .	23. 24. 39
Hauteur du pôle . . . . .	32. 37. 26

*Le 26 Décembre.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil . . . .	34. 18. 10
Déclinaison méridionale . . . . .	23. 22. 33
Hauteur du pôle . . . . .	32. 37. 42
Hauteur méridienne de la Polaire . . . . .	34. 41. 0
Déclinaison septentrionale . . . . .	87. 59. 0
Hauteur du pôle . . . . .	32. 37. 46

*Le 27 Décembre.*

Hauteur méridienne de l'australe au pied du Lièvre . . . .	34. 52. 0
Déclinaison méridionale . . . . .	22. 32. 15
Hauteur du pôle . . . . .	32. 37. 58

*Le 28 Décembre.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil . . . .	34. 23. 55
Déclinaison méridionale . . . . .	23. 16. 57
Hauteur du pôle . . . . .	32. 37. 35

*Le 29 Décembre.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil . . . .	34. 27. 15
Déclinaison méridionale . . . . .	23. 17. 27
Hauteur du pôle . . . . .	32. 37. 45

*Le 3 Janvier 1754.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil . . . .	34. 51. 20
Déclinaison méridionale . . . . .	22. 49. 40
Hauteur du pôle . . . . .	32. 37. 24

# 156 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Hauteur méridienne de la queue de la Baleine.....	38 <sup>d</sup> 3' 30"
Déclinaison méridionale.....	19. 21. 0
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 35</u>
Hauteur méridienne de Rigel.....	48. 53. 40
Déclinaison méridionale.....	8. 30. 12
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 50</u>
Hauteur méridienne de Sirius.....	41. 0. 40
Déclinaison australe.....	16. 23. 44
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 33</u>

## Le 4 Janvier 1754.

Hauteur méridienne de la Polaire.....	34. 41. 0
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 40</u>
Hauteur méridienne de Sirius.....	41. 0. 30
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 43</u>

## Le 5 Janvier.

Hauteur mérid. de la queue de la Bal. (pend. le crépusc.)	38. 3. 20
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 45</u>
Hauteur mérid. de la Polaire (pendant le crépuscule)...	34. 41. 0
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 45</u>

## Le 6 Janvier.

Hauteur mérid. du bord supérieur du Soleil.....	35. 11. 40
Déclinaison méridionale.....	22. 28. 49
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 55</u>
Hauteur méridienne de la queue de la Baleine.....	38. 3. 20
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 45</u>
Hauteur méridienne de la Polaire.....	34. 41. 0
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 45</u>

## Le 7 Janvier.

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil....	35. 19. 40
Déclinaison méridionale.....	22. 21. 21
Hauteur du pôle.....	<u>32. 37. 22</u>

*Le 8 Janvier 1754.*

Hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil. . . . .	35 <sup>d</sup> 27' 40"
Déclinaison méridionale. . . . .	22. 13. 10
Hauteur du pôle. . . . .	32. 37. 33
Hauteur méridienne de la Baleine. . . . .	38. 3. 20
Hauteur méridienne de la Polaire. . . . .	34. 41. 0
Hauteur du pôle. . . . .	32. 37. 45
Plus grande hauteur du pôle. . . . .	32. 37. 58
Plus petite. . . . .	32. 37. 22
Moyenne ou hauteur vraie. . . . .	32. 37. 40

Nous avons cru devoir rapporter ces vingt-deux observations, telles que nous les avons faites, malgré les différences que l'on a pu remarquer entr'elles. Nous en agissons ainsi pour faire voir notre diligence, notre exactitude & notre candeur, & nous pouvons assurer que cette dernière qualité nous est extrêmement précieuse.

## ARTICLE SIXIÈME.

### *Observation de Longitude.*

QUOIQUE nous ayons tenté plusieurs observations d'espèce différente pour connoître la longitude de Funchal, nous ne rendrons compte ici que de celles par lesquelles nous déterminons la différence des méridiens entre cette ville & Paris. Elles se réduisent à quatre, savoir; trois immersions des fatellites de Jupiter, & une occultation de l'étoile *g* des Hyades derrière le disque de la Lune. Nous les plaçons dans cet article selon leur ordre chronologique, & nous les réduisons en temps vrais; les deux articles suivans seront destinés au résultat qui provient de ces quatre observations.

# 158 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

1.<sup>o</sup> *Immersion du 1.<sup>er</sup> Satellite, le 28 Décembre 1753.*

*Hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil pour régler l'horloge.*

*Le 27 Décembre 1753.*

<i>Hauteurs.</i>	<i>Le Matin.</i>	<i>Le Soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moyen.</i>
27 <sup>d</sup> 20'	10 <sup>h</sup> 22' 42"	2 <sup>h</sup> 24' 44"	24 <sup>h</sup> 47' 26"	0 <sup>h</sup> 23' 43"
27. 40	25. 46	21. 40	26	43
28. 0	29. 0	18. 31	31	43 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
28. 20	31. 9	15. 18	27	43 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
Midis moyen & vrai.....				0. 23. 44.

*Le 28 Décembre.*

<i>Hauteurs.</i>	<i>Le Matin.</i>	<i>Le Soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moyen.</i>
23 <sup>d</sup> 40'	9 <sup>h</sup> 51' 17"	2 <sup>h</sup> 55' 19"	24 <sup>h</sup> 46' 36"	0 <sup>h</sup> 23' 18"
24. 0	53. 55	52. 44	39	19 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
24. 20	56. 22	50. 13	35	17 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
Midi moyen.....				0. 23. 18 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
Équation.....				— 0. 1 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
Midi vrai.....				0. 23. 17
Midi vrai le 27.....				0. 23. 44
Différence.....				0. 0. 27

Le 28 Décembre, le temps étoit assez beau, j'observai une immersion du premier satellite dans l'ombre de Jupiter, à 18<sup>h</sup> 37' 50" à la pendule.

M. de Diziers l'a observée 4 secondes plus tard, & M. de Goimpy, comme moi; ils avoient chacun une lunette de 12 pieds, & moi une de 15 pieds.

Nous avons employé les mêmes lunettes pour les observations suivantes.

Vers la fin de l'observation il a passé un petit nuage rare, qui peut répandre sur l'observation un doute de 8 à 10"; il s'est dissipé à 37' 58", & certainement alors on ne voyoit plus le satellite.



*Hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil, pour régler l'horloge.*

*Le 29 Décembre 1753.*

<i>Hauteurs.</i>	<i>Le Matin.</i>	<i>Le Soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moyen.</i>
23 <sup>d</sup> 40'	9 <sup>h</sup> 50' 29"	2 <sup>h</sup> 55' 17"	24 <sup>h</sup> 45' 46"	0 <sup>h</sup> 22' 53"
24. 0	53. 5	52. 41	46	53
24. 20	55. 39	50. 0	39	49 $\frac{1}{2}$
25. 0	10. 0. 59	45. 41	40	50
Midi moyen.....				0. 22. 51 $\frac{1}{2}$
Équation.....				— 1 $\frac{1}{2}$
Midi vrai.....				0. 22. 50
Midi vrai le 28.....				0. 23. 17
Différence.....				0. 27

Sur ce retardement de 27", nous chercherons l'heure vraie de l'immersion du 28 Décembre.

*Le 28 Décembre.*

Heure de l'immersion à la pendule.....	18 <sup>h</sup> 37' 50"
Le 29 à midi, la pendule avança de.....	22. 50
Première correction.....	18. 15. 0
Le 28, à 18 <sup>h</sup> elle avança plus qu'à midi, de.....	— 0. 6
Donc, heure vraie de l'immersion, selon M. de Goimpy & moi.....	18. 14. 54
Selon M. de Diziers.....	18. 14. 58

*Le 5 Janvier 1754.*

*2.° Une occultation de l'étoile  $\gamma$  des Hyades derrière le disque de la Lune.*

Le *Zodiaque de Senex*, que nous consultons tous les jours, nous apprend qu'une des étoiles voisines de  $\delta$  du Taureau se trouvoit, ce jour-là, fort proche de la Lune; nous en mesurâmes effectivement quelques distances avec le micromètre,

puis nous jugeames qu'elle seroit éclipfée; cela nous fit abandonner toute autre observation, pour nous attacher à déterminer exactement son immersion; nous y parvinmes, & à  $9^h\ 13'\ 54''$ , je la vis se cacher; M. de Goimpy & M. de Diziers la perdirent à  $9^h\ 13'\ 57''$ .

Nous attendimes en vain son émerfion; des nuages nous la déroberent.

Elle étoit entrée sous le disque de la Lune, entre *Schikardus* & *Mare humorum*.

Nous avions chacun une lunette de 12 pieds, & l'air étoit tranquille.

*Le 6 Janvier 1754.*

### 3.<sup>e</sup> Une Immersion du 1.<sup>er</sup> satellite de Jupiter.

Le ciel étoit pur, l'air calme, Jupiter & ses bandes paroissoient fort clairement; cette planète approchoit de son méridien.

M. de Diziers, avec une lunette de 12 pieds, a vu cette immersion à  $14^h\ 24'\ 23''$ ; & moi avec une lunette de 15 pieds, je l'ai vue à  $14^h\ 24'\ 18''$  de la pendule.

### *Recherche du temps vrai de ces deux Observations.*

Ma pendule s'étoit arrêtée dans la nuit du 4 au 5 Janvier; cet accident lui arriva plusieurs fois dans la journée du 5. Enfin, jugeant que l'ébranlement de la maison qui nous servoit d'observatoire, pouvoit l'avoir mise hors de son échappement, je touchai à la vis de régie, & depuis ce moment elle a marché sans interruption. Ainsi pour connoître les temps vrais de ces deux observations, nous aurons recours aux hauteurs correspondantes prises les 6 & 7 Janvier, & pour plus d'exactitude, nous y ajouterons celles du 8 Janvier.

*Hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil.**Le 6 Janvier 1754.*

<i>Hauteurs.</i>	<i>Le Matin.</i>	<i>Le Soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moitié.</i>
23 <sup>d</sup> 20'	9 <sup>h</sup> 11' 52 <sup>"</sup> $\frac{1}{2}$	2 <sup>h</sup> 30' 47 <sup>"</sup> $\frac{1}{2}$	23 <sup>h</sup> 42' 40"	11 <sup>h</sup> 51' 20"
24. 20	19. 24 $\frac{1}{2}$	23. 17 $\frac{1}{2}$	42	21
25. 40	29. 50 $\frac{1}{2}$	12. 51 $\frac{1}{2}$	42	21
26. 0	32. 34 $\frac{1}{2}$	10. 7 $\frac{1}{2}$	42	21

Midi moyen..... 11. 51. 21

Équation..... — 0. 5

Midi vrai..... 11. 51. 16

*Le 7 Janvier.*

<i>Hauteurs.</i>	<i>Le Matin.</i>	<i>Le Soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moitié.</i>
24 <sup>d</sup> 0'	9 <sup>h</sup> 13' 38 <sup>"</sup> $\frac{1}{2}$	2 <sup>h</sup> 26' 9 <sup>"</sup> $\frac{1}{2}$	23 <sup>h</sup> 41' 48"	11 <sup>h</sup> 50' 54"
24. 20	18. 9 $\frac{1}{2}$	23. 35 $\frac{1}{2}$	45	52 $\frac{1}{2}$
24. 40	20. 41 $\frac{1}{2}$	21. 4 $\frac{1}{2}$	46	53
25. 40	28. 29 $\frac{1}{2}$	13. 14 $\frac{1}{2}$	45	52 $\frac{1}{2}$

Midi moyen..... 11. 50. 53

Équation..... — 0. 5

Midi vrai..... 11. 50. 48

Midi vrai le 6..... 11. 51. 16

Différence..... 0. 28

*Le 8 Janvier.*

<i>Hauteurs.</i>	<i>Le Matin.</i>	<i>Le Soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moitié.</i>
24 <sup>d</sup> 30	9 <sup>h</sup> 18' 4 <sup>"</sup> $\frac{1}{2}$	2 <sup>h</sup> 22' 41 <sup>"</sup> $\frac{1}{2}$	23 <sup>h</sup> 40' 46"	11 <sup>h</sup> 50' 23"
24. 40	19. 17 $\frac{1}{2}$	21. 24 $\frac{1}{2}$	42	21
25. 0	21. 49 $\frac{1}{2}$	18. 52 $\frac{1}{2}$	42	21
25. 10	23. 12 $\frac{1}{2}$	17. 34 $\frac{1}{2}$	47	23 $\frac{1}{2}$

Midi moyen..... 11. 50. 22

Équation..... — 0. 4

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

X

Midi vrai.....	11 <sup>h</sup> 50' 18"
Midi vrai le 7.....	11. 50. 48
Différence.....	<u>0. 30</u>

Ce retardement est assez conforme à celui que l'on a remarqué précédemment, & nous nous en servons pour déterminer les temps vrais de l'occultation de l'étoile & de l'immersion du premier satellite de Jupiter.

*Le 5 Janvier 1754.*

Temps de l'occultation à la pendule.....	9 <sup>h</sup> 13' 54"
A midi, la pendule retardoit de.....	8. 16
A 9 heures elle retardoit plus qu'à midi de.....	0. 10 $\frac{3}{4}$
Donc, heure vraie de l'occultation de l'Étoile.....	<u>9. 22. 20 <math>\frac{3}{4}</math></u>

*Le 6 Janvier.*

Immersion du premier satellite à la pendule.....	14 <sup>h</sup> 24' 18"
A midi la pendule retardoit de.....	8. 44
A l'heure de l'observation, elle avoit retardé de.....	0. 17
Donc, heure vraie de l'immersion du premier satellite..	<u>14. 33. 19</u>

*Le 8 Janvier.*

*4.° Une Immersion du III.° Satellite dans l'ombre de Jupiter.*

Le ciel étoit serein, Jupiter & ses bandes paroissoient à merveille; nous suivions parfaitement le troisième satellite, dont la lumière fort affoiblie nous annonçoit qu'il alloit bientôt disparaître.

Il étoit en cet état, & nous comptons 11<sup>h</sup> 19' 52" à la pendule, quand il a passé un petit nuage, qui, sans faire perdre la planète de vue, a ôté celle du satellite. À 11<sup>h</sup>

20' 16", le nuage étoit dissipé, & le satellite ne paroïssoit plus. Nous avons estimé cette immersion à 11<sup>h</sup> 20' 2" de la pendule.

Malgré la circonstance de ce petit nuage, qui paroît ôter de la confiance à cette observation, nous la produisons, parce que nous sommes sûrs de ce que nous rapportons, & que par la comparaison que nous en faisons, avec les observations que l'on nous a communiquées, nous trouvons la même différence en longitude que par nos autres observations.

*Recherches du temps vrai de cette Observation.*

Nous en déduisons le temps vrai par des hauteurs correspondantes du 8 & du 9 Janvier.

*Le 9 Janvier 1754.*

<i>Hauteurs.</i>	<i>Le matin.</i>	<i>Le soir.</i>	<i>Somme.</i>	<i>Moyen.</i>
25 <sup>d</sup> 30'	9 <sup>h</sup> 24' 23 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> "	2 <sup>h</sup> 15' 19 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> "	23 <sup>h</sup> 39' 43"	11 <sup>h</sup> 49' 51 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> "
25. 40	25. 37 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> "	14. 4 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> "	42	51
25. 50	26. 55 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> "	12. 45 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> "	42	51
26. 0	29. 35 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> "	10. 6 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> "	42	51
Midi moyen.....				11 <sup>h</sup> 49' 51"
Équation.....				— 0. 5
Midi vrai.....				11. 49. 46
Midi vrai le 8.....				11. 50. 18
Différence.....				0. 32

*Le 8 Janvier.*

Immersion du III. <sup>e</sup> Satellite à la pendule.....	11. 20. 2
A midi, la pendule retardoit de.....	9. 42
A l'heure de l'observation, elle avoit retardé de...	0. 16
Heure vraie de l'immersion du III. <sup>e</sup> Satellite.....	11. 30. 0

## ARTICLE SEPTIÈME.

*Détermination de la Longitude de Funchal, par les trois Immersions des satellites de Jupiter.*

CES trois immersions n'ont point eu de correspondantes en Europe; mais le 1.<sup>er</sup> Janvier 1754, M. l'abbé de la Caille a observé à l'île de France une immersion du premier satellite de Jupiter à  $12^h 7' 48''$ , & une du troisième à  $12^h 32' 46''$ .

Comme ces observations ne sont éloignées que de peu de révolutions, de celles que nous avons faites à Funchal, il nous sera aisé de conclure la différence des méridiens entre cette ville & Paris, après nous être toutefois assurés de la longitude de l'île de France, par rapport à Paris.

Par un milieu entre neuf observations de M. l'abbé de la Caille, & sept faites par M. d'Après de Mannevillette, au même endroit, on trouve que l'île de France est située à  $3^h 40' 35''$  à l'Orient du méridien de Paris.

Là-dessus on pourra conclure la détermination suivante: Nous tirerons des Tables de M. Wargentin, les révolutions du premier & du troisième satellite, dans l'intervalle compris entre les observations.

*Le 28 Décembre 1753.*

Immersion du 1. <sup>er</sup> Satellite, observée à Funchal....	18 <sup>h</sup> 14' 54"
Ajoutant pour deux révolutions . . . . .	3 jours... 12. 55. 5

L'immersion aura dû arriver à Funchal le 1. <sup>er</sup> Janvier à ..	7. 9. 59"
Elle a été observée à l'île de France le 1. <sup>er</sup> Janvier à ..	12. 7. 48

La différence entre l'île de France & Funchal sera...	4. 57. 49
---	-----------

La différence entre Paris & l'île de France est. ....	3. 40. 35
---	-----------

Donc, entre Funchal & Paris, elle sera.....	1. 17. 14
---	-----------

*Le 1.<sup>er</sup> Janvier 1754.*

Immersion du I. <sup>er</sup> Satellite observée à l'île de France.	12 <sup>h</sup> 7' 48"
Ajoutant pour trois révolutions . . . . .	5 jours . . . 7. 23. 3
L'immersion aura dû arriver à l'île de France le 6 Janv. à	19. 30. 51
Elle a été observée à Funchal à . . . . .	14. 33. 19
La différence entre Funchal & l'île de France, sera . . .	4. 57. 32
La différence entre Paris & l'île de France est . . . . .	3. 40. 35
Donc, entre Paris & Funchal, elle sera . . . . .	1. 16. 57
Immersion du III. <sup>e</sup> Satellite observée à l'île de France.	12. 32. 46
Ajoutant pour une révolution . . . . .	7 jours . . . 3. 54. 38
Elle aura dû arriver à l'île de France le 8 Janvier à . . .	16. 27. 24
Elle a été observée à Funchal le 8 Janvier à . . . . .	11. 30. 0
La différence entre Funchal & l'île de France, sera . . .	4. 57. 24
La différence entre Paris & l'île de France est . . . . .	3. 40. 35
Donc, entre Paris & Funchal, elle sera . . . . .	1. 16. 49
La différence moyenne entre ces trois déterminations, sera . . . . .	1. 17. 3

## ARTICLE HUITIÈME.

*Détermination de la Longitude de Funchal, pour l'occultation de  $\gamma$  du Taureau, derrière le disque de la Lune, le 5 Janvier 1754.*

CETTE observation n'a point été faite à Paris, où cette Étoile ne devoit point être éclipsée; si les nuages ne nous avoient pas dérobé l'émersion, nous eussions pu trouver directement l'erreur des Tables en longitude & en latitude.

Mais le même jour, M. le Monnier a observé à Paris le passage du premier bord de la Lune au méridien à 8<sup>h</sup> 57' 58" temps vrai.

La hauteur du bord inférieur de la Lune étoit à 8<sup>h</sup> 59' 4", de 57<sup>d</sup> 59' 32"  $\frac{1}{2}$ , son diamètre étoit de 32' 8".

La Lune fut aussi tout de suite comparée à Aldebaran, dont l'ascension droite apparente étoit 65<sup>d</sup> 27' 35".

Le lieu de l'étoile *g* avoit été exactement déterminé en 1751, par le même Astronome, sa longitude au moment de l'observation est de  $64^d 6' 10''$ , & sa latitude de  $3^d 42' 40''$  australe.

Nous réduisons le temps vrai de l'observation en temps moyen, & nous avons  $9^h 28' 33''$ . Si nous supposons une heure de différence de méridiens entre Paris & Funchal; nous aurons à Paris pour première hypothèse  $10^h 28' 33''$ , & pour seconde hypothèse  $10^h 38' 33''$ .

Nous faisons ensuite le calcul des parallaxes en longitude & en latitude, & nous trouvons pour chaque hypothèse, les élémens que nous allons donner.

	1. <sup>re</sup> Hypothèse.	2. <sup>e</sup> Hypothèse.
Heure moyenne de l'observation à Paris.	$10^h 28' 33''$	$10^h 38' 33''$
Temps moyen à Funchal.	$142^d 8. 15$	
Longitude moyenne du Soleil.	$285. 23. 32$	
Point de l'Équateur au Méridien.	$67. 32. 0$	
Point culminant.	$69. 14. 0$	
Angle de l'écliptique & du Méridien.	$81. 14. 0$	
Déclinaison du point culminant.	$21. 52. 0$	
Hauteur du point culminant.	$79. 15. 0$	
Hauteur du nonagésime.	$70. 53. 0$	
Longitude vraie de la Lune.	$63. 52. 8$	$63^d 57' 49''$
Distance vraie au pôle de l'écliptique.	$93. 17. 8$	$93. 17. 31$
Distance de la Lune au nonagésime.	$7. 1. 0$	$6. 56. 0$
Parallaxe en longitude.	$0. 7. 1$	$0. 6. 56$
Parallaxe en latitude.	$13. 49$	$13. 49$
Longitude apparente de la Lune.	$63. 45. 7$	$63. 50. 53$
Latitude apparente de la Lune.	$3. 30. 57$	$3. 21. 20$
Longitude de l'Étoile.	$64. 6. 10$	$64. 6. 10$
Latitude de l'Étoile.	$3. 42. 40$	$3. 42. 40$
Différence des longitudes apparentes.	$0. 21. 3$	$15. 17$
Différence des latitudes apparentes.	$0. 11. 41$	$11. 18$
Donc, distance apparente.	$0. 24. 4\frac{1}{2}$	$19. 05$

Nous dirons à présent  $4' 59''\frac{1}{2}$ , différence de  $24' 4''\frac{1}{2}$  à



19' 05", sont à 10' 0" de temps, différence entre les deux hypothèses, comme 3' 1", différence entre le demi-diamètre de la Lune, & la distance apparente 19' 05" dans la seconde hypothèse, sont à 6' 3" que les deux luminaires avoient encore à parcourir pour être éloignés l'un de l'autre du demi-diamètre de la Lune.

En ajoutant ces 6' 3" à 10<sup>h</sup> 38' 33", heure moyenne pour la seconde hypothèse à Paris, on aura 10<sup>h</sup> 44' 36" pour heure moyenne dans cette ville, tandis que l'on comptoit à Funchal 9<sup>h</sup> 28' 33", la différence des méridiens sera 1<sup>h</sup> 16' 3"; si l'on prend un milieu entre ce résultat & celui qui provient de la première observation du premier satellite, on aura 1<sup>h</sup> 16' 40", dont Funchal est situé à l'occident du méridien de Paris, ce qui fait 19<sup>d</sup> 10' 0".

## ARTICLE NEUVIÈME.

IL ne nous resteroit plus rien à dire sur la position de l'île de Madère, si le P. Laval n'avoit publié en 1728, dans son Voyage à la Louisiane, des observations qu'il avoit faites en 1720 à Funchal, dans la maison des RR. PP. Jésuites.

Cet Astronome, *pages 21 & suiv.* fixa la latitude de son Observatoire à 32<sup>d</sup> 37' 53"; il étoit éloigné de cent cinquante toises du bord de la mer: nous en étions environ à trente toises, & nous avons conclu notre latitude de 32<sup>d</sup> 37' 40". La différence entre nos deux résultats est trop légère pour en parler.

Il n'en est pas de même de la détermination de la longitude de Funchal; le P. Laval la conclut, *page 245*, de 1<sup>h</sup> 7' 45"; ce qui fait, entre lui & nous, 8' 55" de temps.

Il compare une émerfion du premier Satellite qu'il a observée le 9 Avril à 9<sup>h</sup> 6' 32", temps vrai, avec une émerfion du même Satellite observée le 2 Avril à Paris à 8<sup>h</sup> 17' 37", & avec une autre émerfion du même Satellite observée à Marseille par le P. Feuillée, le 9 Avril 1720, à 10<sup>h</sup> 26' 49".

La pendule du P. Laval, réglée le 8 Avril par une seule hauteur correspondante du bord supérieur du Soleil, pourroit

l'avoir induit en erreur. Mais sans chercher les causes du défaut visible de l'observation du P. Laval, nous nous contenterons de dire, que trois immersions de satellites, & une occultation d'étoiles, faites par trois Observateurs à la fois, doivent donner à notre résultat un degré de précision que ne peut avoir celui du P. Laval.

On fait de plus que le méridien de l'île de Fer, passe à peu-près par celui de Madère; selon nos observations, Funchal sera situé à  $0^{\text{d}} 50' 0''$  à l'orient du méridien de l'île de Fer, ce qui doit être conforme à la position que lui avoient donnée nos meilleurs Géographes, sans être encore guidés par les Observations astronomiques.



P R E M I E R  
*MÉMOIRE SUR L'INDE\**,  
 PARTICULIÈREMENT  
 SUR QUELQUES POINTS DE L'ASTRONOMIE  
 DES GENTILS TAMOULTS;

*Sur Pondichery & ses environs.*

Par M. LE GENTIL.

L'ASTRONOMIE des Brame & des Indiens Tamoults, qu'on peut appeler *Astronomie Indienne*, ne doit pas se confondre avec l'Astronomie Indienne des Siamois, dont M. Cassini nous a donné les règles dans le *VIII.<sup>e</sup> Volume* des Mémoires de l'Académie; l'une est très-différente de l'autre, & les règles ne sont pas les mêmes: je prie le Lecteur d'en voir la preuve dans la source elle-même; au reste, l'Astronomie Indienne des Siamois, est un morceau très-bien fait, très-curieux & digne du grand Maître de qui nous le tenons.

Le séjour de vingt-trois mois que j'ai fait à Pondichéry, m'a fourni l'occasion de prendre sur l'Inde plusieurs connoissances, que j'ai cru pouvoir piquer la curiosité des Européens; mais si ce que j'ai recueilli se réduit à peu de chose, je puis au moins certifier la vérité des faits que je rapporte. Je dois me borner dans ce Mémoire à ceux qui sont du ressort de l'Académie.

Il est fort difficile à un Voyageur de se procurer dans l'Indostan, les éclaircissements qu'il desire. Les Brame auxquels, comme mieux instruits que le reste des Indiens, il est obligé d'avoir recours, ne se prêtent aux questions qu'on leur fait, que de la plus mauvaise grâce, accompagnée souvent de l'air du plus grand mépris, ce qui vient autant de leur ignorance

---

\* Une partie de ce Mémoire a été lûe à la rentrée publique d'après Pâques, le 21 d'Avril 1773.

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

de l'état des Sciences en Europe, que de l'opinion qu'ils ont de l'antiquité de leurs connoissances, & de leur préjugé de religion. Il n'est pas jusqu'aux gens dont vous vous servez dans vos affaires, vos propres domestiques Gentils, qui n'aient pour vous, en vous tendant la main pour recevoir leur salaire, le plus souverain mépris.

Les Brames ont beaucoup de ressemblance avec ces Prêtres Égyptiens dont Strabon nous a laissé le portrait. « Un certain » Chœremon, dit-il, qui cultivoit l'Astronomie, ayant accom- » pagné le Commandant *Ælius-Gallus* dans son voyage en » Égypte, les Prêtres se moquèrent presque de lui, tant ils » étoient pétris d'ignorance & de présomption.

» On voyoit encore, continue Strabon, les maisons où » Eudoxe & Platon avoient tenu leur domicile; en effet, ces » deux Philosophes firent un voyage en Égypte, & furent en » commerce de société, pendant treize ans, avec les Prêtres » Égyptiens. Ceux-ci possédoient la science des Astres; mais » ils s'en réservoient le secret, & ne vouloient en aucune façon » communiquer leur savoir; cependant à force de patience, de » prières & de complaisances, nos Philosophes apprirent d'eux » quelques préceptes, mais ces barbares en cachèrent bien » davantage. »

Les Brames ne sont guère plus communicatifs aux Étrangers que ne l'étoient les Prêtres Égyptiens; ils ont la même répugnance à faire des Élèves. Un Indien ou Gentil peut quitter son culte; il lui est libre, par exemple, de se faire Chrétien ou Mahométan; on se contente, pour toute punition, de l'exclure de sa caste ou tribu. Mais un Mahométan ou quelqu'autre habitant que ce soit, quelque religion qu'il professe, ne peut embrasser celle des Brames ou des Indiens; elle est exclusivement attachée à la naissance, c'est une espèce d'héritage; de sorte que pour être Gentil de religion, il faut être né Gentil.

On ne doit donc pas s'étonner si des gens nés, nourris & élevés dans ces principes, ne cherchent point à satisfaire

ceux que la curiosité porte à s'adresser à eux pour s'instruire de leurs mœurs, coutumes, cérémonies & religion.

Cette difficulté que j'entrevis dès le commencement de mon arrivée à Pondichéry, & que je trouvai en effet par la suite, fait que je regarde encore l'Indostan comme un pays bien neuf pour nous, & fort difficile à connoître. Il faudroit pour en avoir une connoissance, telle que celle que le Chevalier Chardin nous a laissée de la Perse, y passer un grand nombre d'années, & y dépenser des sommes immenses; car les Brames aiment beaucoup l'argent. Un seul homme même ne seroit pas suffisant, & ne pourroit embrasser tout le pays; il faudroit que de savans Voyageurs se dispersassent dans différentes provinces, qu'ils agissent de concert, qu'ils fussent en correspondance; sur-tout il seroit nécessaire qu'ils possédassent à fond la langue savante, pour lire les livres Indiens, autrement on ne recueillera jamais que très-peu de faits; encore restera-t-il bien de l'incertitude.

Ces considérations sont cause que j'ai mieux aimé ne mettre dans mes journaux que quelques faits suffisamment avérés.

On sait que la presqu'île en deçà du Gange qui se termine au sud par le cap Comorin, a la côte de Coromandel, où est situé Pondichéry à l'orient, & la côte de Malabar à l'occident.

Les Indiens de ces deux côtes, sont distingués, comme tous les autres peuples de l'Indostan, en différentes castes ou tribus.

La côte de Coromandel est habitée par les Tamouls ou Tamulaires en francisant le mot, quoique nous les confondions souvent sous le nom de Malabars, avec les habitans de l'autre côte.

Les Tamouls se disent tous originaires du Tanjaour & du Maduré; leur langue est la même, & la langue des Malabars, qui sont de l'autre côté de la presqu'île, à l'ouest, est tout-à-fait différente.

Les Tamouls se sont répandus le long de la côte du Carnate, & dans l'intérieur des terres; ils se sont même rendus

les maîtres du pays, & en ont en quelque sorte assujetti les peuples, en les engageant par la force de la persuasion à quitter les bois où ils vivoient, disent les Tamouls, à la manière des brutes. De cette façon les Tamouls sont venus à bout de les tirer de leurs forêts, & de les civiliser un peu ; mais ils sont malgré cela restés dans un état de mépris si grand aux yeux de leurs bienfaiteurs, qu'ils s'estimeroient peut-être plus heureux au fond de leurs forêts : ces gens sont aujourd'hui partie de la Nation, & composent la plus basse & la plus vile caste, connue sous le nom de *Parias*, que l'on n'emploie que dans les plus vils travaux ; elle ne peut se flatter de jamais sortir de son état d'avilissement ; les castes sont immiscibles.

Les Tamouls se disent très-anciens à la côte du Carnate ; ils adoroient anciennement un Dieu qu'ils nommoient *Baouth*, & ils m'ont assuré qu'il y a encore quelques Indiens qui, en se cachant, reconnoissent cette Divinité, & qui lui rendent leurs hommages.

Le Dieu *Baouth* a une si grande ressemblance avec le Dieu *Sommonacodom* des Siamois, & le Dieu *Foë* des Chinois, qu'on ne peut guère douter que ce ne soit la même Divinité ; c'est ce que nous aurons occasion de vérifier dans la suite, comme aussi d'examiner si les Indiens ont porté leur culte en Chine, ou si ce ne seroient point plutôt les Chinois qui étant venus commercer anciennement à la côte de Coromandel, en auroient emmené avec eux en Chine, le Dieu *Baouth*, comme l'assurent les Tamouls.

Les Tamouls assurent aussi qu'ils tiennent des Brames l'Astronomie & leur religion actuelle, & que les Brames sont venus de la partie du nord, dans le Tanjaour & le Maduré ; mais ils ne peuvent dire, ni dans quel temps, ni de quelle partie précisément du nord ils sont venus. Ils ajoutent que c'est par leur éloquence & par leur austérité, que les Brames sont venus à bout de renverser le culte qu'on rendoit au Dieu *Baouth*, & de chasser les Ministres ; nous ne parlerons ici que de leur Astronomie.

*De l'Astronomie des Indiens Tamouls.*

Selon les Tamouls, l'époque de l'arrivée des Brames dans le Maduré & le Tanjaour, n'est pas bien ancienne, mais selon eux une époque de mille ans est assez récente. Au reste, ils ne disent rien de cette époque; seulement ils conviennent qu'il y eut une réforme dans l'Astronomie, sous le règne d'un Roi, qu'ils nomment *Salivagena* ou *Salivaganam*: ce Roi *Salivaganam* est sans doute le même dont parle M. Holwell, connu des Bengalis, sous le nom de *Succadit*; sa mort fut une nouvelle époque pour les Gentils; il mourut, selon M. Holwell, l'an 79 de Jésus-Christ. (*Événemens Historiques*, chap. IV, p. 24, édit. d'Amsterdam, 1768).

*Salivagena* aimoit, dit-on, beaucoup l'Astronomie; cette science prit tant de faveur sous son règne, que l'époque de *Salivagena* est aussi fameuse dans l'Inde parmi les Tamouls, que celle de Nabonassar l'est chez les Chaldéens. Or, selon le calcul que m'en ont donné les Brames & les Talnouts en 1769, il y avoit alors seize cents quatre-vingt-onze ans que *Salivagena* étoit mort. La mort de ce Prince tomberoit donc l'an 78 de J. C. ce qui semble prouver que dès ce temps-là les Brames étoient dans cette partie de l'Inde, & qu'on y savoit déjà calculer les Éclipses de Soleil & de Lune, dans un temps où le nord de l'Europe étoit encore plongé dans les ténèbres de l'ignorance & de la barbarie.

Mais quels progrès n'a pas faits depuis ce temps, l'Astronomie parmi nous, tandis que les Brames sont aujourd'hui ce qu'ils étoient du temps de *Salivaganam*, il y a dix-sept cents ans! Et soit qu'on doive attribuer cette indolence à des causes physiques, telles que le climat; soit que des causes morales y aient part, il est certain que les Brames ne pensent point à étendre leurs connoissances, & tous ceux que j'ai vus, m'ont paru peu curieux de perfectionner leurs calculs, ne faisant pour cet effet aucune observation astronomique, ni aucune autre espèce de recherche. Ils s'imaginent même que celles que nous faisons chez eux sont une suite de notre ignorance, & de ce

que nous venons pour nous instruire chez eux dans une science que nous ne connoissons point en Europe.

Ils font leurs calculs astronomiques avec une vîtesse & une facilité singulière, sans plume & sans crayon, ils y suppléent par des cauris (espèce de coquilles) qu'ils rangent sur une table, comme nos jetons, & le plus souvent par terre.

Cette méthode de calculer m'a paru avoir son avantage, en ce qu'elle est bien plus prompte & plus expéditive que la nôtre, mais en même temps elle a un très-grand inconvénient; il n'y a pas moyen de revenir sur ses calculs, encore moins de les garder, puisqu'on efface à mesure qu'on avance. Si on s'est, par malheur, trompé dans le résultat, il faut recommencer sur nouveaux frais.

Mais il est bien rare qu'ils se trompent. Ils travaillent avec un sang-froid singulier, un flegme & une tranquillité dont nous sommes incapables, & qui les mettent à couvert des méprises que nous autres Européens ne manquerions pas de faire à leur place: il semble donc que nous devons, les uns & les autres, garder chacun notre méthode; il semble que la leur ait été faite uniquement pour eux.

Leurs règles de calculs astronomiques sont en vers énigmatiques qu'ils savent par cœur; par ce moyen ils n'ont pas besoin de tables de préceptes. Au moyen de ces vers qu'on leur voit réciter (comme nous faisons nos formules) à mesure qu'ils calculent, & au moyen de leurs cauris, ils font les calculs des Éclipses de Soleil & de Lune avec la plus grande promptitude.

Cet usage d'Astronomie théori-pratique, réduite en vers, est sans doute une suite de la mollesse naturelle à ce climat, qui est si chaud, qu'il agit sur les fonctions du corps & de l'ame, en mettant l'un & l'autre dans une sorte d'ancantissement qui les rend incapables d'une trop longue application. C'est, sans doute, dis-je, par cette raison, que les Brames, pour plus de facilité, & pour se moins fatiguer l'esprit (les vers se retenant facilement) se sont fait cette méthode. Peut-être aussi ont-ils eu leur intérêt en cela, qui est d'avoir une



langue énigmatique qui soit ignorée du reste du monde, ou pour le moins, entendue de peu de personnes; & comme avec cela ils sont les Ministres de la Religion & des Princes, il est aisé de se figurer toute l'étendue du pouvoir de cette caste sur les peuples.

Leurs Tables du Soleil & de la Lune sont cependant écrites sur des feuilles de palmier, toutes taillées fort proprement, de la même grandeur: ils en font de petits livrets auxquels ils ont recours quand ils veulent calculer une Éclipse; ils se servent alors d'un petit stylet ou poinçon, avec lequel ils tracent sur ces feuilles tous les caractères qu'ils veulent. Ce poinçon forme un trait léger mais apparent, en déchirant la pellicule légère qui recouvre la feuille.

Ce que j'ai pu apprendre de l'Astronomie des Brames se réduit à cinq points principaux.

L'usage du gnomon, la longueur de l'année, la précession des équinoxes, la division du Zodiaque en vingt-sept constellations, & le calcul des Éclipses de Soleil & de Lune.

#### *De l'usage du Gnomon chez les Brames.*

La première chose que j'ai remarquée dans l'Astronomie des Brames, est l'usage du gnomon: cet usage leur est une des plus anciennes pratiques de l'Astronomie; on ne peut pas même se figurer que ceux qui les premiers ont travaillé à l'Astronomie solaire, & à régler par conséquent la longueur de l'année, ne se soient servis des ombres méridiennes des corps; car c'est le signe le plus apparent & le plus frappant du mouvement du Soleil vers l'un & l'autre pôle.

Les Chaldéens, long-temps avant les Grecs, observoient avec le gnomon. On peut voir ce que dit à ce sujet Hérodote dans son Euterpe; mais Hérodote ne nous apprend point comment ils s'en servoient; & quoique tout le monde sache ce qu'on entend par gnomon, il y a dans la façon de s'en servir par les Brames, quelques circonstances dignes de curiosité, qui peuvent nous donner une idée de la manière dont les Chaldéens faisoient usage du gnomon; car il y a

bien de l'apparence que les Brames de nos jours tirent leurs connoissances astronomiques des anciens Bracmanes, & ceux-ci des Chaldéens.

Le gnomon sert aux Brames à tracer la ligne méridienne, à orienter leurs pagodes, & enfin à trouver de combien la longueur d'un jour quelconque de l'année, pris hors des équinoxes, excède la durée du jour de l'équinoxe, ou est plus petit que ce même jour.

Ces Astronomes ne font leur opération du gnomon que le jour de l'équinoxe. Voici quelle est leur méthode.

Ils disent que le jour de l'équinoxe le Soleil est au milieu du monde; & que là où est cet Astre, les corps ne font point d'ombre. Ils cherchent donc le jour que le Soleil a douze signes, ou 0 signes (nous enseignerons ce calcul, *section II, article 1.<sup>er</sup>* du calcul des Éclipses de Soleil). Ce calcul une fois fait, on égalise (dit la méthode) un terrain, & on le met de niveau. Au milieu, on plante à plomb une règle ou perche quelconque, dont la longueur est arbitraire, mais qui doit être divisée depuis le terrain jusqu'au sommet, en douze parties égales qu'on nomme *angoulam*, (c'est-à-dire ongles, pouces ou lignes) & chacun de ces pouces est subdivisé en soixante parties qu'on nomme *chevi-angoulam*, (seonds pouces); on observe ensuite la plus petite ombre du Soleil, & on mesure la longueur de cette ombre en parties du gnomon qui sert d'échelle.

Cette longueur de l'ombre du gnomon, pour un lieu donné, sera toujours la même, disent les Brames, pour le lieu où elle aura été une fois observée.

Lorsque les Brames veulent bâtir une pagode, & que la Divinité à laquelle cette pagode doit être dédiée, leur a fait révéler ses ordres, & l'endroit qu'elle affectionne plus particulièrement, ils emploient l'opération du gnomon; pour lors ils décrivent de son pied un cercle, & par le moyen de deux points d'ombre ils tracent une ligne méridienne qui sert à orienter la pagode & les pyramides dont elle est ornée.

Dans

Dans toutes les pagodes, l'édifice est une espèce de quarré dont les côtés regardent les quatre parties du monde.

Les pyramides des pagodes sont en général des morceaux curieux, quoique d'une architecture bizarre aux yeux d'un Européen : elles sont fort élevées, dans la forme de celles d'Égypte, surchargées d'ornemens dans le goût de ceux de nos églises gothiques ; & elles servent de portail & d'entrée au temple. Je me suis donné la peine de mesurer & de prendre la direction de celle de Vilnour, petite ville Indienne à deux lieues à l'ouest de Pondichéry ; j'ai trouvé que les quatre faces de ces pyramides regardoient exactement les quatre points cardinaux.

On me demandera si les Bames corrigent la Méridienne, à cause du changement du Soleil en déclinaison dans l'intervalle de temps des deux points d'ombre, pris le matin & le soir, sur-tout le jour de l'Équinoxe.

Les Bames, il est vrai, ne font point cette correction ; ils ne la connoissent même pas. Au reste, cette correction, calculée pour la latitude de Pondichéry, pour le jour de l'Équinoxe, & pour 7 heures environ d'intervalle du matin au soir, est tout au plus de  $3^{\circ}\frac{1}{2}$ , quantité trop petite pour être aperçue sans quart-de-cercle ; ce qui fait même une exactitude bien suffisante dans une infinité de cas.

J'ai dit que l'observation de la longueur de l'ombre du gnomon, servoit aux Bames à calculer la différence ascensionnelle ; & voici leur procédé.

Ils savent, par exemple, qu'à Tirvalour, ville de la dépendance du roi de Tanjaour, à trente lieues au plus dans le sud de Pondichéry, cinq lieues à l'ouest de Negapatnam, la longueur de l'ombre du gnomon, est, le jour de l'équinoxe, de 144 parties, dont le gnomon en contient 720 ; ils multiplient 144 par 20, & divisant le produit 2880 par 60, ils trouvent 48 minutes d'heure ; c'est ce qu'ils appellent *adi-chara-vinady*.

Ils partagent après cela l'*adi-chara-vinady*, en cinq parties ;

Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.

Z

ils prennent quatre de ces parties que l'on nomme *maddhia-chara-vinady*; il fera, dans cet exemple,  $38' \frac{2}{3}$ .

Enfin le tiers de l'*adi-chara-vinady*, ou de 48 minutes, donnera 16 minutes; ce qu'ils appellent l'*antia-chara-vinady*.

Ils retiennent ces trois nombres, & ils les arrangent dans leur mémoire, de façon que le premier nombre 48 répond au premier signe; le second nombre  $38 \frac{2}{3}$  au second signe; & 16 au troisième signe, comme dans la Table suivante.

*TABLE INDIENNE de la différence ascensionnelle, ou bien, valeur des signes de Bouja.*

S I G N E S.	M I N U T E S D'H E U R E.
0.	00.
1.	48.
2.	38.
3.	16.

Cette opération étant faite, lorsqu'on veut avoir le temps de la demeure du Soleil sur l'horizon, pour un jour donné, on calcule la longitude du Soleil pour ledit jour, & on prend sa distance à l'Équinoxe; cette distance s'appelle *le Bouja*, & sert d'argument pour trouver, avec le secours de la Table précédente, la différence du jour proposé, avec le jour de l'Équinoxe.

Si l'argument est moindre qu'un signe, on calcule la partie proportionnelle; en prenant 48 minutes pour différence de 0 signe à un signe. Et si l'argument est un signe juste, on prend 48 minutes, on ajoute cette différence à 30 heures, depuis le 12 Mars Indien jusqu'au 12 Septembre; on la soustrait, au contraire, depuis le 12 Septembre jusqu'au 12 Mars, lorsque l'ombre du bâton (Gnomon) est tournée du côté du nord; car si l'ombre du bâton étoit tournée au sud, ce seroit tout le contraire.

Si l'argument est de deux signes, on ajoute ensemble les deux différences qui répondent à 1<sup>e</sup> & à 2<sup>e</sup>, & si l'argument est entre le premier & le second signe, on calcule la partie proportionnelle, en prenant  $38\frac{2}{3}$  pour différence du second signe, & on ajoute cette partie proportionnelle à 48 minutes; on opère de même pour trois signes.

Les observations des Brames se réduisent à ce que nous venons de voir; cette opération leur est indispensable, puisqu'elle entre dans le calcul des Éclipses de Soleil & de Lune.

Par exemple, dans l'Éclipse du 17 Octobre 1762, dont nous donnerons le calcul ci-après, le vrai temps de la conjonction de la Lune au Soleil, selon les Tables Indiennes, fut à 21<sup>h</sup> 48' 30", à compter du lever du Soleil; la longitude du Soleil, & celle de la Lune étoient alors de 6<sup>e</sup> 22<sup>d</sup> 34' 59"; la distance du Soleil à l'équinoxe, le plus proche est donc 22<sup>d</sup> 34' 59". Je dis, un signe ou 30 degrés est à 48 minutes, comme 22<sup>d</sup> 34' 59", sont à un quatrième terme qui sera 36' 8": ôtant ce quatrième terme de 30 heures qui expriment la durée du jour de l'équinoxe, on aura 29<sup>h</sup> 23' 52" pour la demeure du Soleil sur l'horizon de Tirvalour, le 17 d'Octobre.

Ce que je viens de dire que les Brames avoient pratiqué pour Tirvalour, ils l'ont fait pour un grand nombre d'autres villes de l'Inde. La Table suivante indique quelques-unes de ces villes, avec la longueur de l'ombre du gnomon, telles qu'elles m'ont été communiquées par le Brame établi à Tirvalour; la longueur du gnomon étant supposée de 12 doigts ou 720 parties.

	Doigt.
Maduré . . . . .	2 $\frac{1}{60}$ .
Tirvalour . . . . .	2,24.
Cangivarou . . . . .	2,52.
Calesti . . . . .	3,00.
Sericeylam . . . . .	3,30.
Ouchilipatnam . . . . .	5,20.

Il seroit à souhaiter qu'on pût recueillir un grand nombre

de ces observations; ce seroit sans doute un bon moyen, en y joignant de bons itinéraires, de faire une Carte de l'Indostan, meilleure que tout ce que nous avons encore sur ce pays; car, de s'en rapporter uniquement aux Itinéraires, pour un aussi vaste pays que l'Indostan, & où cent lieues ne sont, pour ainsi dire, qu'un point dans une ligne, il ne faudroit pas que je fusse au fait de la façon dont on estime les Itinéraires, pour y ajouter foi. Je crois être en état d'avancer qu'il n'a pas encore paru une Carte exacte de l'Inde. Où pourrions-nous en effet trouver cette Carte? Dans Strabon & dans Ptolémée: écoutons ce que Strabon nous dit au sujet de la connoissance que les Romains avoient alors de l'Inde.

« L'Inde, dit Strabon, dans l'argument du *livre XV de sa Géographie*, est fort loin d'ici, & peu de Romains l'ont vue; » ceux qui y ont été n'en ont vu qu'une partie, & rapportent » presque tout par ouï-dire; ce qu'ils ont vu, ils ne l'ont vu » qu'en courant & à la façon des militaires. Par cette raison, » ils ne rapportent pas la même chose des mêmes lieux, quoi- » qu'ils aient écrit sur l'Inde, comme sur des choses vues & » examinées avec soin. Il y en a d'autres, continue Strabon, » qui pour s'être trouvés dans la même expédition, tels que » ceux qui ont accompagné Alexandre dans sa conquête de » l'Inde; n'en sont pas moins contradictoires dans les faits qu'ils rapportent ».

L'Inde étoit donc fort mal connue du temps de Strabon; & se persuadera-t-on que Ptolémée la connût bien mieux?

La carte de l'Inde de Guillaume de l'Isle, publiée en 1705, est, sans nulle difficulté, la meilleure qui eût encore paru. Depuis ce célèbre Géographe, la Géographie n'a fait aucuns progrès dans cette partie.

Les dernières guerres de l'Indostan, commencées sous M. Dupleix, nous ont, à la vérité, procuré des Cartes géographiques de quelques parties de l'Inde; mais je doute que ces cartes soient plus exactes que celle de Guillaume de l'Isle: j'ai vu à Pondichéry une de ces cartes qui avoit été faite sur des Mémoires & Journaux qu'avoit procurés l'expédition,

envoyée dans le Décan, par M. Dupleix. Cette carte avoit été faite dans le goût de celles dont parle Strabon. J'étois sur le point de me procurer une copie de celle dont je parle : je crus inutile de me charger d'un pareil ouvrage pour le montrer en France, lorsque j'eus découvert les fondemens qui avoient servi à construire cette carte. Je fus instruit de fort bonne part, que lorsque les différens points marqués dans le Journal, & ceux sus par des ouï-dire (comme parle Strabon) furent placés, il resta vers le milieu de la carte un grand espace vide à remplir, qu'on ne put boucher faute de matériaux ; il auroit fallu, pour le faire, une province aussi grande que la Picardie ou la Normandie. L'auteur qui ne s'attendoit pas à cela, fut obligé de faire prêter les points de sa carte, & d'étendre leur distance respective. C'est donc de notre temps, à peu-près comme du temps de Strabon ; & peut-on se figurer qu'une carte de l'Inde, faite par les itinéraires, soit bonne, quand on fait la manière dont on compte ces itinéraires ?

On est assis, & le plus souvent couché dans son palanquin, & porté par des Bouées, qui tantôt vont vite, tantôt lentement, & se reposent de temps en temps : on suppose cependant que ces Bouées font un certain nombre de cosSES par heure.

Lorsqu'on se met en route on s'endort bientôt, sur-tout si c'est l'après-dinée, car rien n'y porte davantage que la chaleur du pays, souvent aidée & favorisée du repas & du mouvement du palanquin ; on croit, malgré cela, savoir, lorsqu'on est arrivé, la quantité de cosSES que l'on a faits, soit par le moyen de sa montre, soit en s'en rapportant à ses Bouées, ou aux gens de l'endroit où on s'arrête ; mais tout cela peut-il donner une bonne distance respective ? Sans compter que les cosSES sont des mesures qui varient autant & plus que ne le font nos lieues, peut-on se flatter, au bout de quarante ou de cinquante journées de marche de cette espèce, d'avoir la position exacte des deux points extrêmes de la route ? C'est ainsi que fut faite la carte que je vis, qui alloit de Pondichéry à Aurengabad.

Je fais que l'on m'objectera que la carte de M. de l'Isle; dont je viens de parler, doit être sujette aux mêmes défauts à peu-près que cette carte que j'ai vue. Je ne peux pas disconvenir que M. de l'Isle a dû se servir de l'estime qu'il aura trouvée, ou dans les Voyageurs, ou qu'il aura eue par des correspondances dans l'Inde, &c. mais ce célèbre Géographe étoit doué d'une sagacité unique pour combiner ensemble les différens matériaux dont il vouloit composer une carte; il avoit des ressources que nous ne connoissons pas. Ce qu'il y a de vrai, c'est que sa carte de l'Inde, & celle de la côte de Coromandel, est encore la meilleure que je connoisse, malgré ses défauts. Je conseillerois donc de s'en tenir à cette carte, & d'en corriger les points à mesure qu'on en découvrira de défectueux.

Je n'entends parler ici que de l'intérieur de l'Inde: nous avons exactement le gisement de toutes les côtes de cette vaste péninsule, & la position géographique de presque tous les principaux points de ces côtes. Les cartes marines de M. d'Après font ce que je connois de plus correct en ce genre.

### *Remarques sur les Observations des Brames.*

Je trouve qu'il y auroit trois corrections à faire aux Observations des Brames si on vouloit les employer avec quelque succès.

La première vient de la fausse supposition qu'ils font; savoir que le Soleil, le jour de l'équinoxe, est au milieu du monde; ce qui n'est pas exactement vrai. Le Soleil n'est véritablement au milieu du monde, à l'instant de midi, pour un lieu donné, que lorsque l'équinoxe arrive à midi compté au Méridien du lieu donné: alors les corps ne font point d'ombre, là où est le Soleil.

Il est cependant vrai que l'erreur sur le moment où arrive l'équinoxe, en peut à peine causer une de 10 à 11 minutes dans la hauteur du Soleil; ce qui ne fait que trois lieues ou trois lieues & demie d'incertitude sur le lieu.

La seconde correction vient de la réfraction; mais elle



est presque insensible ici ; puisqu'elle va à peine à 45 secondes de degré pour les provinces septentrionales de l'Indostan : pour le Décan & les autres provinces méridionales de la Péninsule, la réfraction est au-dessous de 30 secondes.

La troisième correction seroit peut-être la plus considérable ; mais il est fort difficile de l'apprécier : elle consiste dans l'erreur de l'observation.

Il est certain que les Anciens trouvoient les ombres des corps, trop grandes de beaucoup. Il suffit, pour s'en convaincre, d'ouvrir Strabon ; on verra que les latitudes déduites des observations du gnomon, supposent toutes que l'on a observé les ombres trop grandes ; & cela provient, comme l'on sait, de ce qu'il est impossible de discerner le terme de l'ombre & de la lumière ; mais aussi les Anciens péchoient par le même excès dans toutes les observations, & ces observations donnent assez bien les différences en latitude. En rectifiant donc la latitude d'un des lieux observés, on peut avoir avec une précision assez approchée, & presque suffisante pour la Géographie, la position des autres points.

Voilà comme j'entends que les observations des Brames, faites dans l'Inde avec le gnomon, & recueillies en assez grand nombre, contribueroient à rectifier la carte de l'Inde.

C'est aussi de cette façon que j'ai établi la latitude des six villes dont le Brame de Tirvalour m'a donné les Observations que j'ai rapportées plus haut.

J'ai calculé premièrement la différence en latitude de ces villes, comme l'on voit ci-après :

Maduré.....	0 <sup>d</sup> 45' 59"
Tirvalour.....	2. 7. 35.
Cangivaron.....	0. 36. 3.
Calesti.....	2. 11. 26.
Sericeylam.....	7. 42. 8.
Ouchilipatnam.....	

J'ai pris ensuite Cangivaron pour exemple. Cette ville, de la dépendance du Carnate, est entre Pondichéry &

Madraspatnam, la distance à l'une & à l'autre de ces deux villes est très-connue, sur-tout depuis la dernière guerre. Les Ingénieurs qui ont servi dans cette guerre, m'ont unanimement assuré, que de Pondichéry à Cangivaron, on compte en droite ligne, dix-huit lieues; de Cangivaron à Madraspatnam, dix-sept; & qu'enfin de Cangivaron au bord de la mer, en ligne droite, on comptoit onze lieues & demie.

Ces distances respectives sont assez petites pour ne pas craindre des erreurs bien grandes; pour calculer la latitude de Cangivaron, d'après ces suppositions, on fera attention au gisement de la côte, parce que Madraspatnam & Pondichéry, quoique placés sur le bord de la mer, ne sont pas pour cela sous le même méridien. La côte à Pondichéry fait avec le méridien un angle de  $33^{\text{d}} 45'$  à l'est.

Ces principes une fois établis, je trouve que la distance de Pondichéry au pied de la perpendiculaire, tirée de Cangivaron au bord de la mer, est de  $41' \frac{4}{10}^{\text{cs}}$ ; l'angle à Pondichéry, entre Cangivaron & la Méridienne, de  $5^{\text{d}} 19' \frac{1}{2}$  à l'est.

## CANGIVARON.

La distance à l'Est de la Méridienne étoit de.....	0 <sup>d</sup>	5'	$\frac{7}{10}$
La distance à la perpendiculaire au nord, de.....	0.	53.	$\frac{8}{10}$
J'ai observé la latitude à Pondichéry, de.....	11.	56.	0.
y ajoutant.....	0.	53.	48.
On a pour la latitude de Cangivaron.....	12.	49.	48.
Selon M. de l'Isle.....	12.	56.	0.
Selon M. d'Anville.....	13.	0.	0.

## MADURÉ.

Selon l'observation des Brames.....	9.	56.	0.
Selon M. de l'Isle.....	9.	56.	0.
Selon M. d'Anville.....	9.	59.	0.

## TIRVALOUR.

Selon l'observation des Brames.....	10.	42.	13.
Selon M. de l'Isle.....	11.	0.	0.

La Carte

La Carte de M. de l'Isle est défectueuse en ce point, en ce qu'il met Tirvalour à l'ouest de Tranguebar; mais cette ville est à l'ouest de Negapatnam, c'est-à-dire, sept lieues environ plus au nord que Tranguebar. Je ne trouve point Tirvalour sur la Carte de M. d'Anville.

Selon M. Daprès, la latitude de Negapatnam est de  $10^{\text{d}} 30'$ ; Tirvalour est de quelques minutes plus nord que Negapatnam.

Cet accord est bien suffisant pour justifier ce que j'ai avancé plus haut, qu'on pourroit parvenir à rectifier la Carte de l'Indostan, si on pouvoit joindre à de bons Itinéraires, les observations de la longueur de l'ombre du gnomon, faites par les Brames dans les endroits où ils sont établis.

Les trois villes suivantes ont été calculées selon la même méthode; elles ne sont sur aucune de nos Cartes françaises, je n'ai par conséquent pu les comparer.

Calesty.....	$13^{\text{d}} 25' 51''$
Sericeylam.....	$15. 37. 17.$
Ouchilipatnam.....	$23. 19. 25. \frac{1}{2}$

*De la longueur de l'Année selon les Brames; de la division  
qu'ils assignent au jour Astronomique; des Mois  
& des Jours.*

Après avoir parlé de l'usage du gnomon chez les Brames, il me semble naturel de passer à la longueur de l'année, à la division du jour astronomique, des mois & des jours; c'est la seconde chose que j'envisage dans l'Astronomie Indienne.

L'année des Brames est solaire, & de  $365^{\text{j}} 15^{\text{h}} 31' 15''$ \*; ils comptent le jour astronomique d'un lever du Soleil à l'autre lever, & ils divisent cet intervalle en soixante parties qu'ils appellent *heures*; dans l'heure ils comptent soixante minutes, & dans la minute, soixante secondes ou *clins-d'œil*.

---

\* Je parle d'heures, de minutes & secondes Indiennes.

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

Ils nomment la minute, dans leur langue, *veinary*, & la seconde *taipare*. Donc les  $15^h 31' 15''$ , dont la longueur de l'année excède, selon les Brames, 365 jours, se réduisent à  $6^h 12' 30''$  Européennes; c'est ce que nous pouvons appeler l'année *fydérale des Brames*; mais parce que les Étoiles avancent, selon eux, de 54 secondes tous les ans, d'occident en orient, on trouve (en supposant encore avec eux le mouvement journalier du Soleil d'un degré) qu'il faut ôter  $21' 36''$ , pour avoir ce que nous appelons l'année *tropique* ou *équinoxiale* de  $365^j 5^h 50' 54''$ .

Cette détermination est de deux minutes seulement plus grande que celle que les Astronomes admettent aujourd'hui pour la longueur de l'année; mais elle est plus petite de  $4' \frac{1}{2}$ , ou environ, que celle d'Hipparque adoptée par Ptolémée, qui supposoit l'année beaucoup trop longue. Par conséquent les anciens Brames connoissoient la longueur de l'année solaire, beaucoup mieux que ne l'ont connue Hipparque & Ptolémée.

Les Brames partagent l'année, ou les  $365^j 15^h 31' 15''$ , dont elle est composée selon eux, en douze mois; de façon que le mois d'Avril, ou celui qui y répond, est le premier mois de l'année astronomique des Indiens.

Ces mois n'ont pas tous la même durée; le mois de Juin est le plus long de tous, & le mois de Décembre le plus court.

Juin a.....	$31^j 36^h 38'$
Décembre.....	$29. 20. 53.$
Ce qui fait de différence.....	$2. 15. 45.$

Cette différence suppose que les Astronomes qui les premiers ont travaillé à cette méthode Indienne, ont connu l'apogée & le périée du Soleil; c'est-à-dire, qu'ils ont remarqué que le Soleil retardoit son mouvement dans le mois de Juin, & qu'il l'accéléroit au contraire pendant le mois de Décembre; qu'il employoit par conséquent plus de temps à parcourir le signe des Gémeaux que celui du Sagittaire.

La longueur des autres mois est en proportion de celle des mois de Juin & de Décembre, ou comme le temps que le Soleil met à parcourir les autres signes du Zodiaque.

TABLE I.<sup>re</sup> *De la durée que les Brames donnent à chaque mois, & à chaque signe du Zodiaque.*

			J.	H.	M.	S.
Sittirey. ....	Avril. ....	Υ	30.	55.	32.	0.
Vayasey. ....	Mai. ....	Ϝ	31.	24.	12.	0.
Any. ....	Juin. ....	Η	31.	36.	38.	0.
Ady. ....	Juillet. ....	Ϛ	31.	28.	12.	0.
Avany. ....	Août. ....	Ω	31.	2.	10.	0.
Pivattassy. ....	Septembre. ....	ηϚ	30.	27.	22.	0.
Arbassy. ....	Octobre. ....	Ϡ	29.	54.	7.	0.
Cartiguey. ....	Novembre. ....	η	29.	30.	24.	0.
Margajy. ....	Décembre. ....	Ϡ	29.	20.	53.	0.
Tay. ....	Janvier. ....	Ϝ	29.	27.	16.	0.
Masey. ....	Février. ....	Ϡ	29.	48.	24.	0.
Pangouny. ....	Mars. ....	Ϡ	30.	20.	21.	15.
Durée des douze mois. ....			365.	15.	31.	15.

TABLE II. *De la somme des Mois complets pour trouver le commencement de chaque Mois.*

SIGNES.	M O I S.	J.	H.	M.	S.
♈	Avril.				
♉	Mai.....	30.	55.	32.	0.
♊	Juin.....	62.	19.	44.	0.
♋	Juillet.....	93.	56.	22.	0.
♌	Août.....	125.	24.	34.	0.
♍	Septembre.....	156.	26.	44.	0.
♎	Octobre.....	186.	54.	6.	0.
♏	Novembre.....	216.	48.	13.	0.
♐	Décembre.....	246.	18.	37.	0.
♑	Janvier.....	275.	39.	30.	0.
♒	Février.....	305.	6.	46.	0.
♓	Mars.....	334.	55.	10.	0.
♈	Avril.....	365.	15.	31.	15.

La semaine des Brame comprend sept jours; mais il faut remarquer que dans leur langue, ils n'ont point de termes pour exprimer le mot *Semaine*. Ils comptent les jours du mois par les sept Planètes; & d'une manière assez singulière; car ils commencent par Vénus, de Vénus ils passent à Saturne, de Saturne au Soleil, &c.

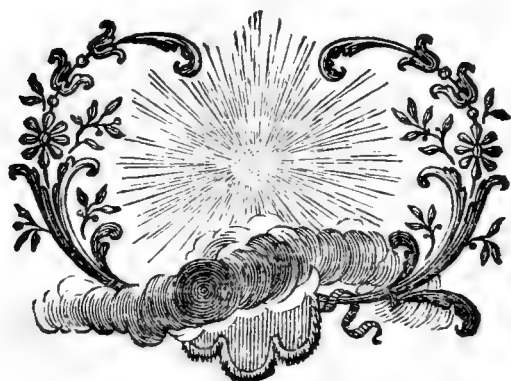
Ils supposent un zéro à Vénus, à Saturne l'unité, le nombre deux au Soleil, &c. comme l'on voit dans la Table suivante,

*TABLE des Jours de la Semaine, selon les Brames.*

Soucra-varam.....	Jour de Vénus....	Vendredi.....	6.
Sany-varam.....	Jour de Saturne...	Samedi.....	1.
Aditta-varam.....	Jour du Soleil....	Dimanche.....	2.
Soma-varam.....	Jour de la Lune...	Lundi.....	3.
Mangala-varam....	Jour de Mars.....	Mardi.....	4.
Bouta-varam.....	Jour de Mercure...	Mercredi.....	5.
Brahapati-varam...	Jour de Jupiter...	Jeudi.....	6.

Cette disposition est indispensable aux Brames pour leurs calculs, comme nous le verrons ci-après.

Selon les Interprètes dont je me suis servi, le jour de Vénus répond à notre vendredi.



SUITE DU PREMIER  
MÉMOIRE SUR L'INDE.

Par M. LE GENTIL.

*De la Durée du Monde & de ses différens âges selon  
les Brâmes ; de la Précession des Équinoxes, & des  
Époques qui servent à calculer les mouvemens du  
Soleil & de la Lune.*

VOICI ce que disent les Brames. Ils assurent que le monde doit durer 4 millions 320 mille ans, dont il y avoit déjà 3 millions 897 mille 870 ans d'écoulés en 1762. Ils partagent la durée du monde en quatre âges.

Le premier a commencé à la création, & a duré 1 million 728 mille ans. Ils l'appellent l'*âge d'innocence*.

Le second a duré un quart de moins que le premier; savoir, 1 million 296 mille ans.

Le troisième a duré un tiers de moins que le second; savoir 864 mille ans.

Enfin, le quatrième est celui dans lequel nous vivons; il ne durera que la moitié du troisième; savoir, 432 mille ans. Ils l'appellent l'*âge d'infortune*, ou *calyogan*, de *caly*, époque, & de *ougan*, infortune. En 1762, le quatrième âge ne comptoit encore que 4 mille 863 ans. Il lui restoit de durée 427 mille 137 ans.

Les Brames ont grand soin d'endormir les peuples avec ces préjugés, & de les insinuer aux enfans dans les écoles.

Ces différens âges sont rapportés de même dans M.<sup>rs</sup> l'abbé Bannier & le Malcrier ( 6.<sup>e</sup> vol. des Cérémonies Religieuses ) & dans la grammaire Tamulaire du P. Constance-Joseph



Beschio, Jésuite Italien, Missionnaire, imprimée à Tranquebar en 1728, de laquelle j'ai apporté un exemplaire.

Ces Auteurs traitent ces nombres de rêveries, de contes & de fables: ils ont certainement raison, quant à ce qui regarde la durée du monde; mais ils n'ont trouvé, ni les uns, ni les autres, la solution de ces nombres, qui servent cependant d'époque aux Brames, généralement pour tous leurs calculs astronomiques.

Cette prétendue durée du monde, & celle de ses différens âges, me parurent aussi, dans les commencemens, si grossièrement forgées, & les nombres tellement employés au hasard, que je fus quelque temps sans daigner me donner la peine d'examiner d'où ils pouvoient provenir. Le maître que j'avois pris me les rappelant souvent en faveur du système des Indiens sur leur antiquité, je me rappelai de mon côté que dans les calculs que j'avois faits sous ses yeux, des Éclipses du Soleil, il m'avoit fait supposer un mouvement dans les Étoiles, de 54 secondes par an; je soupçonnai dès-lors que tous ces âges pouvoient bien être un certain nombre de révolutions de l'équinoxe. Je ne fus pas long-temps à m'en assurer; je trouvai donc devant mon maître, que les quatre âges de la durée du monde, dont les Indiens se vantent avec tant d'emphase, ne sont que des périodes astronomiques qu'on peut faire remonter à l'infini; car si-tôt que les Brames supposent la précession des équinoxes de 54 secondes par an, la révolution du ciel entier sera de 24 mille ans. Or, les âges rapportés ci-dessus sont tous divisibles par 24000; d'où il suit que ce sont autant de périodes du mouvement des Étoiles en longitude.

Cette espèce de découverte ne parut pas faire grande impression sur mon maître, & encore moins sur un autre Brame; soit qu'il le fit exprès, soit qu'il fût dans le préjugé comme le reste du peuple. Ma mission, à Pondichéry, s'étant répandue dans une partie de l'Inde, & sur tout le long de la côte, ce Brame étoit venu de Tirvalour, proche de Karical, à trente lieues dans le sud de Pondichéry, pour me

voir, à ce qu'il me dit. Il s'imagina peut-être que je devois être une espèce de Brame dans ma nation; car chez eux, aucune famille que celle des Brames ne peut se mêler d'Astronomie. Les Indiens s'en rapportent avec une confiance aveugle à ce que leur disent ces Brames sur tout ce qui a rapport à cette science.

Ces Brames, comme je l'ai déjà dit, nous regardent, nous autres Européens, presque comme des Sauvages qui n'ont point ou presque point de connoissances; fiers de leur caste, de leur ancienneté & de leur savoir, ils ont pour les Européens beaucoup de mépris. Ils ont de la peine à se figurer que nous ayons des connoissances, des Universités, des Académies, comme ils en ont dans plusieurs villes, sur-tout à Bénarés dans le Bengale, la plus célèbre Académie de tout l'Indostan.

Malgré leur mépris pour nous, & la foible idée qu'ils ont de nos connoissances; quoique ce Brame qui étoit venu me rendre visite de si loin, témoignât la plus grande indifférence en voyant mes instrumens d'Astronomie; quoiqu'il parût très-peu flatté de l'explication que je lui donnai de l'usage du quart-de-cercle pour les observations Astronomiques, cependant ma prédiction, au sujet de la Comète qui parut en Août & Septembre 1769, le frappa; elle fit la même sensation sur l'esprit de tous les Indiens de Pondichéry. J'avois annoncé, dans le courant du mois de Septembre, que cette Comète, après qu'elle auroit cessé de paroître le matin vers la fin du mois, reparoitroit vers la mi-Octobre à sept heures du soir, & qu'on la verroit la queue tournée en sens opposé à celui qu'elle avoit lorsqu'on la voyoit en Septembre. Nous la revîmes en effet pendant deux à trois jours; mais les mauvais temps qui survinrent bientôt, m'empêchèrent de continuer de l'observer. Je reviens à nos périodes.

Outre celles dont je viens de parler, les Brames en ont encore deux autres; l'une de soixante ans, l'autre de trois mille six cents ans. Celle de soixante ans étant révolue, ils recommencent à compter: elle leur est d'un grand usage pour marquer les faits ou époques les plus mémorables de leur

leur histoire. Ils enveloppent le tout d'un voile si mystérieux, qu'il est impossible d'y rien entendre, si l'on n'a pas la clef des nombres. Ils le font sans doute pour en ôter la connoissance au vulgaire. Je vais en donner un exemple.

J'ai parlé d'un renouvellement de l'Astronomie dans l'Inde, sous un Roi qu'ils nomment *Salivaganam*; & que la mort de ce Prince tombe à l'an 78 de J. C. En voici le calcul:

Multipliez, disent-ils, 22 par 60, & vous aurez.....	1320.
Ajoutez-y l'année courante.....	22.
la somme sera.....	1342.
Ajoutez-y encore.....	349.
la somme sera.....	1691.

Donc, il y a seize cents quatre-vingt-onze ans (j'écrivois ceci à la fin de 1769) que *Salivaganam*, le restaurateur de l'Astronomie, est mort.

Il est aisé de voir que le produit de 22 par 60, indique qu'il s'est écoulé vingt-deux périodes de soixante ans, depuis la mort de *Salivaganam*; vingt-deux que l'on ajoute ensuite est l'année courante de la même période de soixante ans; mais d'où peut provenir le nombre 349? Dans ce nombre, on trouve cinq périodes de soixante ans, plus, la fraction  $\frac{49}{60}$ , qui indique que *Salivaganam* est mort la onzième année de la période de soixante ans. Les Brame ne pouvoient-ils donc pas donner une autre forme à leur calcul? Sans doute, ils le pouvoient; mais ils aiment à parler d'une manière mystérieuse & cachée; or il y a du mystère dans le nombre 349, & voici comment: prenez, disent-ils, le nombre 9; prenez ensuite le *vedam*, ajoutez-y le feu, vous aurez 349. Or il faut savoir qu'il y a quatre livres du *vedam*, &, selon eux, trois espèces de feu; il faut de plus être au fait de leur façon de ranger ces nombres.

Il faut donc prendre, selon leur méthode, 1.° le nombre....	9.
2.° le <i>vedam</i> désigné par le nombre.....	4
3.° le feu désigné par le nombre.....	3
La somme fait.....	349.
<i>Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.</i>	B b

Presque tous leurs calculs astronomiques sont ainsi voilés. Nous en verrons bientôt un exemple remarquable dans le calcul de la précession des équinoxes.

Le cycle de soixante ans des Brames, a cela de particulier ; qu'il divise sans fraction le nombre 24000. Ainsi, ce cycle est un partage de la grande période de 24 mille ans. Je remarque encore que la grande année de six cents ans, citée par l'historien Josèphe, & célébrée à si juste titre par Dominique Cassini, divise exactement & sans fraction la grande période Indienne de 24 mille ans. Ainsi, la grande année de Josèphe est un partage de la grande période de 24 mille ans.

Sur ce principe, la grande période de 24 mille ans, renferme quatre cents périodes ou cycles de soixante ans, & quarante périodes de six cents ans.

Les Étoiles avançant, selon les Brames, par année, de.....	54 <sup>S</sup> .
elles font en 60 ans .....	54 <sup>M</sup> .
& en 3600 ans .....	54 <sup>D</sup> .

Voilà le principe ou la source de ces périodes de soixante ans, & trois mille six cents ans. Les Brames prennent la première année pour un cycle; le second est soixante fois plus grand que le premier; le troisième soixante fois plus grand que le second.

C'est peut-être là aussi l'origine des périodes Chaldaïques de soixante ans, & de trois mille six cents ans que l'on trouve dans les fragmens qui nous ont été conservés, de Bérofe, auteur Chaldéen, qui vivoit environ trois siècles avant J. C.

Je sais bien que l'on m'objectera que les années de Bérofe ne peuvent être des années de trois cents soixante-cinq jours; que c'est le sentiment général de tous les plus sçavans Chronologistes; que moi-même, dans ma Dissertation sur la valeur du *Saros*, (*Mémoires de l'Académie, année 1756*) j'ai dit que le *Saros* de Bérofe ne pouvoit s'entendre de trois mille six cents années solaires, parce qu'il y auroit eu des Rois qui auroient régné plus de soixante mille ans solaires, sans compter les années qu'ils auroient vécu avant que d'avoir été Rois.

Me croyant aujourd'hui mieux instruit que je ne l'étois en 1756, lorsque je donnai mes remarques sur la valeur du *Saros*, je ne fais point difficulté de prendre un autre sentiment; je pense donc que la période de soixante ans de Bérose, & celle de trois mille six cents ans, sont les mêmes que celles dont se servent aujourd'hui les Brames, fondées sur des années solaires de trois cents soixante-cinq jours, & sur une précession des équinoxes de 54 secondes par an. Je place le reste au nombre des rêveries & des absurdités que l'esprit des hommes enfante si souvent.

Les Brames ne nous débitent pas des choses moins ridicules & moins absurdes, au sujet de leur Dieu Brama, que le fait Bérose au sujet des anciens Rois de Babylone. Les Brames disent que Brama doit vivre cent ans, & que les 4 millions 320 mille ans de la durée du monde, ne sont que la moitié d'un jour de ceux de *Brama*, dont trois cents soixante-cinq jours sont une année; ils comptent que ce *Brama* peut avoir actuellement une cinquantaine de ces espèces d'années.

Mettant toutes ces rêveries à part, il est hors de doute que dès le règne de *Salivaganam*, c'est-à-dire, dans le premier siècle de l'Ere Chrétienne, la période de soixante ans étoit en usage chez les Brames & les Philosophes de l'Inde; d'où l'on peut inférer qu'elle étoit connue long-temps avant; & comme cette période dérive du grand cycle de 24 mille ans, fondé sur le mouvement des étoiles de 54 secondes par an, on en peut conclure, avec assez de vraisemblance, que la précession des équinoxes est connue de temps immémorial dans l'Inde; & que les Sages de l'Inde s'en servoient déjà dans leurs calculs astronomiques, lorsqu'Hipparque, cent vingt-huit ans avant J. C. ne faisoit que la soupçonner; il y a plus, cette quantité de 54 secondes par an, s'accorde beaucoup mieux avec les observations de nos jours, que ne le font celles de Ptolémée, qui est venu près de trois siècles après Hipparque; & en effet, Ptolémée suppose (sans trop savoir pourquoi) que les étoiles font un degré en cent ans. Selon les Brames le

mouvement des étoiles n'est que d'un degré en soixante-six ans & huit mois ; nous le trouvons par nos observations, à très-peu près, d'un degré en soixante-dix ans.

Voyons actuellement comment les Bames établissent l'époque des mouvemens du Soleil & de la Lune, parce qu'ils supposent que ces astres sont partis tous les deux en même temps du même point.

Nous avons vu que les Étoiles avancent, selon ces Philosophes,

en un an, de..... 54'

en 60 ans de..... 54'

& en 3600 ans de..... 54'

La différence de 54 degrés à 360 degrés, ou de 3 mille 600 ans, à 24 mille, est 20 mille 400 ans ; ils partent de là pour leur époque Ils supposent donc que 20 mille 400 ans avant l'époque de l'âge d'infortune, (que nous appellerons comme eux dans nos calculs *Calyougam*) tous les astres étoient en conjonction dans le même point du Ciel. Or, ces 20 mille 400 ans & 3 mille 600, leur différence à 24 mille, sont divisibles par 600 ; donc lorsque les Bames disent que 20 mille 400 ans avant l'époque *Calyougam*, le Soleil & la Lune étoient en conjonction, ou répondoient au même point du Ciel, c'est comme s'ils disoient que trente-quatre révolutions de six cents ans, avant l'époque *Calyougam*, le Soleil & la Lune répondoient au même point du Ciel ; donc les Bames se servent (sans doute, sans le savoir) de la grande année ou période de six cents ans, dont on voit quelques vestiges dans Josèphe ; & comme la révolution entière des étoiles, supposée par eux de 24 mille ans, renferme un certain nombre de périodes de six cents ans, ne peut-on pas conjecturer que les anciens Chaldéens avoient eu connoissance du mouvement des étoiles en longitude, connu de nos jours, sous le nom de *précession des équinoxes* ; tous ces nombres ont un trop grand rapport les uns avec les autres, pour penser que le hasard y ait la moindre part ; ces connoissances auront vraisemblablement pris naissance dans quelque coin de l'Asie,

& se feront ensuite répandues de proche en proche; elles se feront peu-à-peu perdues, par une suite nécessaire des révolutions qui détruisent toutes les choses humaines. Les anciens Bracmanes ou Brames en auront conservé quelques vestiges; & comme ces Philosophes se sont toujours renfermés chez eux; qu'ils sont peu curieux d'éclairer les autres hommes, il n'est pas étonnant si ces secrets astronomiques ne sont pas sortis de leur famille, & si Hipparque & Ptolémée n'ont rien su de ces précieuses connoissances.

Qu'il me soit permis de conclure, qu'il y a bien de l'apparence que les Brames calculent aujourd'hui sur des mouvemens célestes, établis long-temps avant eux, soit par les Chaldéens, soit par les anciens Bracmanes, dont les Brames eux-mêmes semblent descendre; qu'il est pareillement très-vraisemblable que la longueur de l'année solaire est un peu plus courte aujourd'hui qu'elle n'étoit du temps des premiers Chaldéens, & la précession des équinoxes plus lente.

Cette idée me paroît d'autant moins déraisonnable, que je ne vois pas pourquoi les mouvemens célestes seroient toujours les mêmes; & quoique ceux dont se servent aujourd'hui les Brames, soient beaucoup plus exacts que ceux dont se servoient Hipparque & Ptolémée, ils ne représentent cependant pas assez exactement les phénomènes de nos jours; je veux dire les Éclipses. Les Brames s'en sont, sans doute, aperçus il y a déjà bien des années. En effet, nous verrons que lorsqu'ils ont extrait de leur époque les nombres qui servent à calculer la longitude moyenne (si on peut l'appeler ainsi) du Soleil & de la Lune, ils ôtent de ces nombres, une quantité constante, sans que j'aie pu savoir la raison de cette opération. Je conjecture que les motifs de religion, les seuls qui, comme je le dirai dans la suite, les font veiller aux observations des Éclipses du Soleil & de la Lune, auront été cause qu'ils se seront, à la longue, aperçus que leurs calculs ne cadroient point avec les apparences; & ils n'auront peut-être pas pu trouver d'autre moyen d'y remédier, qu'en ôtant de la longitude moyenne du Soleil & de la Lune, une certaine quantité qu'ils

ont crue capable de remédier au défaut de leurs Tables dans les temps des oppositions & des conjonctions de la Lune; car comme ils n'observent jamais la Lune hors de ces deux points, peu leur importe que leurs Tables soient en défaut ou non hors le temps des syzygies.

*TABLE des Années de l'ère Chrétienne, auxquelles répondent celles de la période de soixante ans des Brames, & de l'époque Calyougam.*

ANNÉES de J. C.	ANNÉES de l'Époque <i>Calyougam</i> .	ANNÉES de la Période de 60 ans.
498.....	.... 3600 ....	..... 0.
1760.....	.... 4862 ....	..... 2.
1761.....	.... 4863 ....	..... 3.
1762.....	.... 4864 ....	..... 4.
1763.....	.... 4865 ....	..... 5.
1764.....	.... 4866 ....	..... 6.
1765.....	.... 4867 ....	..... 7.
1766.....	.... 4868 ....	..... 8.
1767.....	.... 4869 ....	..... 9.
1768.....	.... 4870 ....	..... 10.
1769.....	.... 4871 ....	..... 11.
1770.....	.... 4872 ....	..... 12.

Il est nécessaire d'avertir que cette Table représente des années complètes; ce qu'il est important de savoir pour les calculs de la longitude du Soleil & de la Lune, & pour les Éclipses. Par exemple, pour calculer l'Éclipse de Lune du 23 Décembre 1768, il faut prendre l'année de l'époque *Calyougam*, qui répond à l'année 1767. C'est 4869; mais avant que d'en venir à ce calcul, il faut parler des signes du Zodiaque.



*Du Zodiaque & des vingt-sept Constellations ou Lieux  
de la Lune, comparés dans les douze Signes,  
selon les Brame.*

Les Brame connoissent le Zodiaque; ils le nomment *Sodi-mandalam*, qui veut dire *cercle des astres*, de *Mandalam*, cercle, & *Sodi* astres. Ils divisent ce cercle des astres en douze parties ou signes auxquels ils ont donné des noms, dont il seroit sans doute fort curieux d'avoir la vraie signification. J'ai bien fait tout ce qu'il m'a été possible pour me la procurer; mes interprètes me l'ont donnée, mais rien ne m'assure que ce soit la véritable origine de chaque mot.

Il est certain que la division du Zodiaque en douze signes, se perd dans l'antiquité; & en effet, cette division en douze parties a dû suivre de fort près la division de l'année en douze mois: on se persuade aisément que les premiers *Astro-nomes*, soit qu'on les suppose nés en Asie, soit qu'on les fasse sortir de l'Égypte, auront travaillé à reconnoître la route du Soleil & de la Lune dans le Ciel, en remarquant les étoiles dans le voisinage desquelles ces deux astres passaient; mais il n'est pas naturel de croire qu'ils se soient rencontrés dans l'Inde & en Égypte, à donner les mêmes noms aux mêmes étoiles; & comme le remarque très-bien le P. Palu, (*Mémoires de Trévoux*, Avril 1737, page 656) au sujet des constellations d'Orion, des Hyades & des Pléiades, les interprètes ont substitué au hasard des noms dont on ne voit point le rapport avec ceux de la langue originale.

Le Zodiaque des Brame paroît avoir beaucoup de rapport avec celui des Égyptiens, quant aux noms de signes, car il y a de la différence dans les constellations. Par rapport aux signes, je n'en ai remarqué de bien réelle, que dans le Capricorne que les Brame n'ont point. Le mot *Macaram* de la langue Brame, qui répond au mot *Capricorne*, signifie espèce de poisson.

Les Brame n'ont point le Sagittaire; c'est-à-dire, ce

monstre, moitié homme & moitié cheval, qui lance une flèche par le moyen d'un arc. Le mot *Dhanoulsou* veut simplement dire *une flèche*.

Pareillement ils n'ont point le Verseur-d'eau ; le mot *Coumbam* ne veut dire autre chose qu'une couche, ou vase à mettre de l'eau.

Enfin, *Tolam* auquel mes interprètes ont substitué le mot *Balance*, désigne une balance à la Romaine.

L'on voit donc que la différence entre le Zodiaque Indien ; & le Zodiaque Égyptien, n'est bien sensible que dans le signe du Capricorne.

*Noms des Signes du Zodiaque dans la langue des Brames.*

Mecham (espèce de chien marron).....	Bélier,
Urouchabam (Bœuf).....	Taureau.
Mitounam .....	Gémeaux.
Carcallakam .....	Écrevisse.
Simham.....	Lion.
Canny (fille).....	Vierge.
Tolam.....	Balance.
Vrouchikam.....	Scorpion.
Dhanoulsou .....	Flèche.
Maçaram .....	Espèce de Poisson.
Coumbam .....	Cruche.
Minam.....	Poisson.

J'aurois donné ces noms, écrits avec les caractères Tamouls, si j'avois pensé qu'ils pussent servir à mieux définir les signes de ce Zodiaque ; mais je ne le pense pas. Je me contenterai de les déposer dans la Bibliothèque du Roi.

Les Brames admettent, comme nous, deux espèces de Zodiaque ; l'un fixe & immobile, qui commence au premier point du Bélier ; l'autre avance tous les ans dans le Levant d'une certaine quantité, qu'ils estiment être de 54 secondes. La longitude du Soleil se compte toujours, selon les Brames, à partir

à partir du premier point du Bélier de ce second Zodiaque ; ou Zodiaque mobile.

Voyons la méthode de calculer la longitude de ce premier point.

La période de 3 mille 600 ans, produit du cycle de soixante ans par lui-même, comme je l'ai dit plus haut, retranchée de la grande révolution, supposée de 24 mille ans, donne l'époque 20 mille 400 ans ; ils supposent donc que 20 mille 400 ans avant le commencement de l'âge d'infortune, le Soleil & la Lune, non-seulement étoient dans le même point du ciel, comme nous avons vu, mais en outre, que le Zodiaque mobile a recommencé sa révolution ; c'est comme s'ils disoient que 20 mille 400 ans avant le commencement de l'âge d'infortune, la révolution de 24 mille ans a dû recommencer ; par conséquent la révolution où nous sommes a dû recommencer encore 3 mille 600 ans après la première année de l'âge d'infortune ; donc en 1763, il y avoit douze cents soixante-quatre ans que cette période avoit recommencé ; & par conséquent le premier degré du Zodiaque mobile des Brames, répondoit au premier point du Zodiaque fixe, l'an 3600 de l'époque *Calyougam* ; ce qui répond à l'an 498 de l'Ere Chrétienne, différence de 1264 à 1762.

Pour trouver actuellement la longitude du premier point du Zodiaque mobile pour une année donnée de l'époque *Calyougam*, rien n'est plus aisé ; mais le calcul des Brames est si enveloppé que (l'époque exceptée) on ne voit pas du premier coup-d'œil, d'où proviennent les autres nombres qu'ils emploient.

On demande la longitude du premier degré du signe du Bélier, mobile pour le 17 Octobre de l'Ere Chrétienne 1762. Cette année répond à l'année complète 4863 de l'époque *Calyougam*.

Rien n'est si simple que ce calcul, en suivant l'explication que je viens de donner. Il ne s'agit que de prendre la différence de l'époque *Calyougam* 4863 à 3600, & la

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

C c

multiplier par 54 secondes; or, cette différence est 1263 ans, qui multipliés par 54 secondes, donnent 68 mille 202 secondes,

qui font.....	18 <sup>d</sup> 56' 42"
ajoutez pour six mois.....	0. 0. 27.

vous aurez.....	18. 57. 9.
-----------------	------------

A la place de cette opération, qui est bien simple, voici ce que vous font faire les Bramez :

Époque <i>Calyougam</i> .....	4863.
ôtez .....	3179.

Il reste.....	1684.
ôtez encore, s'il est possible, comme ici.....	1413.

Il reste.....	271.
multipliés par .....	3.

il vient .....	813.
Ajoutez-y.....	2976.

la somme est.....	3789.
-------------------	-------

Divisez cette somme par 200, le quotient 18 exprimera les degrés; s'il y a du reste (comme ici 189) ils le font multiplier par 60; ce qui donne 11340; divisant encore ce produit par 200, on a les minutes; c'est-à-dire 56. S'il se trouve encore un reste (comme ici 140) ils le multiplient encore par 60, & divisant le produit 8400 par 200, ils trouvent 42 secondes. Ils ont donc 18<sup>d</sup> 56' 42". Multipliant après cela les six mois complets par 270 tierces, & divisant le produit par 60, ils trouvent 27 secondes à ajouter. Ils trouvent donc, par une longue suite d'opérations, 18<sup>d</sup> 57' 9", la même quantité que j'ai trouvée par une seule opération.

TABLE qui représente la forme du calcul de la précession  
des Équinoxes par les Brames.

Époque Calyougam .....	4863.	
ôtez .....	3179.	
Reste .....	1684.	
ôtez encore .....	1413.	
Reste .....	271.	
multipliés par .....	3.	
Produit, .....	813.	
Ajoutez .....	2976.	
Somme .....	3789.	$\frac{200.}{18^d}$
	200.	
	1789.	
	1600.	
	189.	
	60.	
	11340.	$\frac{200.}{56'}$
	1000.	
	1340.	
	1200.	
	140.	
	60.	
	8400.	$\frac{200.}{42''}$
	800.	
	400.	
	400.	
	270.	
	6.	
	1620.	$\frac{60.}{+ 27'}$
	120.	
	420.	
	420.	

J'ai dit que l'année où a recommencé, selon les Brames, la période de 24 mille ans, & celle de soixante ans, répond à l'an 498 de l'Ere Chrétienne. Or, la longitude de la première étoile du Bélier, l'an 498 de J. C. étoit, en supposant la précession de 50 secondes, de  $12^{\text{d}} 18' 10''$  : ces  $12^{\text{d}} 18' 10''$  expriment la quantité dont les Brames diffèrent d'avec nous pour la longitude du premier point de leur Zodiaque. Mais parce qu'ils font la précession de 4 secondes plus grande; savoir de 54 secondes; la différence, en 1762, aura été moindre qu'en 498, de  $1^{\text{d}} 24' 16''$  : elle deviendra nulle au bout de 9 mille 808 ans, ou à peu-près; après cette époque, cette même différence ira toujours en croissant jusqu'à ce qu'elle soit de six signes, ou de 180 degrés. Il faudra pour cela 162 mille ans.

Pour le calcul des éclipses de Soleil, les Brames se servent d'une Table intitulée, *Table de la valeur des douze signes*.

Cette Table est différente, selon les latitudes pour lesquelles on calcule; elle m'a paru construite avec art, & a pour base une autre Table intitulée, *de la valeur des douze signes pour le milieu du monde*; c'est-à-dire, sous l'Équateur. Nous avons vu que le jour que le Soleil entroit dans l'équinoxe, les Brames supposoient que cet Astre étoit au milieu du monde.

TABLE I.<sup>re</sup>

*De la valeur des 12 Signes pour le milieu du monde.*

SIGNES.		Min.	Pour Tirvalour.
1.	γ	278.	— 24
2.	ϝ	299.	— 19
3.	II	323.	— 8
4.	☿	323.	+ 8
5.	♈	299.	+ 19
6.	♏	278.	+ 24
7.	♏	278.	+ 24
8.	♎	299.	+ 19
9.	♏	323.	+ 8
10.	♏	323.	— 8
11.	♏	299.	— 19
12.	♏	278.	— 24

Je n'ai pu savoir sur quels principes cette Table est fondée. Les Brames la tiennent sans doute de la même source d'où ils ont tiré leurs autres élémens. Nécessairement elle suppose l'obliquité de l'écliptique.

La différence de valeur du premier signe & du troisième est, dans cette Table, de 46 minutes d'heure Indienne, ou 18 minutes Européennes. Or, en supposant l'obliquité de l'écliptique, même de 25 degrés, je ne trouve la différence que de 16 minutes Européennes.

La Table précédente étant supposée, les Brames trouvent la valeur des douze signes pour une latitude donnée, en supposant encore la longueur de l'ombre du gnomon le jour de l'équinoxe, pour cette latitude.

C'est sur ces principes que la Table suivante pour la latitude de Tirvalour a été calculée. Je prends pour exemple Tirvalour, parce que je donne ci-après le calcul de l'éclipse

T A B L E I I.

*De la valeur des 12 Signes pour la latitude de Tirvalour.*

SIGNES.		Min.
1.	Υ	254
2.	Υ	280
3.	)(	315
4.	☿	331
5.	♈	318
6.	♏	302
7.	♏	302
8.	♏	318
9.	♏	331
10.	♏	315
11.	☿	280
12.	Υ	254

Cette Table n'est qu'une répétition de la première, dont on a ôté, & à laquelle on a ajouté, selon les titres, les quantités que l'on trouve à côté pour Tirvalour. Pour savoir actuellement d'où proviennent ces quantités, voici la façon dont les Brames les ont calculées.

J'ai dit qu'ils ont trouvé que la longueur de l'ombre du style pour Tirvalour, étoit, le jour de l'équinoxe, de deux doigts & 24 minutes; qu'ils multiplioient cette quantité par 20; & qu'ils en divisoient le produit par 60: que le quotient 48 étoit la différence ascensionnelle qu'ils cherchoient. Les Brames prennent la moitié de cette différence, ou 24 minutes; c'est ce qu'il faut ôter, selon eux, de la Table de la valeur des signes sous l'Équateur, pour avoir celle qui doit répondre à la latitude de Tirvalour, & au premier signe.



Pour le second signe, ils enseignent de prendre les  $\frac{4}{10}$  de la différence ascensionnelle 48 minutes; or, les  $\frac{4}{10}$  de 48 minutes sont  $19' \frac{2}{10}$ ; c'est la quantité qu'il faut ôter de celle qui répond à l'Équateur, pour avoir celle qui convient au parallèle de Tirvalour, & au second signe.

Enfin, pour le troisième signe ils enseignent de prendre le sixième de la différence ascensionnelle 48 minutes; or, le sixième de 48 minutes est 8 minutes; c'est la quantité qu'il faut ôter de la valeur déterminée sous l'équateur, pour avoir celle qui répond au parallèle de Tirvalour, & au troisième signe.

Ces quantités deviennent additives depuis le quatrième signe jusqu'au neuvième, après lesquels elles reprennent le signe négatif.

Les Brame, outre cette division du Zodiaque en douze signes, telle que nous venons de le voir, le partagent en vingt-sept parties, qu'ils appellent *constellations*, ou *lieux de la Lune*, comptés dans les douze signes; de façon que chaque signe du Zodiaque est composé de deux constellations & un quart de constellation. Divisez 360 degrés par 27 degrés, le quotient donnera  $13^d 20'$ ; or, le quart de  $13^d 20'$  est  $3^d 20'$ ; donc, deux fois  $13^d 20'$  &  $3^d 20'$ , font 30 degrés, ou un signe entier.

Il semble que les auteurs de cette façon de diviser le Zodiaque, aient eu intention d'en former deux, un pour la Lune, & l'autre pour le Soleil. Peut-être même la division du Zodiaque, ou plutôt l'origine des constellations du Zodiaque a-t-elle commencé de cette manière. Je serois très-porté à le croire. Le mouvement de la Lune est beaucoup plus sensible que celui du Soleil, ce qui me fait juger que ceux qui se seront les premiers appliqués à la recherche du mouvement des Astres auront commencé par le mouvement de la Lune. Ils auront remarqué les étoiles auxquelles elle paroïssoit répondre chaque jour; & comme après vingt-sept jours révolus, elle reparoïssoit encore à peu-près aux environs des mêmes étoiles, ces premiers Astronomes auront donné

des noms à ces étoiles, pour les reconnoître, & pour s'entendre entr'eux.

Ces vingt-sept constellations des Brames sont marquées dans le ciel par des étoiles, & c'est une des choses qui m'a paru la plus curieuse dans l'Astronomie Indienne, qui prouve en faveur de la grande ancienneté des constellations du Zodiaque; car on trouve ici une différence singulière entre les étoiles qui composent les vingt-sept constellations des Brames, & celles qui entrent dans les douze signes. Pour moi je crois qu'une partie du Zodiaque Égyptien a été composée sur ces vingt-sept constellations, & qu'on aura supprimé, par exemple, du Bélier les étoiles qui paroissent être trop éloignées du cours du Zodiaque, comme nous le verrons.

Ces vingt-sept constellations des Brames, ou *lieux de la Lune que l'on compte dans les douze signes*, pour me servir de leurs termes, ont chacune un nom particulier dont je n'ai pu savoir la signification; mais que je rapporterai tel qu'il m'a été donné.

Je passai plusieurs soirées à reconnoître ces constellations. La singularité que je remarquai dans le signe du Bélier, me fit redoubler d'attention pour les autres; il m'en manquoit dix à douze; les mauvais temps me surprirent au milieu de mes veilles; je tombai malade. Lorsque je devins convalescent mon Brame s'en étoit allé, je partis de mon côté.

Il est vrai qu'il me laissa les configurations, si on peut les appeler ainsi, de ces constellations, leur nom, & le nombre d'étoiles que renferme chacune en particulier; malgré cela je ne peux pas assurer les avoir bien reconnues, parce que beaucoup de ces constellations, comme on le remarquera, sortent de notre Zodiaque: les configurations, d'ailleurs, ne sont pas assez ressemblantes, comme on peut voir dans la figure.

## TABLE des vingt-sept Constellations des Brames.

I.

*Affoupati*, six Étoiles.

Cette constellation est désignée par six Étoiles, savoir, les trois de la tête du Bélier, deux du Triangle ( $\alpha\beta$ ) & la Luifante du pied austral d'Andromède ( $\gamma$ ), *fig. 1.*

I I.

*Barany*, trois Étoiles.

Cette constellation est désignée par trois Étoiles; ce sont les trois principales de la Mouche, très-visibles à la vue simple, *fig. 2.*

I I I.

*Cartiguy*, sept Étoiles.

Cette constellation est composée de sept Étoiles; ce sont les Pléiades, *figure 3.*

I V.

*Rohany*, cinq Étoiles.

Cette constellation est désignée par cinq Étoiles; ce sont les Hyades, *figure 4.*

V.

*Mroucasricham*, trois Étoiles.

Cette constellation est désignée par trois Étoiles très-visibles, au nord

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

des trois de la ceinture d'Orion; ce sont les trois dans le cou d'Orion, *figure 5.*

V I.

*Tirouvadirey*, une Étoile.

Cette constellation n'a qu'une Étoile; c'est  $\alpha$  d'Orion, *fig. 6.*

V I I.

*Pounarpoussam*, six Étoiles.

Cette constellation est désignée par six Étoiles; je crois que ce sont les étoiles des Gémeaux  $\xi\gamma\mu\nu$ , & l'étoile  $\eta$  qui n'est d'aucune constellation, & qui est très-voisine de l'Écliptique, *fig. 7.*

V I I I.

*Poussam*, cinq Étoiles.

Cette constellation est désignée par cinq Étoiles; je crois que ce sont les étoiles  $\tau\iota\delta\zeta\epsilon$ , des Gémeaux, *fig. 8.*

I X.

*Ahiliam*, quatre Étoiles.

Cette constellation est désignée par quatre Étoiles qui forment un carré long; je crois que ce sont les deux têtes des Gémeaux, & les deux de la tête du Lion  $\mu$  &  $\epsilon$ , *figure 9.*

D d

## Suite des vingt-sept Constellations.

X.

*Makam*, quatre Étoiles.

Cette constellation est désignée par quatre Étoiles en zig-zag; je crois que ce sont les quatre de la crinière du Lion  $\alpha \gamma \zeta$ , fig. 10.

X I.

*Pouram*, deux Étoiles.

X I I.

*Outram*, deux Étoiles.

Ces deux constellations sont désignées par quatre Étoiles qui forment un carré long, dont deux appartiennent à la XI.<sup>e</sup> constellation, & les deux autres à celle-ci; je crois que ce sont  $\beta \delta \theta$  du Lion, fig. 11.

X I I I.

*Affam*, beaucoup d'Étoiles.

Cette constellation est désignée par un paquet d'Étoiles en forme de triangle isocèle, ou de pyramide; il y a bien de l'apparence que c'est a gerbe de blé, autrement chevelure de *Berenice*, fig. 12.

X I V.

*Sittirey*, deux Étoiles.

Cette constellation n'a que deux Étoiles; je crois que c'est  $\epsilon$  &  $\delta$  de la Vierge, fig. 13.

X V.

*Svady*, une Étoile.

Cette constellation n'a qu'une Étoile; je crois que c'est l'épi de la Vierge, fig. 14.

X V I.

*Vissakam*, douze Étoiles.

Cette constellation est désignée par douze Étoiles; mais je n'ai pu la reconnoître, malgré la configuration que j'en ai, fig. 15.

Il y a bien apparence que ces Étoiles, pour la plupart, sont de la Balance; peut-être quelques-unes sont-elles hors de ce signe: en ce cas, il est bien difficile de deviner, ou plutôt d'estimer laquelle, entre plusieurs Étoiles, dont on n'a ni la grandeur, ni la configuration exacte, est celle qu'il faut choisir.

X V I I.

*Anoucham*, six Étoiles.

Cette constellation a six Étoiles, qui sont du Scorpion; malgré cela, & ma configuration, je n'ai pu les reconnoître, fig. 16.

X V I I I.

*Quettey*, quatre Étoiles.

Cette constellation est désignée par quatre Étoiles; ce sont, à ce que

Suite des *vingt-sept Constellations.*

je conjecture,  $\epsilon\mu\zeta$  de la queue du Scorpion, & une autre au-dessous; elles sont fort près toutes les quatre & dans la même ligne droite, *fig.* 17.

X I X.

*Moulam*, quatre Étoiles.

Cette constellation est désignée par quatre Étoiles; ce sont les quatre de l'extrémité de la queue du Scorpion,  $\iota\chi\lambda\nu$ , *fig.* 18.

X X.

*Poussadam*, deux Étoiles.

X X I.

*Outradam*, deux Étoiles.

Ces deux constellations sont désignées par quatre Étoiles qui forment un carré long, dont deux appartiennent à la vingtième constellation, & les deux autres à la vingt-unième; je crois que ce sont  $\chi$  d'Antinoüs &  $\alpha$  du Capricorne, d'une part;  $\zeta\mu$  du Sagittaire, de l'autre part, *fig.* 19.

X X I I.

*Tiruwonam*, trois Étoiles.

La vingt-deuxième constellation est désignée par trois Étoiles que je n'aurois pas soupçonnées; ce sont les trois étoiles de l'Aigle, *fig.* 20.

X X I I I.

*Avouttam*, plusieurs Étoiles.

Cette constellation est désignée par plusieurs Étoiles; ce sont celles qui composent le Dauphin, *fig.* 21.

X X I V.

*Chatayam*, une Étoile.

Cette constellation est un paquet de plusieurs Étoiles qui forment à la vue simple une nébuleuse que l'on trouve en menant une ligne de la dernière de la tête du Dauphin ( $\nu$ ) à l'étoile  $\alpha$  de Pégase, un peu au nord de cette ligne, à côté de deux autres Étoiles, & un peu plus près des Étoiles du Dauphin que de celles de Pégase, *fig.* 22.

X X V.

*Pourattady*, deux Étoiles.

X X V I.

*Outrettady*, deux Étoiles.

Ces deux constellations sont désignées par quatre Étoiles qui forment un grand carré;  $\alpha$  &  $\beta$  de Pégase, pour la vingt-cinquième;  $\alpha$  d'Andromède &  $\gamma$  de Pégase pour celle-ci, *fig.* 23.

## Suite des vingt-sept Constellations.

## X X V I I.

*Rebady*, plusieurs Étoiles.

Cette constellation est désignée par une espèce d'arc qu'ils imaginent dans le ciel; c'est ce que nous

nommons le lien des Poissons; de façon cependant que la principale, marquée  $\alpha$ , les deux précédentes  $\xi$ ,  $\nu$  &  $\sigma$ , ne sont point comprises dans cette vingt-septième constellation, *figure 24.*

Je ne sache pas que nous connoissons rien de plus ancien que ces vingt-sept constellations; je le repète, la division du Zodiaque, en douze signes, n'est vraisemblablement venue qu'après celle-là. Il est certain que la Lune faisant treize fois & demie environ le tour du Zodiaque, contre le Soleil une fois, il aura été bien plus facile aux premiers Astronomes de reconnoître son mouvement, que celui du Soleil; pour cela ils se seront servis d'alignement pour se reconnoître; & comme parmi les Étoiles du Zodiaque, il s'en trouve de fort petites, qui sont à peine sensibles à la vue, ils en ont été chercher d'autres aux environs qui fussent plus apparentes. De plus, ces premières observations se faisant, comme je viens de le dire, par des alignemens; il est encore certain qu'en se servant d'Étoiles un peu plus éloignées, ils mesuroient le mouvement de la Lune avec plus de précision.

C'est sans doute la raison pour laquelle je ne trouve aucune des Étoiles du Verseau & des Poissons (*je pourrais peut-être ajouter du Cancer*) parmi les vingt-sept constellations des Brame; ils n'ont employé que les plus apparentes du lien des Poissons, lesquelles forment une espèce de pied de Bœuf, & sont allés chercher plus loin des Étoiles plus apparentes pour y comparer la Lune; & ces Étoiles sont celles de l'Aigle, du Dauphin, de Pégase & d'Andromède; de sorte que leur Zodiaque commence à ce que nous appelons *la Tête du Bélier, le Triangle & la Tête d'Andromède*, & finit, à peu de chose près, à cette dernière constellation.

On peut conjecturer, par ce que je viens de dire du Zodiaque des Indiens, & de leurs vingt-sept constellations,

que ce Zodiaque est beaucoup plus ancien que le Zodiaque Égyptien ; & en effet, prenons, pour le faire voir, le signe du Bélier ; ce signe est composé, comme les autres, de deux constellations & un quart. Il comprend non-seulement les trois étoiles de la tête du Bélier Égyptien & Grec, mais encore celles qui sont au nord de ces trois étoiles, c'est-à-dire la Mouche, deux du triangle, & le pied méridional d'Andromède ; ces trois constellations sont tout-à-fait modernes, comme l'on fait : il y a donc bien de l'apparence que dans le temps où les Sciences passèrent de l'orient de l'Asie dans l'occident, les Astronomes de ce temps auront réformé le Zodiaque qu'ils avoient reçu des Orientaux, c'est-à-dire qu'ils auront retranché des signes du Zodiaque les étoiles qui s'éloignoient un peu trop du cours des Planètes, comme dans cet exemple, toutes les étoiles au nord de la tête du Bélier : ces étoiles une fois abandonnées seront restées pendant long-temps sans être classées, jusqu'à ce que les Grecs, peuple très-nouveau, aient paru sur la scène du monde, & que la folie les ait pris de vouloir que la postérité lût dans le ciel l'histoire de leurs principaux Héros, &c.

J'ai cherché les raisons qui ont pu déterminer les premiers Astronomes à faire entrer dans leur signe du Bélier, par exemple, les Étoiles qui sont aujourd'hui partie du triangle & de la constellation d'Andromède ; outre ce que j'en ai déjà dit, voici de plus ce que j'ai trouvé.

En supposant le mouvement des Étoiles en ascension droite, tel que les Astronomes modernes l'admettent ; la première Étoile du Bélier, & la luisante du pied austral d'Andromède, sont les seules Étoiles remarquables de cette partie du Ciel qui aient pu se trouver en même temps dans les points équinoxiaux ; en effet, je trouve dix-huit cents trente ans pour la première du Bélier, & dix-huit cents soixante pour le pied d'Andromède ; la différence ne va pas à un demi-degré. Il est vrai que ces deux Étoiles diffèrent de 11 degrés en longitude ; mais dans les premières années de l'Astronomie, dans l'enfance de cette Science, on ne distinguoit pas la longitude de l'ascension droite, &

on ne faisoit attention qu'au mouvement diurne, ou en ascension droite.

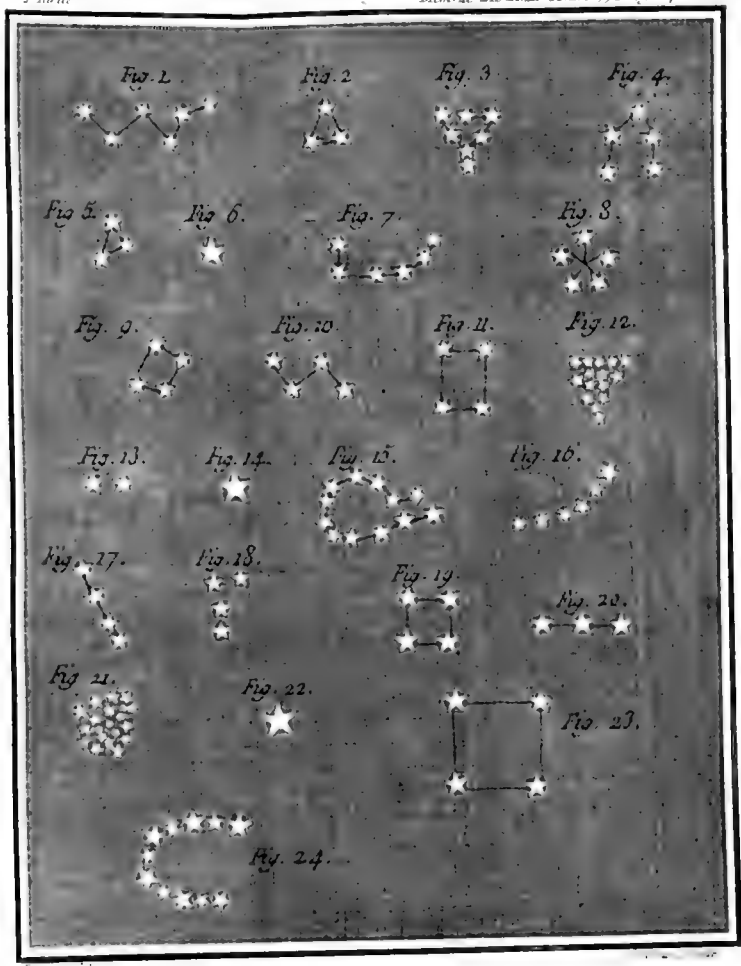
Je donne ici une Planche qui représente les figures des vingt-sept constellations des Brames : j'ai fait dessiner & graver ces figures, exactement conformes & pareilles pour la grandeur, à celles que je conserve, de la propre main de mon Interprète; on y remarquera une chose fort singulière, ce sont des lignes tirées d'une Étoile à l'autre; ces lignes sont de même dans l'original; c'est, à mon avis, une preuve que les premières Observations se faisoient par des alignemens.

Il paroîtra d'abord fort extraordinaire que des observations, en apparence si grossières, aient donné la précision que nous admirons dans les Éléments d'Astronomie des Anciens, & que les Brames nous ont conservés; c'est encore une preuve de l'ancienneté de l'Astronomie: la grande distance ou le grand intervalle qui se sera écoulé entre les observations de comparaison, aura suppléé au défaut des Instrumens qui contribuent, de nos jours, à la justesse des observations. J'ajouterai encore que les Pléiades sont ici au nombre de sept, quoiqu'il n'y en ait véritablement que six de visibles aujourd'hui à la vue simple.









## OBSERVATIONS

SUR

## L'ANIMAL QUI PORTE LE MUSC.

*Et sur ses rapports avec les autres Animaux.*

Par M. DAUBENTON.

L'ODEUR forte & pénétrante du Musc est trop sensible, pour que ce parfum n'ait pas été remarqué en même-temps que l'animal qui le porte; aussi leur a-t-on donné à tous les deux le même nom de *Musc*. Cet animal se trouve dans les royaumes de Boutan & de Tunquin, à la Chine & dans la Tartarie Chinoise, & même dans quelques parties de la Tartarie Moscovite. Je crois que de temps immémorial il a été recherché par les habitans de ces contrées, parce que sa chair est très-bonne à manger, & que son parfum a toujours dû faire un objet de commerce. Mais on ne sait pas en quel temps le Musc a commencé à être connu en Europe, & même dans la partie occidentale de l'Asie. Il ne paroît pas que les Grecs, ni les Romains aient eu connoissance de ce parfum, puisqu'Aristote ni Pline n'en ont fait aucune mention dans leurs Écrits. Les auteurs Arabes sont les premiers qui en aient parlé. Sérapion donna une description du Porte-musc dans le huitième siècle.

Depuis ce temps, déjà fort éloigné, un grand nombre d'Auteurs ont décrit cet animal : on l'a comparé pendant plus de dix siècles au Chevreuil, au Bouc, au Cerf, au Chamois, à la Gazelle, au Chevrotain, sans pouvoir déterminer son genre, & assigner sa vraie place parmi les autres quadrupèdes.

Nous serions encore dans la même incertitude, & il y a toute apparence que de long-temps on n'auroit pu éclaircir ce point intéressant de l'Histoire Naturelle, si M. le Duc de

la Vrillière n'avoit eu la bonté de nous faire voir le Porte-musc vivant. Jamais on n'en avoit amené en France. C'est un présent qui méritoit, par sa rareté, d'être envoyé du fond de l'Asie, & d'être offert à un Ministre qui favorise toutes les Sciences, & l'Histoire Naturelle en particulier, autant par sa propre inclination, que par son zèle pour l'utilité publique.

J'ai vu, au mois de Juillet, le Porte-musc (*fig. 1*) dans un parc de M. le duc de la Vrillière, à Versailles. L'odeur du musc qui se répandoit de temps en temps, suivant la direction du vent, autour de l'enceinte où étoit le Porte-musc, auroit pu me servir de guide pour trouver cet animal. Dès que je l'aperçus, je reconnus dans sa figure & dans ses attitudes beaucoup de ressemblance avec le Chevreuil, la Gazelle & le Chevrotain, aucun animal de ce genre n'a plus de légèreté, de souplesse & de vivacité dans les mouvemens que le Porte-musc. Il ressemble encore aux animaux ruminans en ce qu'il a les pieds fourchus, & qu'il manque de dents incisives à la mâchoire supérieure. Mais on ne peut le comparer qu'au Chevrotain pour les deux défenses ou longues dents canines qui tiennent à la mâchoire du dessus, & sortent d'un pouce & demi au-dehors des lèvres.

La substance de ces dents est une sorte d'ivoire, comme celle des défenses du Babiroussa, & de plusieurs autres espèces d'animaux; mais les défenses du Porte-musc ont une forme très-particulière, elles ressemblent à de petits couteaux courbes, placés au-dessous de la gueule, & dirigés obliquement de haut en bas, & de devant en arrière; leur bord postérieur est tranchant. Quelques Auteurs ont comparé ces dents aux défenses du Sanglier, pour l'usage que le Porte-musc en peut faire; leur situation a fait aussi présumer qu'elles servent à couper des racines qui sont de la grosseur du doigt, & qui sont la principale nourriture du Porte-musc; mais je crois qu'il s'en sert à différens usages, suivant les circonstances où il se trouve, soit pour couper des racines, soit pour se soutenir dans des endroits où il ne peut pas trouver d'autres points

points d'appui; soit enfin pour se défendre ou pour attaquer. Plus on observe les mœurs des animaux, plus on les voit employer, dans le besoin, toutes les parties de leur corps qui peuvent leur servir.

Le Porte-musc n'a point de cornes; les oreilles sont longues, droites & très-mobiles; les deux dents blanches qui sortent de la gueule, & les renflemens qu'elles forment à la lèvre supérieure, donnent à la physionomie du Porte-musc, vu de face (*fig. 2*), un air singulier qui pourroit le faire distinguer de tout autre animal, à l'exception du Chevrotain.

Les couleurs du poil sont peu apparentes; au lieu de couleurs décidées, il n'y a que des teintes de brun, de fauve & de blanchâtre, qui semblent changer, lorsqu'on regarde l'animal sous différens points de vue, parce que les poils ne sont colorés en brun ou en fauve qu'à leur extrémité; le reste est blanc, & paroît plus ou moins à différens aspects. La teinte blanchâtre domine sur les poils les plus longs, parce qu'ils s'écartent davantage les uns des autres, & par conséquent laissent paroître plus de blanc: cette apparence de changement dans les couleurs du poil n'est pas particulière au Porte-musc, on la voit sur tous les animaux qui ont différentes couleurs sur un même poil; il y a du blanc & du noir sur les oreilles du Porte-musc, & une étoile blanche au milieu du front.

Cette étoile me paroît être une sorte de livrée qui disparaîtra lorsque l'animal sera plus âgé; car je ne l'ai pas vue sur deux peaux de Porte-musc qui m'ont été adressées pour le Cabinet d'Histoire Naturelle du Jardin du Roi, par M. le Monnier, Médecin du Roi, de la part de M.<sup>de</sup> la comtesse de Marfan; ces deux peaux ont été envoyées des Indes par M. l'abbé Gallois, qui a déjà rapporté plusieurs fois en ce pays-ci des choses curieuses & utiles, de la Chine & d'autres contrées de l'orient; les deux peaux, dont il s'agit, m'ont paru venir d'animaux adultes, l'un mâle & l'autre femelle; les teintes des couleurs du poil y sont plus foncées que sur le Porte-musc vivant que je viens de décrire. Il y a de plus,

sur la face inférieure du cou, deux bandes blanchâtres; larges d'environ un pouce, qui s'étendent irrégulièrement le long du cou, & qui forment une sorte d'ovale allongé, en se rejoignant en avant, sur la gorge, & en arrière entre les jambes de devant.

Le poil a près de trois pouces & demi sur quelques parties du corps; on l'a comparé à des tuyaux de plumes, parce qu'il est en partie creux; mais il étoit inutile de prendre un objet de comparaison si éloigné; ce poil ne me paroît pas différent de celui de plusieurs animaux ruminans.

Le musc est renfermé dans une poche placée sous le ventre, à l'endroit du nombril. Je n'ai vu sur le Porte-musc vivant que de petites éminences sur le milieu de son ventre: je n'ai pu les observer de près, parce que l'animal ne se laisse pas approcher, & qu'on ne pourroit pas le saisir sans risquer de le blesser: la poche du musc tient à l'une des peaux envoyées par M. l'abbé Gallois, mais cette poche est desséchée; il m'a paru que si elle étoit dans l'état naturel, elle auroit au moins un pouce & demi de diamètre. Il y a, dans le milieu un orifice très-sensible, dont j'ai tiré de la substance du musc, très-odorante & de couleur rousse. La poche est revêtue de poils blanchâtres, très-légèrement teints de fauve, sur-tout à la pointe. M. Gmelin ayant observé la situation sur deux mâles, rapporte dans le *IV.<sup>e</sup> vol. des Mém. de l'Académie Impériale de Pétersbourg*, que cette poche étoit placée au-devant, & un peu à droite du prépuce.

Le Porte-musc diffère de tout autre animal, par la poche qu'il a sous le ventre, & qui renferme le musc; cependant, quoique ce caractère soit unique par sa situation, il me paroît peu important pour l'Anatomie comparée; il ne contribue nullement à déterminer la place du Porte-musc parmi les Quadrupèdes, parce qu'il y a des substances odoriférantes qui viennent d'animaux très-différens du Porte-musc. Je pourrois citer beaucoup de ces animaux, car j'en ai décrit un grand nombre qui ont des poches, où il se fait une sécrétion de substances odoriférantes, solide ou liquide dans différentes

parties du corps, comme le dos du Pécari, le prépuce du Castor, le dessous de l'anus de la Civette, dont l'odeur a tant de rapport à celle du Musc, qu'on a donné à ce parfum le nom de Musc d'Afrique; cependant, il y a presque autant de différence entre la Civette & le Porte-musc, qu'entre un Chat & un Chevreuil.

Les caractères extérieurs du Porte-musc, qui indiquent ses rapports avec les autres Quadrupèdes, sont les pieds-fourchus, les deux longues dents canines, & les huit dents incisives de la mâchoire du dessus, sans qu'il y en ait dans celle du dessous. Par ces caractères, le Porte-musc ressemble plus au Chevrotain qu'à aucun autre animal; il en diffère, en ce qu'il est beaucoup plus grand, car il a plus d'un pied & demi de hauteur, prise depuis le bas des pieds du devant jusqu'au dessus des épaules, tandis que le Chevrotain n'a guère plus d'un demi-pied.

Les dents molaires du Porte-musc sont au nombre de six de chaque côté de chacune des mâchoires; le Chevrotain n'en a que quatre. Il y a aussi de grandes différences entre ces deux animaux, pour la forme des dents molaires & des couleurs du poil. La poche du Musc fait un caractère qui n'appartient qu'au Porte-musc mâle; la femelle n'a ni poche de musc, ni dents canines, suivant les observations de M. Gmelin, que j'ai déjà cité.

Le Porte-musc que j'ai vu vivant, paroît n'avoir point de queue. M. Gmelin a trouvé, sur trois individus de cette espèce, au lieu de queue, un petit prolongement charnu, long d'environ un pouce. La plupart des Auteurs qui ont décrit cet animal, & qui en ont donné la figure, ne font aucune mention de cette partie; mais d'autres ont fait représenter le Porte-musc avec une queue bien apparente, quoique fort courte. Grew dit qu'elle a deux pouces de longueur; mais il n'a pas observé si cette partie renfermoit des vertèbres.

Dans la description que M. Gmelin a faite du Porte-musc, les viscères m'ont paru ressemblans à ceux des animaux ruminans, sur-tout les quatre estomacs, dont le premier a trois

convexités, comme dans les animaux sauvages qui ruminent. Si l'on joint ce caractère à celui des deux dents canines dans la mâchoire du dessus, le Porte-musc ressemble plus, par ces deux caractères, au Cerf, qu'à aucun autre animal ruminant, excepté le Chevrotain, au cas qu'il rumine, comme il y a lieu de le croire.

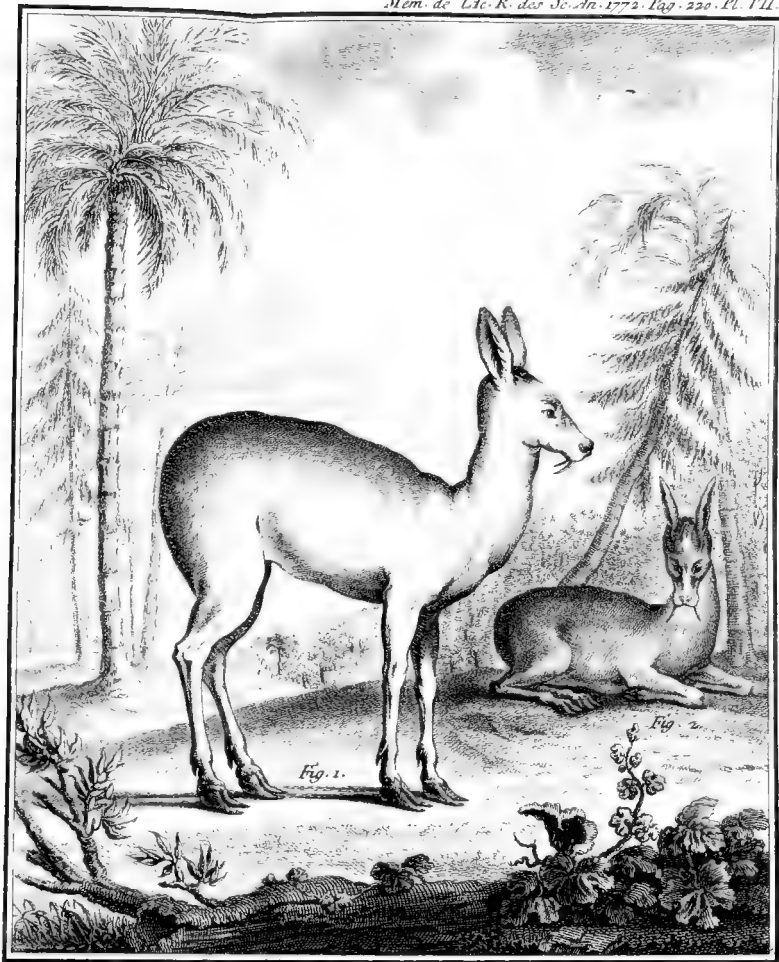
Ray dit qu'il est douteux que le Porte-musc rumine. Les gens qui soignent celui que j'ai décrit vivant, ne savent pas s'il rumine: je ne l'ai pas vu assez long-temps pour en juger par moi-même, mais je sais, par les observations de M. Gmelin, qu'il a les organes de la rumination, & je crois qu'on le verra ruminer. On saura aussi par la suite s'il produira du musc dans ce pays-ci. J'espère qu'il y vivra, parce qu'il est bien soigné, parce qu'il a résisté à la fatigue du transport, & que notre climat est au moins aussi bon que celui de la Tartarie Moscovite, vers le lac Baikal, autour duquel on trouve le Porte-musc, suivant le rapport de Corneille Lebrun & de M. Gmelin.

On ne fait pas assez de tentatives pour naturaliser, dans notre climat, des animaux étrangers & utiles, ou des races mieux conditionnées que celles que l'on a déjà. La Nature se prête à ces sortes de migrations d'animaux, comme aux transplantations des végétaux, lorsqu'on fait la ménager, en ne lui donnant pas de trop grands obstacles à surmonter, par rapport aux différences des climats, du sol & des alimens.









Fournier del.

y le Goussac Sculp.

Fig. 1. L'e Porte-Musc. Fig. 2. L'e Porte-Musc vu de Face.

---

SUITE DU PREMIER  
MÉMOIRE SUR L'INDE.

Par M. LE GENTIL.

*Méthode en usage parmi les Brames de la côte de  
Coromandel, pour calculer les Éclipses de Lune.*

CETTE méthode s'appelle *Vaquiam*, qui veut dire *nouveau*, dans la langue des Brames ; elle est en usage dans une grande partie de l'Inde. A Benares, dans le Bengale, les Brames emploient une autre méthode ; on la nomme, dans leur langue, *Sittandum*, c'est-à-dire, *ancien* : j'ai fait ce que j'ai pu pour me la procurer, mais inutilement.

Les Brames supposent dans leurs calculs, les années complètes, & les jours complets. Quand ils calculent le lieu du Soleil & de la Lune, ils le font toujours pour la fin de la journée, ou pour le moment du lever du Soleil du jour suivant.

Je prendrai pour exemple l'éclipse totale de Lune du 23 Décembre 1768, qui fut visible à Pondichéry, pendant toute sa durée ; & que j'observai avec beaucoup de soin, mais dont on n'a vu à Paris que la fin.

Les calculs que je rapporte sont faits avec le dernier scrupule, ils ont été refaits plusieurs fois ; je les ai toujours trouvés exactement conformes à une seconde, & seconde & demie près avec l'original, que j'ai de la main de mon interprète, qui l'a mis dans le plus grand détail & le plus grand ordre.

Ce calcul est renfermé dans seize opérations, comprises sous trois Sections. Je conserve les trois Sections ; mais je diminue le nombre des opérations, parce que j'ai vu qu'on le pouvoit faire, sans nuire à la clarté que j'ai voulu répandre dans cette méthode.

## SECTION PREMIÈRE.

*Pour trouver le Chouddhadinam.*

Les Brames entendent par le *Chouddhadinam*, les jours complets écoulés depuis l'époque *Calyougam*, jusqu'au temps proposé inclusivement; c'est ce qu'ils calculent en cette manière.

- 1.<sup>o</sup> *Trouver les années écoulées depuis l'époque Calyougam, jusqu'au commencement de l'année proposée; ainsi que l'année de la période de soixante ans.*

J'ai dit qu'en 1761 complet, il s'étoit écoulé, selon les Brames, 4 mille 863 ans de l'époque du quatrième âge; la différence des deux façons de compter, est 3102: cette différence doit toujours nous servir pour réduire nos années à la façon de compter des Brames, & elle est toujours additive.

L'année proposée pour l'Éclipse est 1768, ou 1767 complet. Y ajoutant 3102, on a 4869 pour l'année proposée, selon la façon de compter des Brames; ainsi l'Éclipse est arrivée dans l'année courante 4870, qui répond à l'année courante de l'Ere Chrétienne 1768: on trouve ci-devant une Table toute faite, de cette réduction pour dix années; on peut étendre cette Table aussi loin qu'on le jugera nécessaire.

Pour savoir à quelle année de la période de soixante ans répond l'année 4869 de l'époque Calyougam, divisez ce nombre par 60, & sans avoir égard au quotient, remarquez le reste 9; ce nombre 9 indique que l'Éclipse est arrivée dans la dixième année de la période de soixante ans.

2.<sup>o</sup> *Trouver les Heures, Minutes & Secondes, écoulées depuis l'époque Calyougam, jusqu'au dernier moment de l'année proposée, lequel sera en même temps le commencement de l'année courante.*

Multipliez l'année complète.....	4869. 00 <sup>h</sup> 00' 00"
par la longueur de l'année solaire.....	365 <sup>j</sup> 15. 31. 15
le produit sera.....	1,778444. 30. 56. 15
ôtez-en la quantité constante.....	2. 8. 51. 15
le reste.....	1,778442. 22. 5. 00
sera le temps écoulé que l'on cherche.	

Divisez le nombre de jours par 7, il restera le nombre 1, qui exprime un jour complet; ce nombre répond, dans la Table des jours de la semaine, au Samedi; donc l'année suivante 4870, a commencé le Samedi 22<sup>h</sup> 5' 00" après le lever du Soleil, dans ledit jour de Samedi. Si l'on vouloit savoir quel jour de la semaine commencent les autres mois de l'année, il faut ajouter la valeur de ces mois prise dans la Table première, qu'on trouve ci-devant à l'article de la *longueur de l'année, &c.*

Par exemple, je veux savoir quel jour de la semaine a commencé le mois de Mai.

A l'instant du commencement du mois d'Avril.....	1 <sup>j</sup> 22 <sup>h</sup> 5'
j'ajoute la valeur de ce mois.....	30. 55. 32
la somme est.....	32. 17. 37

Divisant 32 par 7, le reste 4 indique que le mois de Mai a commencé par un Mardi.

Pour avoir le jour par où a dû commencer le mois de Juin, on se rappellera qu'il est resté 4<sup>j</sup> 17<sup>h</sup> 37' qui indiquent que le mois a commencé un Mardi 17<sup>h</sup> 37' après le lever du Soleil.

On écrira.....	4 <sup>j</sup> 17 <sup>h</sup> 37'
ensuite la durée de Mai de.....	31. 24. 12
la somme sera.....	35. 41. 49

Divisant 35 par 7, il ne reste rien; ce qui fait voir que le mois a commencé un vendredi 41<sup>h</sup> 49' après le lever du Soleil.

3.<sup>o</sup> *Trouver les Jours, Heures, Minutes & Secondes, écoulées depuis l'époque Calyougam, jusqu'au mois de Novembre complet de l'année courante 4870; ce qui sera aussi le commencement du mois de Décembre.*

Au nombre que l'on vient de trouver... 1,778442<sup>i</sup> 22<sup>h</sup> 5' 00"  
ajoutez la valeur des huit signes écoulés  
(vous la trouverez dans la Table seconde  
intitulée, *de la somme des mois*), vous  
aurez pour 8 signes, ou 8 mois..... 246. 18. 37. 00  
La somme est..... 1,778688. 40. 42. 00

C'est la quantité que l'on cherche; divisez actuellement le nombre des jours par 7, reste 2 : voyez dans la Table des jours de la semaine, le nombre 2 y répond au Dimanche; donc le mois de Décembre de l'année courante 4870, a commencé un Dimanche 40<sup>h</sup> 42' 00" après le lever du Soleil.

4.<sup>o</sup> *Trouver ce qu'il faut ajouter pour avoir le 12 de Décembre complet.*

Le mois de Décembre de l'année courante 4870 a commencé, comme nous l'avons dit, un Dimanche 40<sup>h</sup> 42' 00" après le lever du Soleil. Pour avoir le 12 complet au lever du Soleil, moment où commence le 13; prenez le complément de 40<sup>h</sup> 42' 00" à 60<sup>h</sup>, vous aurez 19<sup>h</sup> 18' 00".

à..... 1,778688<sup>i</sup> 40<sup>h</sup> 42' 00"  
ajoutez..... 12. 19. 18. 00  
& vous aurez..... 1,778701. 00. 00. 00

c'est ce que l'on appelle *Chouddhadinam*, jours purs, simples ou entiers de *Chouddha*, qui signifie purs, & *dinam* jours.

Dans

Dans cet exemple, j'ai supposé la réduction faite, de notre façon de compter, à celle des Brames; c'est-à-dire que j'ai supposé que l'Éclipse est arrivée le 12 du mois de Décembre Indien.

Pour trouver soi-même cette réduction, on sait que l'Éclipse est arrivée le 23 Décembre, & que le mois de Décembre a commencé chez les Indiens par un Dimanche.

Cherchez dans les Éphémérides, entre le 7 & le 14 de Décembre inclusivement, vous trouverez que le 11 fut un Dimanche; ajoutez un jour, parce que l'année fut bissextile selon notre façon de compter; donc, le 23 Décembre répond au 12 Indien.

## SECTION SECONDE.

### *Pour trouver le Dithy.*

Par le *dithy*, les Brames entendent l'âge de la Lune; or, toutes les opérations de cette seconde section mènent à connoître cet âge.

#### 1.<sup>o</sup> *Trouver le Souria-floutham, qui signifie mot-à-mot le lieu du Soleil.*

Il faut ici se rappeler quatre choses:

La première, que la longitude du Soleil se calcule toujours, selon cette méthode, pour le moment du lever de cet Astre.

La seconde, que cette même longitude se compte dans les constellations du Zodiaque, & non dans les signes du Zodiaque; c'est-à-dire, que pour calculer le lieu du Soleil, les Brames partent du premier point du Zodiaque mobile.

La troisième, que l'année astronomique des Brames commence à l'arrivée du Soleil dans la constellation du Bélier, le 1.<sup>er</sup> du mois d'Avril.

La quatrième, que les signes ont la même valeur que les mois, & les degrés la même que les jours; les heures, minutes & secondes de la journée la même valeur que les minutes, secondes & tierces du mouvement du Soleil, ou de sa longitude. Cette réduction ne doit pas surprendre, puisqu'on compte ici 60 heures dans un jour, aussi-bien

que 60 minutes pour le mouvement moyen du Soleil dans un jour. Donc, le mouvement moyen du Soleil est d'un degré par jour, selon les Indiens; d'une minute par heure, &c.

Ces principes une fois posés, voici le procédé des Brames.

Le temps proposé est le 12 de Décembre complet, ou le 13, 0<sup>h</sup> 0' avant le lever du Soleil. Depuis le premier d'Avril jusqu'à cet instant il s'est donc écoulé 8 mois 12<sup>h</sup> 19<sup>h</sup> 18'. Or, tout ceci change de dénomination, & devient 8<sup>r</sup> 12<sup>d</sup> 19' 18"; c'est ce qu'on peut appeler la longitude moyenne du Soleil, à laquelle les Brames font une petite correction, qu'ils nomment *Yoquiathy*, pour avoir le vrai lieu du Soleil.

*TABLE des Brames pour l'Équation du Soleil.*

			ÉQUATION pour la première huitaine du Mois. 9.	ÉQUATION pour la deuxième huitaine du Mois. 17.	ÉQUATION pour la troisième huitaine du Mois. 25.	ÉQUATION pour le reste du Mois. M.	
			M.	M.	M.	M.	
12.	☾	Mars . . . .	2.	4.	7.	10.	—
1.	γ	Avril . . . .	11.	14.	16.	17.	—
2.	♄	Mai . . . . .	19.	21.	22.	24.	—
3.	♅	Juin . . . . .	24.	25.	25.	24.	—
4.	♆	Juillet . . . .	24.	23.	22.	21.	—
5.	♇	Août . . . . .	19.	17.	15.	13.	—
6.	♈	Septembre.	11.	8.	6.	3.	—
7.	♉	Octobre . . .	2.	1.	3.	5.	+
8.	♊	Novembre.	6.	8.	9.	10.	+
9.	♋	Décembre.	10.	11.	11.	11.	+
10.	♌	Janvier . . .	11.	9.	8.	7.	+
11.	♍	Février . . .	6.	4.	2.	0.	+



Cette Table est construite de façon qu'on n'y trouve l'équation que de huit jours en huit jours. Pour cette raison, les Brames supposent au haut de chaque colonne 9, 17, 25; voici la manière de s'en servir.

Si les degrés du signe courant sont au-dessous de 8 ou moindres que 8, il faut prendre les minutes de l'équation qui répondent à la première huitaine, & faire cette analogie. Huit jours sont au nombre des minutes de la première huitaine, comme les degrés, minutes & secondes du signe courant, sont à un quatrième terme, qui sera l'équation que l'on cherche, additive ou soustractive, selon les signes  $+$  ou  $-$ .

Si les degrés du signe courant sont au-dessus de 8, & moindres que 16, on prend; 1.<sup>o</sup> les minutes de la première huitaine, on les met à part, & on les garde; 2.<sup>o</sup> on soustrait huit jours ou huit degrés du nombre de degrés du signe courant, & avec le reste on fait l'analogie que l'on vient de voir; 3.<sup>o</sup> on ajoute le quatrième terme au nombre de minutes de la première huitaine que l'on a mise à part. La somme donne l'équation que l'on cherche.

Si les degrés du signe courant sont au-dessus de 16, & moindres que 24, on prend, 1.<sup>o</sup> les minutes de la première & seconde huitaine, on en fait une somme que l'on garde; 2.<sup>o</sup> on retranche 16 degrés du lieu du Soleil, après quoi l'on opère comme ci-dessus, & de même lorsque les degrés du signe courant sont au-dessus de 24; c'est-à-dire qu'il faut toujours ajouter ensemble les équations qui répondent aux huitaines écoulées, pour les joindre à celle qui convient à la huitaine courante.

Lorsque le Soleil est dans la Balance, ou lorsqu'il a passé le 8 d'Octobre, comme l'équation change de signe, il y a une attention à faire pour tout le reste du mois; il faut d'abord ôter du lieu du Soleil les deux minutes de l'équation qui convient à la première huitaine, & opérer sur le reste comme ci-dessus.

Dans l'exemple proposé, le Soleil est dans  $8^{\circ} 12^d 19' 18''$ . je trouve dans la Table 10 minutes, qui répondent aux

huit premiers jours du mois; ensuite j'ôte 8 degrés de  $12^d$   $19' 18''$ , restent  $4^d 19' 18''$ . Je dis ensuite, 8 jours ou 8 degrés sont à 11 minutes qui répondent, dans la Table, à la seconde huitaine, comme  $4^d 19' 18''$  sont à  $5' 57''$ , qui mis avec les 10 minutes de la première huitaine, donnent  $15' 57''$  pour l'équation du Soleil: ajoutant ces  $15' 57''$  à  $8^h 12^d 19' 18''$ , on a le lieu vrai du Soleil dans  $8^h 12^d 35' 15''$ .

La forme de la Table, pour l'équation du Soleil, est fort singulière; on ne voit pas d'abord sur quel principe elle a pu être construite; on voit seulement qu'elle est faite pour corriger une fausse supposition que font les Brames dans le calcul du lieu du Soleil: ils supposent en effet les jours du mois égaux en durée; ce qui n'est pas vrai, même selon leurs principes.

Ils sont, par la même raison, obligés de corriger le mouvement journalier du Soleil. Ils ne se servent jamais des mouvemens horaires. Calculant toujours pour le moment du lever du Soleil, ils se servent du mouvement diurne qu'ils appellent *mouvement journalier*. Pour avoir celui du Soleil, ils appliquent à son moyen mouvement l'équation qui convient au jour proposé.

Dans l'exemple présent, on prend dans la Table, 11 minutes, qui répondent à la seconde huitaine du signe courant: divisant ce nombre 11 minutes par 8, on trouve  $1' 22'' \frac{1}{2}$ ; équation qu'il faut ajouter à 1 degré ou 60 minutes, pour avoir le mouvement journalier du Soleil de  $61' 22'' \frac{1}{2}$ .

## 2.° *Trouver le Chandra - stoutham, mot-à-mot le lieu de la Lune.*

La longitude de la Lune est très-aisée à trouver, & demande peu de temps.

Pour la calculer, les Brames ont quatre périodes avec le secours desquelles ils trouvent des jours semblables en valeur à ceux du Soleil, qu'ils convertissent par conséquent en signes, degrés, minutes & secondes. La quatrième de ces périodes

est de deux cents quarante-huit jours. Cette période révolue, les Brames supposent que la Lune revient au même point du ciel.

*Périodes Lunaires des Brames, qui leur servent de diviseur.*

	Jours,
Première période .....	1600984.
Seconde période .....	12372.
Troisième période .....	3031.
Quatrième période .....	248.

*Périodes Lunaires des Brames, qui leur servent de multiplicateur.*

	Mois.	Jours,	H.	M.
Première période .....	7.	2.	00.	07
Seconde période .....	9.	27.	48.	10
Troisième période .....	11.	7.	31.	1
Quatrième période .....	00.	27.	44.	6

Ces périodes étant supposées, divisez, disent les Brames ; le *chouddhadinam* par les quatre diviseurs, ou périodes lunaires données. Cette division s'opère de la manière suivante ; après avoir divisé le *chouddhadinam* par la première période lunaire donnée, divisez encore ce qui reste par la seconde période : cette seconde division achevée, divisez encore le reste par la troisième période ; & enfin le troisième reste, divisez-le par la quatrième période donnée : cette opération vous donne quatre quotiens ; multipliez-les par les quatre autres périodes ou multiplicateurs donnés, vous aurez quatre produits que vous ajouterez ensemble.

Il peut arriver que lorsqu'on est parvenu à la troisième division, le quotient de cette troisième division est un zéro ; mais comme zéro ne se peut multiplier, on met zéro pour le troisième produit.

Si après la quatrième division vous avez un reste, cherchez avec ce reste dans la Table qui a pour titre, *Mouvement journalier de la Lune, pendant la période de 248 jours*, ce qui répond à ce reste ; ajoutez-le aux quatre résultats donnés,

# 230 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

& vous aurez la longitude de la Lune. Cette longitude sera exprimée en mois, jours, heures & minutes; mais ces mois vaudront autant que des signes; les jours vaudront des degrés, &c. comme dans le calcul du lieu du Soleil. Voici les noms que les Brames donnent aux quatre quotiens; & pour exprimer le produit de ces quotiens par les périodes données, ils disent: chaque *vedam* vaut une période lunaire; chaque *rassam* une période, &c.

Vedam.....	1.
Rassam.....	14.
Calam.....	1.
Devaram.....	5.

Dans l'exemple proposé, nous avons trouvé le *chouddhadinam* de 1778701 jours. Si nous faisons les opérations énoncées ci-dessus, nous aurons les quatre quotiens 1 : 14 :: 1 : 5, qui multipliés par les périodes données ci-dessus, on aura les produits tels qu'on les voit dans la Table suivante.

TABLE du Calcul de l'âge de la Lune selon les Brames.

1778701.	1600984. 1. <sup>re</sup> période.	
1600984.	1 Vedam =	7 <sup>r</sup> 2 <sup>d</sup> 0' 7"
177717.	12372. 2. <sup>e</sup> période.	
12372.	14 Rassam =	6. 29. 14. 20.
53997.	3031. 3. <sup>e</sup> période.	
49488.	1 Galam =	11. 7. 31. 1.
4509.		
3031.		
1478.	248. 4. <sup>e</sup> période.	
1240.	5. Devaram =	4. 18. 40. 30.
238	jours de reste.....=	8. 19. 46. 0.
Donc, longitude de la Lune.....		2. 17. 11. 58.

Les Brame l'appellent *sandradrouvam*, qui veut dire, *terme, total, but*. A cette longitude ils appliquent deux corrections. La première se trouve dans la Table suivante; on la prend avec la longitude du Soleil. Cette correction est toujours additive. Les signes + & — que l'on voit à côté ne regardent que la troisième colonne, qui marque la variation d'un jour à l'autre. Cette Table est tout-à-fait singulière par le titre que lui donnent quelques Indiens. Ils prétendent que c'est une réduction de différence de méridiens; cette Table est en effet intitulée:

*Différence en longitude du premier Méridien qui est au milieu de l'île de Ceylan, pour Tirvalour, à quatre lieues à l'ouest de Négapatnam, ville maritime aux Hollandois, dans la côte de Coromandel.*

Tel est le titre de cette Table que je conserve dans mes manuscrits, écrit de la main même de mon Interprète. J'ai aussi eu cette Table d'une autre source; mais elle commence par le mois d'Avril; & le titre ne dit rien de plus que ce que l'on voit ci-après.

## TABLE dont se servent les Brames pour corriger la Longitude de la Lune.

M O I S & S I G N E S.			MINUTES continues pour les Mois consécutifs. <i>Deffandragalé.</i>	MINUTES pour chaque Mois. <i>Andragalé.</i>	SECONDES pour chaque Mois. <i>Andravihélé.</i>
10.	☾	Janvier...	... 29....	.... 1....	2 —
11.	☿	Février...	... 26....	.... 3....	6 —
12.	☿	Mars....	... 21....	.... 5....	10 —
1.	☿	Avril....	... 15....	.... 6....	12 —
2.	☿	Mai....	... 10....	.... 5....	10 —
3.	☿	Juin....	... 7....	.... 3....	6 —
4.	☿	Juillet...	... 8....	.... 1....	2 +
5.	☿	Août....	... 11....	.... 3....	6 +
6.	☿	Septembre.	... 17....	.... 6....	12 +
7.	☿	Octobre...	... 21....	.... 4....	8 +
8.	☿	Novembre.	... 28....	.... 7....	14 +
9.	☿	Décembre.	... 30....	.... 2....	4 +

Dans l'exemple présent, nous avons trouvé la longitude du Soleil de  $8^{\text{h}} 12^{\text{d}} 35' 15''$ . L'équation qui répond dans la Table à 8 mois ou 8 signes complets, est de 28 minutes. On trouve dans la même Table l'équation pour un jour ou pour un degré, de 4 secondes additives, ce qui donne 48 secondes pour 12 jours, &  $2'' 21'''$  pour  $35' 15''$ ; donc l'équation pour la longitude de la Lune est de  $28' 50''$ , on supprime les tierces quand elles sont au-dessous de 30; lorsqu'elles sont au-dessus, on les supprime également, mais on ajoute une seconde.

On a trouvé la longitude de la Lune de.....  $2^{\text{h}} 17^{\text{d}} 11' 58''$   
y ajoutant l'équation.....  $+..... 28. 50$   
on a le lieu de la Lune,  $1^{\circ}$  corrigé de.....  $2. 17. 40. 48$

La

La seconde équation ou correction de la longitude de la Lune se trouve ainsi. Dans la Table intitulée, *du Mouvement journalier de la Lune, pendant la période de 248 jours*; vous trouverez avec le reste de la quatrième division (238).

Le mouvement journalier de la Lune de.....	840'
Prenez aussi son mouvement moyen de.....	791.
Otez l'un de l'autre, la différence est.....	49.

Remarquez bien cette différence; si elle appartient au moyen mouvement de la Lune, ou bien si, comme dans l'exemple présent, la différence est du mouvement journalier, prenez le quotient de la quatrième division (dans l'exemple présent 5), multipliez-le par 32 tierces, vous aurez 160 tierces, qui multipliées par 49 minutes, différence trouvée ci-dessus entre le mouvement vrai & le mouvement moyen de la Lune, donneront 7840 tierces, qui font 2' 10" 40". Il faut ajouter cette correction à la longitude de la Lune, lorsque la différence trouvée appartient, comme dans cet exemple, au mouvement journalier de la Lune; si la différence eût été du mouvement moyen, il eût fallu soustraire l'équation.

Lieu de la Lune, 1. <sup>o</sup> corrigé.....	2 <sup>f</sup> 17 <sup>d</sup> 40' 48"
2. <sup>o</sup> correction additive.....	2. 11
Donc, longitude vraie de la Lune.....	2. 17. 42. 59

3.<sup>o</sup> *Trouver le Dithy-antham, c'est-à-dire l'âge de la Lune complet.*

C'est ce que nous appelons l'instant de l'opposition.

De la longitude de la Lune.....	2 <sup>f</sup> 17 <sup>d</sup> 42' 59"
ôtez la longitude du Soleil.....	8. 12. 35. 15
La différence est.....	6. 5. 7. 44

ou 185<sup>d</sup> 7' 44"; divisez les 185<sup>d</sup> par 12, le quotient 15 indique l'âge de la Lune complet ou son opposition, & le surplus 5<sup>d</sup> 7' 44, fait voir que la Lune est déjà avancée dans son décours. Réduisez ce surplus en tierces, vous aurez

Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.

G g

## 234 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

1 million 107 mille 840 tierces qui vont servir de dividende.

Du mouvement journalier de la Lune.....	840' 00" 00"
ôtez celui du Soleil de.....	61. 22. 30
le reste sera de.....	778. 37. 30
ajoutez.....	1.
& vous aurez.....	778. 38. 00

réduisez le tout en secondes, vous aurez 46718 secondes.

Ces opérations finies, divisez la distance de la Lune au Soleil réduite en tierces, par la différence du mouvement de la Lune au Soleil, réduite en secondes, le quotient donnera des heures.

Plus, multipliez le reste par 60, & divisez le produit par le même diviseur, le quotient exprimera des minutes.

Plus, multipliez le reste, s'il s'en trouve, par 60, & divisez par le même diviseur; le quotient exprimera des secondes; le reste se néglige. Otez les heures, minutes & secondes, que vous aurez trouvées, de 60 heures, le reste donnera le moment de l'âge complet, c'est-à-dire, la fin du quinzième jour complet de la Lune; ou enfin, selon nous, l'instant de l'opposition.

La raison de cette opération, & pourquoi les Brame enseignent de toujours soustraire la quantité trouvée, est parce qu'ils supposent la distance de la Lune au Soleil, plus grande que six signes; c'est-à-dire que dans leurs exemples, la Lune est toujours supposée avoir passé le terme de son âge complet, & par conséquent son opposition; car si on trouvoit que la distance de la Lune au Soleil fût moindre que six signes, il faudroit refaire le calcul pour le jour suivant.



*Suite du Calcul de l'âge complet de la Lune pour  
l'exemple présent.*

1107840 <sup>'''</sup>	
93436.	46718"
173480.	23 heures.
140154.	
33326.	
60.	46718.
1999560.	42 minutes.
186872.	
130840.	
93436.	
37404.	
60.	46718.
2244240.	48 secondes.
186872.	
375520.	
373744.	
1976.	

Quoique les Brames enseignent de pousser le calcul jusqu'aux secondes, ils se contentent ici des minutes d'heures pour résultat; cette exactitude est suffisante pour eux, puisque 30 secondes d'heures Indiennes, ne font que 12 secondes Européennes, & que le Soleil ne fait, selon les Brames, qu'une seconde de degré par minute d'heure Indienne; donc l'âge complet de la Lune, ou son opposition au Soleil, est arrivée 23<sup>h</sup> 43' avant le lever du Soleil pour le 13 Décembre, ou bien le 12, 36<sup>h</sup> 18' après le lever du Soleil.

Il faut actuellement calculer la longitude du Soleil & celle de la Lune, qui conviennent à l'heure trouvée, afin de voir si la différence est de six signes justes.

L'heure trouvée ci-dessus est  $23^h 42' 43''$  avant le lever du Soleil pour le 13; ce qui se change en  $23' 43''$  de degré.

Avec la Table de l'équation du Soleil, calculez l'équation qui convient au 12 Décembre pour  $23' 43''$ , & vous trouverez 33 secondes additives; les ajoutant à  $23' 43''$ , vous aurez  $24' 16''$  qu'il faut ôter de la longitude du Soleil trouvée ci-dessus.

Or, la longitude du Soleil trouvée ci-dessus est de..	$8^f 12^d 35' 15''$
ôtant.....	<u><math>24. 16</math></u>

Donc, longitude du Soleil pour le moment de l'opposition.....  $8. 12. 10. 59$

Pour avoir la longitude de la Lune pour le même instant, faites cette analogie.

Le mouvement journalier de la Lune de 840 minutes, est à 60 heures, comme  $23^h 43'$  est à un quatrième terme, que vous trouverez de  $5^d 32' 2''$ ; appliquez-y la première correction que vous trouverez de 1 seconde pour  $24' 16''$ , & vous aurez  $5^d 32' 3''$ , qu'il faut ôter de la longitude de la Lune trouvée ci-dessus.

Or, la longitude de la Lune trouvée ci-dessus est de	$2^f 17^d 42' 59''$
ôtant.....	<u><math>5. 32. 3</math></u>

on a la longitude de la Lune pour le moment de l'opposition.....  $2. 12. 10. 56$

Longitude du Soleil.....  $8. 12. 10. 59$

Comme ces deux lieux ne diffèrent que de 3 secondes, & & que dans aucun cas la différence n'est jamais que de quelques secondes, les Brames se contentent d'égaliser, comme ils disent, les deux longitudes, ils appellent cette opération *Oubaya-sloutha-samsçaram*, concordance des deux lieux.

Pour cet effet, ils ajoutent ici 4 secondes au lieu de la Lune, 1 seconde au lieu du Soleil, & 1 minute à l'heure supposée; donc le vrai moment de l'âge complet de la Lune est arrivé le 12 Décembre  $36^h 18'$  après le lever du Soleil.

Le Soleil & la Lune étant dans.....	$\left\{ \begin{array}{l} 8^f 12^d 11' 00'' \\ 2. 12. 11. 00 \end{array} \right.$
-------------------------------------	---

## SECTION TROISIÈME,

*Dans laquelle on enseigne tous les calculs qui ont rapport à l'Éclipse.*

1.° *Trouver le Ragon-floutham.*

C'est ce que nous nommons *le lieu du nœud ascendant de la Lune*. *Ragon* est le nom du *Dragon* ou *Serpent*, que les Indiens se figurent qui veut dévorer la Lune, & qui leur fait faire, pendant les Éclipses, toutes les extravagances que la plupart des Voyageurs ont vues, & nous ont décrites.

C'est-là l'origine de la queue & de la tête du Dragon, que l'on trouve dans les anciens Livres d'Astrologie. Les Tamoults racontent, au sujet de ce Dragon, une assez plaisante histoire. Je ne la place point ici ; parce que j'ai cru qu'elle appartenait plus à l'article qui traite de la religion des Indiens, qu'à ce *Traité d'Astronomie*.

Pour avoir donc le complément du nœud,

multipliez le <i>choud'hadinam</i> par.....	600.
ajoutez au produit.....	1758576;
divisez le tout par.....	339618.

Le quotient divisé par 12 donnera des signes ; plus, multipliez le reste par 30, & divisez par le même diviseur, le quotient donnera des degrés ; plus, multipliez le reste par 60, & divisez par le même diviseur, le quotient donnera des minutes ; plus, multipliez le reste par 60, & divisez par le même diviseur, le quotient donnera des secondes : l'on peut voir le calcul ci-après.

238 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

TABLE représentant le calcul du lieu du nœud ascendant  
de la Lune.

Chouddhadinam.... 1778701.

600.

1067220600.

Ajoutez..... 1758576.

1068979176.

1018854.

339618.

12.

4147 signes. 262.

501251.

24.

339618.

74.

1616337.

72.

1358472.

27.

2578656.

24.

2377326.

3 signes.

201330.

30.

6039900.

339618.

339618.

2643720.

17 degrés.

2377326.

266394.

60.

15983640.

1358472.

339618.

2398920.

47 minutes.

2377326.

21594.

60.

339618.

1295640.

4 secondes.

1018854.

276786.

Le complément du nœud, est donc de..... 3<sup>f</sup> 17<sup>d</sup> 47' 4"

Et le nœud ascendant dans..... 8. 12. 12. 56,

Pour avoir le lieu du nœud pour l'instant de l'âge complet de la Lune, il faut faire cette analogie. Le mouvement du nœud en 60 heures ( $191'$ ) est à 60 heures, comme la différence trouvée ci-dessus ( $23^h 43'$ ) entre l'instant de l'opposition & celui du 12 Décembre complet, est à un quatrième terme qui donne  $1' 15''$  à ajouter au lieu du nœud, qui devient par conséquent  $8^f 12^d 14' 11''$ .

Les Brames corrigent cette époque, en y ajoutant constamment 40 minutes; donc le lieu du nœud ascendant étoit alors  $8^f 12^d 54' 11''$ .

## 2.° Trouver le Vichepam.

C'est ce que nous nommons *la latitude de la Lune*.

Du lieu de la lune.....	2 <sup>f</sup> 12 <sup>d</sup> 11' 00"
ôtez le lieu du nœud.....	8. 12. 54. 11
vous aurez le <i>patona-chandren</i> .....	5. 29. 16. 49

*Patona-chandren*, veut dire la Lune offensée du Dragon, de *Pat*, Serpent, *ona*, offenser, & *chandren*, Lune.

Prenez le complément à six signes du *Patonachandren*, pour avoir le *Bouja* de  $43' 11''$ . C'est ce que nous pouvons appeler *l'argument de la latitude*; le *Bouja* étant la distance de la Lune à son nœud le plus proche; avec le *Bouja* vous trouverez dans la Table le *Vichepam*, ou la latitude de la Lune, de  $0^d 3' 17' 48'''$ .

## 4.° Trouver le Mana-yog-artham.

C'est ce que nous appelons *la somme des demi-diamètres de l'ombre & de la Lune*: on trouve cette somme en calculant.

1.° Le *chandra mandalam*, c'est-à-dire le diamètre de la Lune. *Chandra mandalam* signifie proprement cercle, orbite de la Lune.

Divisez le mouvement journalier de la Lune ( $840'$ ) par 25; plus, multipliez le reste par 60 & divisez par 25, vous aurez le *chandra mandalam* ou diamètre de la Lune  $33' 36''$ .

2.° Le *chaya mandalam*. C'est le demi-diamètre de l'ombre.

Multipliez par 5 le diamètre de la Lune 33' 36", vous aurez, en y ajoutant le *maya chaya*, (1') 85 minutes.

3.° Ajoutez le diamètre 33' 36", la moitié de la somme fera le *mana-yog-artham* (somme des demi-diamètres de la Lune & de l'ombre) de 59' 18".

4.° *Trouver le Grahana-pramanam.*

C'est la grandeur de l'Éclipse.

De la somme des demi-diamètres.....	59' 18" 00 <sup>'''</sup> .
ôtez la latitude.....	3. 17. 48
le reste est .....	56. 00. 12

ou 201612 tierces. C'est un dividende. Réduisez aussi en tierces le diamètre de la Lune 33' 36", pour avoir un diviseur qui sera de 120960 tierces; la division achevée, vous aurez 1 au quotient.

Multipliez le reste, 80652, par 60, & divisez le produit, 4839120, par le même diviseur 120960, le quotient sera 40. Le reste, 720, peut se négliger.

Donc la grandeur de l'Éclipse, dans l'exemple présent, a dû être d'un entier &  $\frac{40}{60}$ .<sup>e</sup> de l'entier ou 8 doigts, c'est-à-dire de 20 doigts justes.

5.° *Trouver le Grahana-calām, c'est-à-dire le temps de l'Éclipse.*

Par ce temps de l'Éclipse, les Brames entendent la demi-durée; d'où ils tirent le commencement & la fin. Ils appellent le commencement *grahana sparśa calām*, & *sparśa* signifie *taçt*. Ils nomment la fin *grahana mocqua calām*, & *mocqua* signifie la *délivrance*. C'est comme s'ils disoient, *temps du taçt de l'éclipse*, & *temps de la délivrance de l'éclipse*. Tous ces mots tiennent chez eux à ces anciennes superstitions avec

avec lesquelles ils endorment les peuples, qu'un dragon ou grand serpent cherche à dévorer la Lune.

Le commencement & la fin de l'Éclipse sont, selon les Brames, des temps ordinaires de l'Éclipse, comme appartenans à toute sorte d'Éclipses; l'immersion & l'émerision (comme dans l'exemple présent) sont des temps extraordinaires.

La durée de l'Éclipse se trouve ainsi :

Quarez le demi-diamètre de l'ombre & de la Lune

59' 18" ; quarez également la latitude de la Lune

3' 18", & vous aurez..... 3516' 29" 24<sup>m</sup>.

&..... 10. 53. 24

ôtez l'un de l'autre, il reste..... 3505. 36. 00

Tirez-en la racine quarrée, elle est de 59' 12" 20<sup>m</sup>. Réduisez-la en quartes, pour avoir un dividende de 12 millions 788 mille 640 quartes.

Nous avons trouvé ci-dessus, la différence du mouvement journalier de la Lune au Soleil, de 778' 37" 30<sup>m</sup>, qui font 2 millions 803-mille 50 tierces, & qui servent de diviseur.

Achievez l'opération comme vous avez fait les précédentes; & vous aurez au quotient 4<sup>h</sup> 34' pour le *grahanar-tha-calam*, ou la demi-durée de l'Éclipse.

Par un calcul semblable, vous parviendrez à trouver le temps de la demeure dans l'ombre.

Du demi-diamètre de l'ombre..... 85' 00"

ôtez le diamètre de la Lune..... 33. 36

il reste..... 51. 24

prenez-en la moitié..... 25. 42

quarez-la pour avoir..... 660. 29,24

ôtez-en le carré de la latitude..... 10. 53,24

il reste..... 649. 36,00

extrayez la racine quarrée..... 25. 29,00

qui font 5 millions, 504 mille 400 quartes pour dividende. Le diviseur est toujours le même, c'est-à-dire 2 millions 803 mille 50 tierces.

Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.

Hh

Achevez l'opération, & le quotient donnera l'*antacarartha-calam*, ou la demi-durée de l'obscurité totale de  $1^h 58'$ .

Les Brames confondent, dans leurs calculs, le moment de l'opposition avec celui du milieu de l'Éclipse. Ils n'ont point appris à distinguer ces deux temps, ou-bien ils l'ont oublié. Donc en supposant l'opposition

Le 12 Décembre à.....	36 <sup>h</sup> 18'
on aura le commencement à.....	31. 44
l'immersion totale à.....	34. 20
l'émerſion à.....	38. 16
la fin à.....	40. 52

Pour réduire ces heures, il faut ſe rappeler que la façon de compter des Brames eſt d'un lever du Soleil à l'autre lever. Il faut donc actuellement chercher le temps que le Soleil reſte ſur l'horizon le 12 Décembre pour le parallèle de Tirvalour. En ſuivant la méthode des Brames, que nous avons expliquée plus haut, vous trouverez que le 12 Décembre, le jour eſt à Tirvalour, de  $28^h 23'$ , & que le midi arrive à  $14^h 11' \frac{1}{2}$ . ſur ces principes vous trouverez que

Le commencement de l'Éclipse eſt arrivé après le coucher du Soleil, à.....	3 <sup>h</sup> 21'
l'immersion à.....	5. 57
l'émerſion à.....	9. 53
la fin à.....	12. 29
durée de l'Éclipse.....	9. 8
durée de l'obscurité totale.....	3. 56

Convertiſſant ce temps en heures Européennes (*voyez la Table ci-après*); on a

Le commencement à.....	1 <sup>h</sup> 20' 24"
l'immersion à.....	2. 22. 48
le milieu à.....	3. 10. 00
l'émerſion à.....	3. 57. 48
la fin à.....	4. 59. 36



Durée de l'Éclipse.....	3 <sup>h</sup> 39' 12"
Durée par les Tables de Mayer.....	3. 35. 00
Différence.....	4. 12
Durée de l'obscurité totale.....	1. 35. 00
Le calcul des Tables de Mayer, donne.....	1. 38. 45
Différence.....	3. 45
Grandeur de l'Éclipse.....	20 doigts.
Par les Tables de Mayer.....	20. 25 <sup>M</sup>

La longueur du jour étant le 12 Décembre à *Tirvalour* (comme nous l'avons dit) de 28<sup>h</sup> 23' Indiennes, ou de 1<sup>h</sup> 21' 12" Européennes, on trouve que le Soleil doit se coucher ce jour-là, pour le parallèle de *Tirvalour*, à 5<sup>h</sup> 38' 48". Ajoutant à cette heure les momens de l'Éclipse réduits en heures Européennes, on a

le commencement à.....	7 <sup>h</sup> 1' 00"
l'immersion à.....	8. 3. 24
l'émerision à.....	9. 38. 24
la fin à.....	10. 40. 12

Le tout calculé pour le méridien de *Tirvalour*: or *Tirvalour* est d'environ cinq lieues plus occidental que *Negapatnam*; ville appartenante aux Hollandois, à peu de chose près, sous le même méridien que Pondichéry.

La même Éclipse, calculée par les Tables de Mayer, m'a donné les phases suivantes:

commencement à.....	1 <sup>h</sup> 30' 45"
immersion à.....	2. 28. 15
milieu à.....	3. 17. 56
émerision à.....	4. 7. 00
fin à.....	5. 5. 45

Ce calcul, comparé avec celui des Brames, donne

la différence en longitude entre Paris & <i>Tirvalour</i> ....	5 <sup>h</sup> 32' 49"
y ajoutant pour la différence entre <i>Tirvalour</i> & Pondichéry.....	0. 1. 0
on aura.....	5 <sup>h</sup> 33' 49"

H h ij

pour la différence des Méridiens entre Paris &amp; Pondichéry,

j'ai trouvé ..... 5<sup>h</sup> 10' 6"

Donc, l'erreur des Brames, dans cet exemple, est de... 23. 43

qui en produisent à peine 13 dans le lieu de la Lune.

Les Brames sont beaucoup moins éloignés de la vérité pour la durée de l'Éclipse, que pour l'instant précis des autres phases. Leur accord avec l'observation pour la durée, est encore digne de remarque.

*Durée de l'Éclipse.*

		<i>Différence.</i>
Selon les Brames...	3 <sup>h</sup> 39' 12"	4' 42"
Observée .....	3. 34. 30	0. 30
Selon M. Mayer...	3. 35. 00	

*Durée de l'obscurité.*

		<i>Différence.</i>
Selon les Brames...	1 <sup>h</sup> 35' 00	3' 30"
Observée .....	1. 38. 30	0. 15
Selon M. Mayer...	1. 38. 45	

6.° Trouver le Grahana-diq, c'est-à-dire, le rhumb de vent par lequel commence & finit l'Éclipse.

Pour savoir le côté du disque de la Lune par où l'Éclipse doit commencer & finir, il faut voir ce qu'il reste de différence du *patonachandren*, ou argument de latitude (*voy. sect. III<sup>e</sup>, article 11*).

Si ce reste est entre 0 signe & 6 signes, la latitude sera *outra vichepam*, c'est-à-dire *latitude boréale*; l'Éclipse commencera au sud-est & finira au sud-ouest.

Si le reste est entre 6 signes & 12 signes, la latitude sera *daqchana vichepam*, c'est-à-dire *latitude australe*; l'Éclipse commencera au nord-est & finira au nord-ouest.

Mais si le reste est 0 signe, 6 signes ou 12 signes, sans aucunes autres parties de degrés, minutes, &c. ou s'il n'y avoit que peu de différence, comme seroit un degré, en

plus ou en moins, l'Éclipse commenceroit à l'est & finiroit à l'ouest.

Dans l'exemple présent, nous avons trouvé le *patonachandren* de  $5^{\text{h}} 29^{\text{d}} 17'$ ; & comme la différence pour avoir six signes est très-peu de chose, l'Éclipse a dû commencer à l'est & finir à l'ouest.

Nous avons encore calculé, selon la même méthode; l'Éclipse centrale de la Lune du 30 Août 1765 que je vis, & que j'observai à l'Isle-de-France par le temps le plus serein. En voici les résultats bien vérifiés, & calculés jusqu'à la précision des secondes.

Année complète selon le Calendrier Romain.....	1764.
Ajoutez la différence constante.....	3102.
Année complète de l'époque <i>Calyougam</i> .....	4866.
de la période de 60 ans, la.....	6.

L'époque *Calyougam* 4866, multipliée par la longueur de l'année ( $365^{\text{d}} 15^{\text{h}} 31' 15''$ ), donne

pour la réduction.....	1777448 <sup>i</sup>	44 <sup>h</sup>	22'	30"
ôtez la quantité constante.....	2.	8.	51.	15
il reste.....	1777346.	35.	31.	15
pour quatre mois complets, depuis Avril, ajoutez.....	125.	24.	34.	00
vous aurez les jours écoulés depuis l'époque <i>Calyougam</i> jusqu'au 1. <sup>er</sup> d'Août.....	1777472.	00.	5.	15

Les jours étant divisés par 7, il reste 4, indiquant que le mois d'Août a commencé par un Mardi. Cherchez, dans le calendrier Grégorien, entre le 7 & le 14 d'Août 1765, vous trouverez que le 13 fut un Mardi. Par conséquent le 30 d'Août répond au 18 Indien. Donc l'Éclipse est arrivée le 18 d'Août, selon la façon de compter des Brames, un Vendredi.

à.....	1777472 <sup>i</sup>	00 <sup>h</sup>	5'	15"
Ajoutez.....	17.	59.	54.	45
La somme sera.....	1777490.	0.	0.	0

# 246 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

complets, depuis l'époque *Calyougam* jusqu'au 17 d'Août  
complet de l'année courante 4867.

Longitude moyenne du Soleil.....	4 <sup>r</sup> 17 <sup>d</sup> 59' 54" 45"
Équation soustraitive.....	39. 44. 50
Longitude vraie du Soleil.....	4. 17. 20. 9. 55
Et son mouvement journalier de.....	00. 58. 7. 30

## Pour la Longitude de la Lune.

On trouvera 1. Vedam.....	7 <sup>r</sup> 2 <sup>d</sup> 00' 3" 0"
14. Raffam.....	6. 29. 14. 20. 0
1. Calam.....	11. 7. 31. 1. 0
1. Devaram.....	0. 27. 44. 6. 0
19. Reste.....	8. 15. 1. 0. 0

Le lieu de la Lune non corrigé.....	10. 21. 30. 34. 0
Première correction addiive.....	0. 0. 9. 44. 0
1.° Lieu de la Lune corrigé.....	10. 21. 40. 18. 0
Seconde correction additive.....	0. 0. 0. 17. 36
2.° Lieu de la Lune corrigé.....	10. 21. 40. 35. 36
Et son mouvement journalier de.....	824.

Distance de la Lune au Soleil.....	6 <sup>r</sup> 4 <sup>d</sup> 20' 25" 41"
------------------------------------	---

Donc l'opposition est passée, & les 4<sup>d</sup> 20'  
25" 41" de plus que les 15 jours, ou  
de plus que six signes, répondent à.... 20<sup>h</sup> 24' 9"

Complément à 60 heures.....	39. 35. 31
-----------------------------	------------

Donc l'opposition est arrivée..... 39. 35. 51 après le  
lever du Soleil pour le 18.

Longitude du Soleil pour ce moment....	4 <sup>r</sup> 17 <sup>d</sup> 00' 23" 58"
--	--

Longitude de la Lune.....	10. 17. 00. 21. 54
---------------------------	--------------------

Différence.....	0. 0. 0. 2. 4
-----------------	---------------

Ajoutant 2" 6" à la Longitude de la Lune,

0. 2 à celle du Soleil,

Et.... 2. 0 à l'heure, on aura la concordance des lieux du Soleil

& de la Lune.....  $\left\{ \begin{array}{l} 4^r \\ 10 \end{array} \right\} 17^d 00' 24"$

Et le vrai moment de l'opposition, après le lever du Soleil, 39<sup>h</sup> 35. 53

*Pour le nœud.*

On trouvera.....	10 <sup>f</sup>	16 <sup>d</sup>	24'	00"	14 <sup>es</sup>
Plus, la correction.....	0.	0.	40.	0.	0
Donc, lieu vrai du nœud.....	10.	17.	4.	00.	14
Et la latitude de la Lune de.....	0.	00.	18.	4.	50
Le diamètre de la Lune.....	0.	32.	57.	56.	0
Le demi-diamètre de l'ombre.....	0.	83.	24.	00.	0
Et la somme des demi-diamètres.....	0.	58.	10.	48.	0

*D'où l'on tirera*

Le commencement de l'Éclipse à.....	35 <sup>h</sup>	2'	24"
L'immersion à.....	37.	37.	48
L'émerſion à.....	41.	33.	58
Et la fin à.....	44.	9.	22
La longueur du jour ſera de.....	31.	17.	00
Donc, commencement après le coucher du Soleil...	3.	45.	24
L'immersion à.....	6.	20.	48
Le milieu à.....	8.	18.	53
L'émerſion à.....	10.	16.	58
La fin à.....	12.	52.	22

*En heures Européennes.*

Commencement après le coucher du Soleil.....	1 <sup>h</sup>	30'	10"
Immersion à.....	2.	32.	19
Milieu à.....	3.	19.	33
Émerſion à.....	4.	6.	47
Fin à.....	5.	8.	57
Durée de l'Éclipse.....	3.	38.	47
Selon Mayer.....	3.	40.	36
Différence.....	0.	1.	49
Durée de l'obſcurité.....	1.	34.	28
Selon Mayer.....	1.	42.	41
Différence.....	0.	7.	13

*Comparées à l'obſervation.*

*Durée de l'Éclipse.*

		<i>Différences</i>
Selon les Brames.....	3 <sup>h</sup> 38' 47"	0' 41"
Observée.....	3. 39. 28	1. 8
Selon M. Mayer.....	3. 40. 36	

*Durée de l'obscurité.*

		<i>Différences</i>
Selon les Brames.....	1 <sup>h</sup> 34' 28"	7' 48"
Observée.....	1. 42. 16	0. 25
Selon M. Mayer.....	1. 42. 41	

	<i>Différence.</i>
La grandeur de l'Éclipse, selon les Brames.....	21. 7'
Selon M. Mayer.....	22. 7

Différence.....	1. 0
Longueur du jour pour le parallèle de Tirvalour, le 18 Août.....	31 <sup>d</sup> 17' 00"
En heures Européennes.....	12. 30. 48
Donc, coucher du Soleil à Tirvalour.....	6. 15. 24
Ajoutant l'heure du milieu de l'Éclipse.....	3. 19. 33
Milieu de l'Éclipse à Tirvalour.....	9. 34. 57
Y ajoutant pour Pondichéry.....	0. 1. 00
Milieu de l'Éclipse à Pondichéry.....	9. 35. 57
Différence des méridiens entre Pondichéry & l'île de France (occidentale).....	1. 28. 28
Donc, milieu de l'Éclipse à l'île de France.....	8. 7. 29
Jè l'ai observé à.....	7. 45. 5
Donc, erreur des Brames.....	22. 24

qui en font environ treize dans le lieu de la Lune; & l'Éclipse a  
commencé à l'est de la Lune, & a fini à l'ouest.

*Méthode dont se servent les Brames de la côte de Coromandel  
pour calculer les Éclipses de Soleil, appliquée à l'Éclipse  
du 17 Octobre 1762.*

Le calcul des Éclipses de Soleil est plus long & plus compliqué que celui des Éclipses de Lune, parce qu'il faut y faire entrer les parallaxes ; or les Brames ne les connoissent point : nous allons voir le calcul qu'ils y substituent.

On propose de calculer l'Éclipse du 17 Octobre 1762.

Ce calcul sera divisé comme celui de la Lune, en trois sections.

Dans la première, on traitera du *chouddhadinam* ou des jours écoulés depuis *calyougam* jusqu'au jour proposé.

La seconde traitera du *dithy* ou âge de la Lune ; c'est-à-dire, de sa conjonction au Soleil.

Dans la troisième, on parlera du *grahanam*, ou des temps de l'Éclipse.

## SECTION PREMIÈRE.

### *Trouver le Chouddhadinam.*

DANS la Table intitulée : *des années de l'Ère Chrétienne, qui répondent aux années de l'Époque calyougam*, prenez celle qui répond à l'année complète 1761, vous trouverez 4863 ; ou bien ajoutez 3102 à l'année complète 1761, comme vous avez fait pour les Éclipses de Lune, & vous aurez 4863 ans de l'époque *calyougam*. Réduisez cette époque en jours à raison de  $365^j 15^h 31' 15''$ , vous aurez, pour le commencement de l'année courante, 1776250<sup>j</sup> 48<sup>h</sup> 57' 30".

Dans la Table de la valeur des mois de l'année, prenez ce qui s'est écoulé pour six mois complets, ou depuis le 1.<sup>er</sup> Avril jusqu'au 1.<sup>er</sup> Octobre, la somme donnera 186<sup>j</sup> 54<sup>h</sup> 6' à ajouter, & vous aurez le nombre de jours, d'heures, de minutes & secondes écoulées depuis l'époque *calyougam*, jusqu'au 1.<sup>er</sup> Octobre de l'année courante 4864, 1776437<sup>j</sup> 43<sup>h</sup> 3' 30". Ayant divisé le nombre de jours par 7, le reste 5,

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

indique un Mercredi par où commença le mois. Cherchez dans le Calendrier grégorien, entre le 7 & le 14 Octobre 1762, vous trouverez que le 13 fut un Mercredi; par conséquent le 17 Octobre répond au 4 indien: donc l'Éclipse est arrivée le 4 Octobre, selon la façon de compter des Brames, un Dimanche. Ajoutez donc 4 jours à l'époque trouvée ci-dessus, & vous aurez 177644<sup>1</sup> 43<sup>h</sup> 3' 30"; & comme la somme des heures passe 30, supprimez-les, & ajoutez un jour, ce qui vous donnera le *chouddhadinam* de 1776442 jours, ou jours écoulés depuis l'époque *calyougam* jusqu'au  $\frac{4}{17}$  du mois d'Octobre ou *arbassy*.

## SECTION DEUXIÈME.

*Trouver le Dithy.*

LES préceptes pour trouver le *dithy* ou l'heure de la conjonction de la Lune, sont les mêmes que pour l'opposition. On aura donc,

1. <sup>o</sup> Le lieu du Soleil, ou <i>Souvia-Sthoutam</i> , de...	6 <sup>f</sup> 4 <sup>d</sup> 15' 53"
Son mouvement journalier, de.....	59. 45
Le lieu de la Lune, ou <i>Chaudra-Sthoutam</i> , de..	6. 12. 29. 26.
Son mouvement journalier, de.....	835.

Enfin la Lune sera naissante, puisque ces 30 jours seront accomplis, & que la conjonction est passée. On trouvera qu'elle a dû arriver le 4 à 21<sup>h</sup> 48'.

2.<sup>o</sup> En suivant ici les mêmes préceptes que pour l'opposition; on trouve

Le lieu de la Lune, pour le 4, à 21 <sup>h</sup> 48', de	6 <sup>f</sup> 3 <sup>d</sup> 37' 44" 13"
Et le lieu du Soleil dans.....	6. 3. 37. 50. 33

Différence.....	6. 20
-----------------	-------

Faisant la concordance de ces deux lieux, on aura le moment de la conjonction de la Lune au Soleil à 21<sup>h</sup> 48' 30", & le lieu du Soleil & de la Lune, de... 6<sup>f</sup> 3<sup>d</sup> 37' 50".



## SECTION TROISIÈME.

*Du Grahanam, ou de l'Éclipse.*1.<sup>o</sup> *Trouver l'Ayanangsam.*

CE terme est composé de deux mots, *ayanam*, qui signifie course; & *angsam*, membre, atome, &c.

Au reste, je n'ai pu savoir la vraie signification des termes que les Bames emploient dans leurs calculs des Éclipses de Soleil, ceux qui sont communs aux deux Éclipses; on en trouve l'explication dans le calcul des Éclipses de Lune.

Le lieu du Soleil & de la Lune que l'on vient de trouver, sont pris, comme nous l'avons dit, non du premier point du signe du Bélier, mais du premier point de la constellation du Bélier, qui est en avant de plusieurs degrés; c'est pourquoi, les Bames réduisent ici cette longitude du Soleil à celle du premier point du signe du Bélier, en se servant de la méthode expliquée ci-dessus, à l'article du Zodiaque: c'est ce qu'ils appellent trouver l'*ayanangsam*. Or, nous avons trouvé que le 17 Octobre 1762, la constellation du Bélier étoit

en avant, selon les Bames, de.....	0 <sup>r</sup> 18 <sup>a</sup> 57' 9"
les ajoutant au lieu du Soleil.....	6. 3. 37. 50
on a.....	6. 22. 34. 59

pour la longitude du Soleil, prise du premier point du signe du Bélier; ce qui s'appelle l'*ayana-fouria-southam*.

Les Bames distinguent, comme l'on voit, l'entrée du Soleil dans la constellation du Bélier, de son arrivée à l'équinoxe; c'est à quoi ils ont grande attention lorsqu'ils veulent observer avec le gnomon.

L'entrée du Soleil dans la constellation du Bélier, commence l'année des Bames, comme nous l'avons dit, de façon que cette même entrée est toujours fixée au 1.<sup>er</sup> Avril. Au contraire, l'entrée du Soleil dans l'équinoxe arrive, selon leurs calculs, vers le 12 Mars; ce qui fait actuellement dix-huit à dix-neuf jours de différence.

Ils calculent pour le 12 de Mars la longitude du Soleil & l'*ayanangsam*, ou précession des équinoxes; ils ajoutent l'un avec l'autre. Si la somme donne 12 ou 0 signes, c'est le moment de l'équinoxe; mais si la somme est moindre que 12 signes, ou plus grande que 0 signes, on recommence le calcul pour un ou deux jours avant ou après le 12 Mars; & par une partie proportionnelle, on trouve la quantité qu'il faut ajouter pour avoir 12 signes ou 0 signes, & par conséquent l'équinoxe.

## 2.° Trouver le Lengna-floutham.

Par ce précepte, les Brames m'ont paru enseigner le moyen de trouver le point de l'écliptique qui est à l'horizon au moment de la conjonction. Ils ont, comme nous l'avons dit, une Table de la valeur de chaque signe pour le lieu où ils sont établis, & pour la latitude duquel ils calculent. Nous avons donné cette Table pour la latitude de Tirvalour: or cette Table est exprimée en minutes d'heure seulement, c'est pourquoi ils se contentent de réduire en minutes d'heure seulement le temps de la conjonction. Dans l'exemple présent on a pour le temps de la conjonction réduite, 1308 minutes.

Prenez dans la Table intitulée, *valeur des 12 signes pour la latitude de Tirvalour*,

la valeur du huitième signe.....	318
la valeur du neuvième.....	331
la valeur du dixième.....	315
ajoutez ensemble ces valeurs, vous aurez.....	964

Si le Soleil eût été dans 8 signes justes, ces 964 minutes seroient la valeur dont il faudroit se servir; mais comme il n'est que dans 6<sup>d</sup> 22<sup>d</sup> 34' 59", il s'en faut de 7<sup>d</sup> 25' 1" qu'il n'ait 7 signes. Il faut donc ajouter la partie proportionnelle qui convient à 7<sup>d</sup> 25' 1", en prenant 302 (valeur du 6.<sup>e</sup> signe) pour différence. On trouvera pour quatrième terme 74 minutes, lesquelles ajoutées à 964 minutes, donnent 1038.

L'heure de la conjonction est..... 1308  
 ôtant l'un de l'autre, il reste..... 270

C'est-à-dire que le 10.<sup>e</sup> signe est levé, plus 270 minutes d'heures de l'onzième signe.

Pour réduire ces 270 minutes d'heure en degrés de signe, on prend dans la Table, 280 (valeur de l'onzième signe) pour différence, avec laquelle on forme la proportion suivante;

$$280' : 30^d :: 270' : 28^d 55' 43''.$$

Par conséquent, le point du Zodiaque, qui est alors à l'horizon, selon les Brames, est 10<sup>e</sup> 28<sup>d</sup> 55' 43". C'est le *lengna-stoutham*.

La raison pour laquelle on ne prend point, dans cet exemple, de valeur de signe, passé le 10.<sup>e</sup>, est qu'il faut toujours faire en sorte que la somme des valeurs soit moindre que la somme qui provient de la conjonction réduite en minutes.

### 3.<sup>o</sup> Trouver le Nata-Naliguey.

Par ce précepte, les Brames enseignent le moyen de trouver la différence entre la conjonction & le milieu de l'Éclipse.

De <i>Lengna-Stoutham</i> (précepte 2. <sup>e</sup> ).....	10 <sup>e</sup> 28 <sup>d</sup> 55' 43"
ôtez l' <i>Ayana-Souria-Stoutham</i> (précepte 1. <sup>e</sup> )....	6. 22. 34. 59
il reste.....	4. 6. 20. 44

Multipliez le nombre des signes par 5, & le nombre des degrés, minutes & secondes par 10, le produit, s'il est moindre que 15, servira pour l'opération; ce sera ce produit qu'on emploiera : s'il est plus grand que 15, ôtez-en 15, & l'opération s'achèvera avec le reste.

Dans cet exemple, le produit est.....	21 <sup>e</sup> 3 <sup>d</sup> 00' 00"
ôtant.....	15.
reste.....	6. 3. 00. 00

Cette opération est une espèce de réduction en ascension droite, puisqu'elle est fondée sur ce que 360 degrés sont égaux à 60 heures, 30 degrés à 5 heures; un degré égal à 10 minutes d'heure Indienne.

# 254 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

De..... 20<sup>h</sup> 0'  
ôtez..... 6. 3

il reste..... 13. 57  
Multipliez par..... 6. 3

le produit donne..... 84. 24  
qui, réduites au même terme, font..... 5064'  
Divisez cette quantité par..... 1468

Le quotient donnera des heures : multipliez le reste par 60,  
& divisez encore par 1468, le quotient donnera des  
minutes, &c. comme l'on voit ci-après.

*Calcul de la différence entre la conjonction & le milieu  
de l'Éclipse pour l'exemple présent.*

$$\begin{array}{r}
 5064. \\
 4404. \\
 \hline
 660. \\
 60. \\
 \hline
 39600. \\
 2936. \\
 \hline
 10240. \\
 8808. \\
 \hline
 1432. \\
 60. \\
 \hline
 85920. \\
 7340. \\
 \hline
 12520. \\
 11724.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 | 1468. \\
 \hline
 3 \text{ heures.} \\
 \\
 | 1468. \\
 \hline
 26 \text{ minutes.} \\
 \\
 | 1468. \\
 \hline
 58 \text{ secondes.}
 \end{array}$$

Donc le *nata-naligney*, ou la différence entre la conjonction  
& le milieu de l'Éclipse sera, dans cet exemple, de 3<sup>h</sup> 26' 58".

Cette différence s'ajoute à l'heure de la conjonction,

lorsque le Soleil est à l'occident; elle se soustrait au contraire, lorsque cet astre est à l'orient du méridien.

On a trouvé la conjonction à.....	21 <sup>h</sup> 48' 30"
ajoutant.....	3. 26. 58
on a le milieu de l'Éclipse à.....	25. 15. 28

Les Brames appellent ce terme *ambana-parvanta-naligucy*.

Calculez actuellement la longitude du Soleil pour le moment du milieu de l'Éclipse, ce que vous obtiendrez aisément en prenant avec son mouvement journalier, 59' 45", le mouvement qui convient à 3<sup>h</sup> 26' 58", & que vous trouverez de 3' 25".

La longitude du Soleil, réduite au moment du milieu de l'Éclipse sera donc de 6<sup>h</sup> 22<sup>d</sup> 38' 24".

Calculez pareillement la longitude de la Lune pour le moment du milieu de l'Éclipse; ce qui sera facile, en vous servant de son mouvement journalier de 835 minutes, & vous trouverez son mouvement pour 3<sup>h</sup> 26' 58", de 47' 47".

La longitude de la Lune réduite au moment du milieu de l'Éclipse, sera donc de 6<sup>h</sup> 23<sup>d</sup> 22' 46".

4.° *Trouver le Ragou pour l'Ambana-parvanta-naligucy; c'est-à-dire le nœud ascendant pour le moment du milieu de l'Éclipse.*

Les préceptes sont les mêmes que pour l'opposition, avec la seule différence qu'il faut ajouter (pour les Éclipses de Soleil) l'*ayanangsam* (la précession) à la longitude du nœud.

Dans cet exemple, on trouvera

Le complément du nœud, de.....	11 <sup>h</sup> 18 <sup>d</sup> 3' 21"
Donc, le nœud ascendant.....	00. 11. 56. 39
Ajoutez pour la réduction à l'heure de la conjonct.	0. 0. 0. 2
pour l'équation.....	0. 0. 40. 0
pour la précession.....	0. 18. 57. 9
Vous aurez la Longitude du nœud, de.....	1. 1. 33. 50

5.<sup>o</sup> *Trouver le Avanaty.*

Par ce précepte, les Brames enseignent le moyen de trouver une quantité qui, comparée avec la latitude de la Lune, donne la grandeur de l'Éclipse; & voici leur procédé qui est assez singulier.

Il faut premièrement trouver la durée du jour proposé. Nous avons enseigné les moyens d'y parvenir, & nous avons trouvé en même temps que le 17 Octobre le Soleil reste sur l'horizon de *Tirvalour*

pendant..... 29<sup>h</sup> 23' 52"

la moitié..... 14. 41. 56

indique l'heure à laquelle le Soleil passe au Méridien.

De l'heure du milieu de l'Éclipse..... 25<sup>h</sup> 15' 38"

ôtez l'heure de midi..... 14. 42. 56

il reste..... 10. 32. 42

Réduisez-les en partie de l'Équateur; ce qui vous

donnera..... 2<sup>c</sup> 3<sup>d</sup> 12' 00"

Ajoutez-les au lieu du Soleil pour le moment du milieu de l'Éclipse..... 6. 22. 38. 24

la somme fera..... 8. 25. 50. 24

Secondement, faites le *bouja*, c'est-à-dire, cherchez la distance du Soleil au plus proche équinoxe;

Pour cet effet, ôtez 6 signes de..... 8<sup>c</sup> 25<sup>d</sup> 50' 24"

le *bouja* sera de..... 2. 25. 50. 24

Cherchez dans la Table intitulée, *de la différence ascensionnelle*, ou *valeur des signes de bouja*, vous aurez

Pour le premier signe..... 48'

pour le second..... 38

la somme donne..... 86

Si le *bouja* eût été de deux signes justes, ces 86 minutes seroient la valeur dont il faudroit se servir; mais comme il est

est de  $2^f 25^d 50' 24''$ , il est plus grand que 2 signes, de  $25^d 50' 24''$ . Il faut donc ajouter la partie proportionnelle qui convient à  $25^d 50' 24''$ , en prenant 16 (valeur du troisième signe) pour différence; & on fera la proportion suivante :

$$30^d : 16' :: 25^d 50' : 14'.$$

Le quatrième terme ( $14'$ ) ajouté à 86, donne 100 minutes; c'est le *chara-vinaliguey*.

Il faut bien faire attention si le *bouja* est du nord ou du sud; c'est-à-dire, si la distance du Soleil au plus proche équinoxe est depuis le 12 Mars Indien, jusqu'au 12 Septembre, ou depuis le 12 Septembre jusqu'au 12 Mars. Dans l'exemple présent, le *bouja* est du sud.

Multipliez le <i>chara-vinaliguey</i> .....	100'
par.....	6
vous aurez.....	600
Multipliez encore par.....	60
le produit donnera.....	36000
Divisez par 144, & vous aurez 250.	
Troisièmement, à l' <i>achacharam</i> .....	114' 14"
ajoutez ces.....	250. 00
Doublez la somme.....	364. 14
Et vous aurez.....	728. 28
Divisez par 25, vous trouverez.....	29. 8
Ces 29' 8" font le <i>avanaty</i> .	

## 6.° Trouver le *Viqchepam*, c'est-à-dire la latitude de la Lune.

Du lieu de la Lune pour le moment du milieu de

l'Eclipse.....	6' 23 <sup>d</sup> 22' 46"
ôtez le <i>ragou</i> ou lieu du nœud.....	1. 1. 33. 50
reste le <i>bouja</i> ou la distance de la Lune au nœud, de	5. 21. 48. 56
ôtez-les de.....	6. 0. 0. 0
vous aurez.....	0. 8. 11. 4
<i>Mém. 1772. 11.° Partie,</i>	kk

Cherchez, avec cet argument dans la Table, la latitude de la Lune, vous trouverez  $38^{\circ} 34''$ .

Cette latitude est boréale, parce que le *bouja* est du nord; c'est-à-dire, que la distance de la Lune à son nœud est moindre que 6 signes.

Quand le *vigchepam* & l'*avanaty* sont du même rhumb de vent (cela veut dire de la même dénomination) on les ajoute; mais s'ils sont l'un nord & l'autre sud, ou de différens rhumbs de vents, on en prend la différence.

Dans l'exemple présent,

Le <i>vigchepam</i> est de.....	$38^{\circ} 34''$ nord.
L' <i>avanaty</i> est de.....	$29. 8$ sud.
La différence est.....	$9. 26$

7.° *Trouver le Grahana-pramanam, ou la grandeur de l'Éclipse.*

Prenez le mouvement journalier du Soleil.....	$59' 45''$
multipliez-le par .....	$5$
vous aurez .....	$298. 45$
Divisez par 9 pour avoir le diamètre du Soleil de.....	$33. 12$
Prenez aussi le mouvement journalier de la Lune de.....	$835.$
Divisez par 25 pour avoir le diamètre de la Lune de.....	$33. 24$
Ajoutez ensemble ces diamètres, la somme sera .....	$66. 36$
Prenez-en la moitié.....	$33. 18$
ôtez l' <i>avanaty</i> (précepte 5) .....	$9. 26$
vous aurez pour reste.....	$23. 52$
Réduisez en tierces & divisez par le diamètre du Soleil	

réduit en secondes, vous aurez.....	$85920^m \left  \begin{array}{r} 1992'' \\ 43 \\ 4 \end{array} \right.$
ôtez la quantité constante.....	$4$
vous aurez.....	$\frac{39}{66}^{\text{es}}$

C'est la quantité du Soleil qui doit être éclipsee; ce qui répond à 7 doigts 48 minutes.

8.° *Trouver le Grahana-rtha-calām, c'est-à-dire la demi-durée de l'Éclipse.*

C'est le commencement & la fin. Les Brames, pour les



calculer, n'y emploient pas plus de façons que pour l'éclipse de Lune.

Du carré de la moitié de la somme des diamètres.....	3892004"
ôtez le carré de l'avanaty.....	320356
il restera.....	3571648
Tirez la racine carrée.....	113400"
Du mouvement journalier de la Lune.....	835' 00"
ôtez le mouvement du Soleil.....	59. 45
le reste est.....	775. 15

ou bien 46 mille 515 secondes. Divisez par ce nombre la racine carrée ci-dessus 113 mille 400 tierces, & vous opérerez en tout comme vous avez fait pour l'éclipse de Lune.

Vous aurez donc.....	113400" $\left  \begin{array}{l} 46515^{\circ} \\ 2^h \\ 26' \end{array} \right.$
----------------------	---

Négligez ce reste.....	12850.
La demi-durée de l'Éclipse fera donc de.....	2 26' 0"
Le milieu ayant été calculé pour.....	25. 15. 28
On aura le commencement à.....	22. 49. 28
& la fin à.....	27. 41. 28
La durée du jour ayant été trouvée comme ci-dessus, de.....	29. 23. 52
on aura le midi à.....	14. 41. 56
& par conséquent le commencement de l'Éclipse dans l'après-midi à.....	8. 7. 32
le milieu à.....	10. 33. 32
& la fin à.....	12. 52. 32
Durée de l'Éclipse.....	4. 52. 00

& l'Éclipse commencera par la partie du nord-ouest, & finira par le sud-est du Soleil.

*En heures Européennes.*

Commencement à.....	3. 15. 1
Milieu à.....	4. 13. 25
Fin à.....	5. 11. 49
Durée de l'Éclipse.....	1. 56. 48

K k ij

Me sera-t-il permis de conclure qu'on ne trouve chez aucune autre nation Orientale que chez les Indiens, pas même chez les Chinois, dont il semble cependant qu'on ait pris plaisir à nous vanter les anciennes connoissances en Astronomie, des traces aussi évidentes de l'antiquité de cette Science? Tout semble concourir à prouver que les Brame ne possèdent aujourd'hui que les débris d'une science qui a été cultivée avec le plus grand succès, bien des siècles avant J. C. Le climat de l'Inde, comme je l'ai déjà remarqué, est si chaud que les Brame, depuis tant de siècles qu'ils existent, n'ont pu faire le moindre pas en avant pour perfectionner une si belle science : les débris qu'ils en conservent (peut-être encore avec assez de peines) leur viennent d'un climat plus tempéré : peut-être eux-mêmes sont-ils originaires de ce climat, tel qu'il soit. Les Tamouls, à Pondichery, m'ont dit que les Brame venoient du nord (*voyez page 172*). Les restes de cette Astronomie m'avoient paru, par ces raisons, très-précieux à recueillir.

Il y auroit, sans doute, matière à faire des remarques curieuses & intéressantes sur cette Astronomie; mais les différentes autres parties du Journal de mon voyage m'ont occupé jusqu'à ce moment, & m'occupent encore à un point que je ne peux rien tenter sur cette partie avant d'avoir mis fin au reste de ma narration.

Je dirai seulement, en passant, que la théorie de la Lune, telle que les Indiens l'ont aujourd'hui, toute imparfaite qu'elle est encore, est certainement le fruit de méditations profondes, auxquelles les Brame de nos jours me paroissent bien éloignés de vouloir & de pouvoir se livrer.

La période de 248 jours, qui d'abord ne paroît pas réfléchie, a beaucoup de ressemblance avec notre hypothèse elliptique simple. Il m'a paru que les Astronomes qui sont les Auteurs de cette période ont supposé, pour plus grande facilité, l'apogée de la Lune immobile, & qu'ils ont attribué à la Lune le mouvement de l'apogée; en effet, si l'on suppose

la Lune apogée; par exemple, le 1.<sup>er</sup> Janvier à midi, il est certain qu'au bout de 248 jours elle se retrouvera encore apogée à midi. Il faut de plus observer une chose digne de remarque; c'est que les diamètres apparens de la Lune, que l'on tire de la période de 248 jours des Brames, cadrent assez bien avec ceux que l'on déduit de l'hypothèse elliptique simple : car, quoique le diamètre de la Lune ne soit pas, rigoureusement parlant, la vingt-cinquième partie de son mouvement diurne; cependant il est vrai de dire qu'il en approche beaucoup dans le cas où l'on emploie l'hypothèse elliptique simple pour représenter le mouvement de la Lune dans le temps des syzygies, le seul point, comme je l'ai fait observer, dans lequel les Brames considèrent le mouvement de la Lune; en sorte qu'aucun autre nombre que 25 ne satisfait aussi-bien à la question. Il est aisé de se convaincre de cette vérité, en comparant les diamètres de la Lune tirés de son mouvement journalier pendant la période de 248 jours des Brames, avec ceux que donnent M.<sup>rs</sup> Cassini & Halley, dans leurs Tables pour le temps des syzygies.

*TABLE du mouvement journalier de la quatrième période, ou de deux cents quarante-huit jours de la Lune.*

				Différ.					Différ.
Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Min.	Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Min.
1.	0.	12.	3.		11.	4.	21.	58.	
2.	0.	24.	9.	723.	12.	5.	6.	8.	840.
3.	1.	6.	22.	726.	13.	5.	20.	25.	850.
4.	1.	18.	44.	733.	14.	6.	4.	44.	857.
5.	2.	1.	19.	742.	15.	6.	19.	2.	859.
6.	2.	14.	9.	755.	16.	7.	3.	15.	858.
7.	2.	27.	13.	770.	17.	7.	17.	22.	853.
8.	3.	10.	33.	784.	18.	8.	1.	17.	847.
9.	3.	24.	9.	800.	19.	8.	15.	1.	835.
10.	4.	7.	58.	816.	20.	8.	28.	29.	824.
11.	4.	21.	58.	829.					

Suite de la *Table du mouvement Journalier de la Lune.*

				Différ.					Différ.
<i>Jourt.</i>	<i>Sig.</i>	<i>Deg.</i>	<i>Min.</i>	<i>Min.</i>	<i>Jourt.</i>	<i>Sig.</i>	<i>Deg.</i>	<i>Min.</i>	<i>Min.</i>
20.	8.	28.	29.		55.	0.	4.	49.	
21.	9.	11.	42.	808.	56.	0.	16.	52.	723.
22.	9.	24.	40.	793.	57.	0.	28.	58.	723.
23.	10.	7.	23.	778.	58.	1.	11.	10.	726.
24.	10.	19.	52.	763.	59.	1.	23.	31.	732.
25.	11.	2.	10.	749.	60.	2.	6.	5.	741.
26.	11.	14.	19.	738.	61.	2.	18.	52.	754.
27.	11.	26.	24.	729.	62.	3.	1.	55.	767.
28.	0.	8.	26.	725.	63.	3.	15.	14.	783.
29.	0.	20.	30.	722.	64.	3.	28.	47.	799.
30.	1.	2.	38.	724.	65.	4.	12.	35.	813.
31.	1.	14.	55.	728.	66.	4.	26.	34.	828.
32.	1.	27.	23.	737.	67.	5.	10.	44.	839.
33.	2.	10.	4.	748.	68.	5.	24.	59.	850.
34.	2.	23.	0.	761.	69.	6.	9.	17.	855.
35.	3.	6.	12.	776.	70.	6.	23.	36.	858.
36.	3.	19.	39.	792.	71.	7.	7.	51.	859.
37.	4.	3.	21.	807.	72.	7.	21.	58.	855.
38.	4.	17.	15.	822.	73.	8.	5.	55.	847.
39.	5.	1.	20.	834.	74.	8.	19.	40.	837.
40.	5.	15.	33.	845.	75.	9.	3.	10.	825.
41.	5.	29.	51.	853.	76.	9.	16.	25.	810.
42.	6.	14.	10.	858.	77.	9.	29.	24.	795.
43.	6.	28.	27.	859.	78.	10.	12.	8.	779.
44.	7.	12.	37.	857.	79.	10.	24.	39.	764.
45.	7.	26.	39.	850.	80.	11.	6.	58.	751.
46.	8.	10.	30.	842.	81.	11.	19.	8.	739.
47.	8.	4.	7.	831.	82.	0.	1.	13.	730.
48.	9.	7.	29.	817.	83.	0.	13.	15.	725.
49.	9.	20.	35.	802.	84.	0.	25.	19.	722.
50.	10.	3.	26.	786.	85.	1.	7.	27.	724.
51.	10.	16.	2.	771.	86.	1.	19.	43.	728.
52.	10.	28.	26.	756.	87.	2.	2.	10.	736.
53.	11.	10.	40.	744.	88.	2.	14.	49.	747.
54.	11.	22.	46.	734.	89.	2.	27.	43.	759.
55.	0.	4.	49.	726.	90.	3.	10.	53.	774.

## Suite de la Table du mouvement Journalier de la Lune.

				Différ.					Différ.
Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Min.	Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Min.
90.	3.	10.	53.		125.	6.	28.	10.	
91.	3.	24.	18.	790.	126.	7.	12.	25.	858.
92.	4.	7.	58.	805.	127.	7.	26.	33.	855.
93.	4.	21.	52.	820.	128.	8.	10.	32.	848.
94.	5.	5.	56.	834.	129.	8.	24.	18.	839.
95.	5.	20.	8.	844.	130.	9.	7.	50.	826.
96.	6.	4.	26.	852.	131.	9.	21.	7.	812.
97.	6.	18.	45.	858.	132.	10.	4.	8.	797.
98.	7.	3.	2.	859.	133.	10.	16.	54.	781.
99.	7.	17.	13.	857.	134.	10.	29.	26.	766.
100.	8.	1.	17.	851.	135.	11.	11.	46.	752.
101.	8.	15.	8.	844.	136.	11.	23.	58.	740.
102.	8.	28.	47.	831.	137.	0.	6.	3.	732.
103.	9.	12.	10.	819.	138.	0.	18.	5.	725.
104.	9.	25.	18.	803.	139.	1.	0.	8.	722.
105.	10.	8.	11.	788.	140.	1.	12.	16.	723.
106.	10.	20.	48.	773.	141.	1.	24.	30.	728.
107.	11.	3.	14.	757.	142.	2.	6.	56.	734.
108.	11.	15.	28.	746.	143.	2.	19.	33.	746.
109.	11.	27.	36.	734.	144.	3.	2.	26.	757.
110.	0.	9.	39.	728.	145.	3.	15.	34.	773.
111.	0.	21.	41.	723.	146.	3.	28.	57.	788.
112.	1.	3.	46.	722.	147.	4.	12.	36.	803.
113.	1.	15.	58.	725.	148.	4.	26.	27.	819.
114.	1.	28.	18.	732.	149.	5.	10.	31.	831.
115.	2.	10.	50.	740.	150.	5.	24.	42.	844.
116.	2.	23.	36.	752.	151.	6.	8.	59.	851.
117.	3.	6.	37.	766.	152.	6.	23.	18.	857.
118.	3.	19.	54.	781.	153.	7.	7.	36.	859.
119.	4.	3.	26.	797.	154.	7.	21.	48.	858.
120.	4.	17.	12.	812.	155.	8.	5.	52.	852.
121.	5.	1.	11.	826.	156.	8.	19.	46.	844.
122.	5.	15.	19.	839.	157.	9.	3.	26.	834.
123.	5.	29.	34.	848.	158.	9.	16.	51.	820.
124.	6.	13.	52.	855.	159.	10.	0.	11.	805.
125.	6.	28.	10.	858.	160.	10.	12.	55.	790.

				Différ.					Différ.
Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Min.	Jours.	Sig.	Deg.	Min.	Min.
160.	10.	12.	55.		195.	1.	17.	4.	
161.	10.	25.	34.	774.	196.	1.	29.	18.	726.
162.	11.	8.	1.	759.	197.	2.	11.	42.	734.
163.	11.	20.	17.	747.	198.	2.	24.	18.	744.
164.	0.	2.	25.	736.	199.	3.	7.	9.	756.
165.	0.	14.	29.	728.	200.	3.	20.	15.	771.
166.	0.	26.	31.	724.	201.	4.	3.	37.	786.
167.	1.	8.	36.	722.	202.	4.	17.	14.	802.
168.	1.	20.	46.	725.	203.	5.	1.	5.	817.
169.	2.	3.	5.	730.	204.	5.	15.	7.	831.
170.	2.	15.	36.	739.	205.	5.	29.	17.	842.
171.	2.	28.	20.	751.	206.	6.	13.	34.	850.
172.	3.	11.	19.	764.	207.	6.	27.	53.	857.
173.	3.	24.	34.	779.	208.	7.	12.	11.	859.
174.	4.	8.	4.	795.	209.	7.	26.	24.	858.
175.	4.	21.	49.	810.	210.	8.	10.	29.	853.
176.	5.	5.	46.	825.	211.	8.	24.	23.	845.
177.	5.	19.	53.	837.	212.	9.	8.	5.	834.
178.	6.	4.	8.	847.	213.	9.	21.	32.	822.
179.	6.	18.	27.	855.	214.	10.	4.	44.	807.
180.	7.	2.	45.	859.	215.	10.	17.	40.	792.
181.	7.	17.	0.	858.	216.	11.	0.	21.	776.
182.	8.	1.	10.	855.	217.	11.	12.	49.	761.
183.	8.	15.	9.	850.	218.	11.	25.	6.	748.
184.	8.	28.	57.	839.	219.	0.	7.	14.	737.
185.	9.	12.	30.	828.	220.	0.	19.	18.	728.
186.	9.	25.	49.	813.	221.	1.	1.	20.	724.
187.	10.	8.	52.	799.	222.	1.	13.	25.	722.
188.	10.	21.	39.	783.	223.	1.	25.	34.	725.
189.	11.	4.	13.	767.	224.	2.	7.	52.	729.
190.	11.	16.	34.	754.	225.	2.	20.	21.	738.
191.	11.	28.	46.	741.	226.	3.	3.	4.	749.
192.	0.	10.	52.	732.	227.	3.	16.	2.	763.
193.	0.	22.	55.	726.	228.	3.	29.	15.	778.
194.	1.	4.	58.	723.	229.	4.	12.	43.	793.
195.	1.	17.	4.	723.	230.	4.	26.	27.	808.

Suite

Suite de la *Table du mouvement Journalier de la Lune.*

				Différ.					Différ.
<i>Jours.</i>	<i>Sig.</i>	<i>Deg.</i>	<i>Min.</i>	<i>Min.</i>	<i>Jours.</i>	<i>Sig.</i>	<i>Deg.</i>	<i>Min.</i>	<i>Min.</i>
230.	4.	26.	27.		239.	9.	3.	35.	
231.	5.	10.	22.	824.	240.	9.	17.	11.	829.
232.	5.	24.	29.	835.	241.	10.	0.	31.	816.
233.	6.	8.	42.	847.	242.	10.	13.	35.	800.
234.	6.	23.	0.	853.	243.	10.	26.	25.	784.
235.	7.	7.	19.	858.	244.	11.	9.	00.	770.
236.	7.	21.	36.	859.	245.	11.	21.	22.	755.
237.	8.	5.	46.	857.	246.	0.	3.	35.	742.
238.	8.	19.	46.	850.	247.	0.	15.	41.	733.
239.	9.	3.	35.	840.	248.	0.	27.	44.	726.
									723.

TABLE de la *Latitude de la Lune à l'Écliptique.*

<i>Deg.</i>	<i>Min.</i>	<i>Sec.</i>	<i>Deg.</i>	<i>Min.</i>	<i>Sec.</i>
1.	4.	43.	10.	46.	53.
2.	9.	29.	11.	51.	32.
3.	14.	8.	12.	56.	8.
4.	18.	51.	13.	60.	43.
5.	23.	32.	14.	65.	19.
6.	28.	14.	15.	69.	54.
7.	32.	55.	16.	74.	24.
8.	37.	40.	17.	78.	54.
9.	42.	19.	18.	83.	24.

*Nota.* La Table ci-dessus a été imprimée sur l'original de la main de mon Interprète ; je n'ai rien voulu changer à la forme, ce qui fait qu'il y a une petite attention à faire pour les différences ; il faut toujours prendre celles qui sont mises après le jour donné ; cela vient de ce que tous les jours sont complets, & qu'il n'y a point ici de (00) à la tête de la Table, parce que dans le calcul du lieu de la Lune, il ne peut jamais rester (0) après la quatrième division.

Les Brames supposent le mouvement moyen journalier de la Lune de 791 minutes.

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

L I

<i>TABLE pour convertir les heures Indiennes en Européennes.</i>			<i>TABLE pour convertir les heures Européennes en Indiennes.</i>		
<i>Heures.</i>	<i>H.</i>	<i>M.</i>	<i>Heures.</i>	<i>H.</i>	<i>M.</i>
<i>Minutes.</i>	<i>M.</i>	<i>S.</i>	<i>Minutes.</i>	<i>M.</i>	<i>S.</i>
<i>Secondes.</i>	<i>S.</i>	<i>T.</i>	<i>Secondes.</i>	<i>S.</i>	<i>T.</i>
<i>Tierces.</i>	<i>T.</i>	<i>Q.</i>	<i>Tierces.</i>	<i>T.</i>	<i>Q.</i>
1.		24.	1.	2.	30.
2.		48.	2.	5.	
3.	1.	12.	3.	7.	30
4.	1.	36.	4.	10.	
5.	2.		5.	12.	30.
6.	2.	24.	6.	15.	
7.	2.	48.	7.	17.	30.
8.	3.	12.	8.	20.	
9.	3.	36.	9.	22.	30.
10.	4.		10.	25.	
20.	8.		11.	27.	30.
30.	12.		12.	30.	
40.	16.		13.	32.	30.
50.	20.		14.	35.	
60.	24.		15.	37.	30.
			16.	40.	
			17.	42.	30.
			18.	45.	
			19.	47.	30.
			20.	50.	
			21.	52.	30.
			22.	55.	
			23.	57.	30.
			24.	60.	





*R E C H E R C H E S*  
*SUR LE CALCUL INTÉGRAL*  
*ET*  
*SUR LE SYSTÈME DU MONDE.*

Par M. DE LA PLACE.

I.

**J**E me propose de donner dans ce Mémoire, une nouvelle Méthode pour intégrer par approximation les équations différentielles, avec une application de cette méthode au mouvement des Planètes premières. Cette matière, l'une des plus intéressantes de toute l'analyse, a déjà donné lieu à des recherches très-profondes; heureux si celles que je présente ici aux Géomètres peuvent mériter leur attention!

C'est principalement dans l'application de l'analyse au système du monde, que l'on a besoin de méthodes simples & convergentes pour intégrer par approximation les équations différentielles; celles du mouvement des corps célestes se présentent en effet sous une forme si compliquée, qu'elles ne laissent aucun espoir de réussir jamais à les intégrer rigoureusement; mais comme les valeurs des variables sont à peu près connues, on imagina de substituer à leur place, les quantités connues dont elles diffèrent toujours fort peu, plus une très-petite quantité; & en négligeant le quarré & les puissances supérieures de cette nouvelle indéterminée, on réduisit le Problème à l'intégration d'autant d'équations différentielles linéaires qu'il y avoit de variables. Il ne restoit plus ainsi qu'à intégrer ces équations; or les Géomètres imaginèrent pour cela différentes méthodes, dont la plus ingénieuse me paroît être celle des coefficients indéterminés de M. d'Alembert. Ayant ainsi une première valeur approchée des variables, on substitua dans les équations différentielles, au

lieu de chaque variable, cette valeur, plus une très-petite indéterminée, dont on négligea le carré & les puissances supérieures, & en continuant d'opérer ainsi, on eut une seconde, une troisième, &c. valeurs approchées. Cette méthode, analogue à celle de Newton, pour déterminer par approximation les racines des équations numériques, se présenta naturellement aux Géomètres, qui résolurent les premiers le Problème des Trois-corps; appliquée à la recherche du mouvement de la Lune, elle avoit l'inconvénient de donner dans la seconde approximation des arcs-de-cercle, dans le cas même où il étoit démontré qu'il ne devoit point y en avoir; mais on parvint à les faire disparaître par différens moyens.

Lorsque la Planète n'a qu'un Satellite, la méthode que nous venons d'exposer est suffisante; mais quand elle en a plusieurs, ou lorsqu'il s'agit de déterminer le mouvement de deux ou d'un plus grand nombre de Planètes autour du Soleil, on trouve par la seconde approximation, des termes du même ordre que ceux qui résultent de la première, tandis qu'on les suppose d'un ordre inférieur. M. de la Grange est le premier qui ait senti & résolu cette difficulté par une analyse sublime, dans son excellente pièce sur les inégalités des Satellites de Jupiter, & dans le *tome III des Mémoires de Turin*. M.<sup>rs</sup> d'Alembert & de Condorcet ont depuis donné des méthodes fort ingénieuses pour le même objet; celle que je propose ici est, si je ne me trompe, absolument nouvelle & d'ailleurs très-utile, lorsque les variables sont fonctions de quantités périodiques & d'autres quantités croissantes très-lentement, ce qui est le cas de toutes les questions relatives à l'Astronomie-physique. Elle consiste à faire varier les constantes arbitraires dans les intégrales approchées, & à trouver ensuite par l'intégration, leurs valeurs pour un temps quelconque. Cette méthode conduit à des équations fort simples & très-faciles à intégrer, quel que soit le nombre des variables, & c'est-là un de ses principaux avantages. J'en ai donné une idée fort succincte dans le Volume de l'Académie pour

l'année 1772, I.<sup>re</sup> partie, page 651. Je vais la développer ici avec plus d'étendue, & l'appliquer au mouvement des Planètes. Les Exemples suivans la feront mieux entendre que des généralités toujours difficiles à saisir.

## E X E M P L E I.

Soit proposé d'intégrer l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y = \alpha y \cdot \cos. 2t; \quad (1).$$

$\alpha$  étant supposé fort petit &  $\partial t$  constant. J'intègre d'abord celle-ci,  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y = 0$ ; ce qui donne par les méthodes connues,  $y = p \cdot \sin. t + q \cdot \cos. t$ ;  $p$  &  $q$  étant deux constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de  $y$  & de  $\frac{\partial y}{\partial t}$ , lorsque  $t = 0$ ; c'est l'expression de  $y$ , en  $y$  supposant  $\alpha = 0$ . Soit maintenant,

$$y = p \cdot \sin. t + q \cdot \cos. t + \alpha z,$$

& l'équation (1) donnera, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + z = \frac{p}{2} \cdot \sin. 3t - \frac{p}{2} \cdot \sin. t - \frac{q}{2} \cos. 3t + \frac{q}{2} \cdot \cos. t;$$

d'où l'on aura en intégrant,

$$z = \frac{p}{4} \cdot t \cdot \cos. t + \frac{q}{4} \cdot t \cdot \sin. t - \frac{p}{16} \cdot \sin. 3t - \frac{q}{16} \cdot \cos. 3t;$$

il est inutile d'ajouter ici de nouvelles constantes, parce qu'elles sont déjà renfermées dans la première valeur de  $y$ ; partant, on aura

$$y = \left[ p + \frac{\alpha}{4} q t \right] \sin. t + \left[ q + \frac{\alpha}{4} p t \right] \cos. t \left\{ \begin{array}{l} (2). \\ - \frac{\alpha p}{16} \cdot \sin. 3t - \frac{\alpha q}{16} \cdot \cos. 3t \end{array} \right.$$

Je fais ensuite dans l'équation (1),  $t = T + t$ ,  $T$  étant constant; elle devient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y = \alpha y \cos. (2T + 2t);$$

& l'on trouvera en l'intégrant, en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha$  inclusivement, & en ajoutant les constantes arbitraires de manière qu'elles coïncident avec celles de l'équation (2), lorsque  $\alpha = 0$ ,

$$y = \left. \begin{aligned} & ['p + \frac{\alpha}{4} \cdot 'q \cdot t_1] \cdot \sin.(T + t_1) \\ & + ['q + \frac{\alpha}{4} \cdot 'p \cdot t_1] \cdot \cos.(T + t_1) \\ & - \frac{\alpha \cdot 'p}{16} \cdot \sin.(3T + 3t_1) \\ & - \frac{\alpha \cdot 'q}{16} \cdot \cos.(3T + 3t_1) \end{aligned} \right\} (3).$$

' $p$  & ' $q$  étant deux nouvelles constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de  $y$  & de  $\frac{\partial y}{\partial t_1}$ , lorsque  $t_1 = 0$ .

On pourroit simplifier un peu le calcul, en substituant tout de suite dans l'équation (1), au lieu de  $t$ ,  $T + t_1$ , & en parvenant ainsi à l'équation (3); car l'équation (2) peut aisément s'en déduire, en y faisant  $T = 0$ ; partant,  $t = t_1$ , ' $p = p$ , & ' $q = q$ .

Si l'on avoit  $\alpha = 0$ , on auroit, en comparant les équations (2) & (3), ' $p = p$ , ' $q = q$ ; Donc,  $p$  ne diffère de ' $p$  &  $q$  de ' $q$ , que de quantités de l'ordre  $\alpha$ ; soit donc, ' $p = p + \delta p$ , ' $q = q + \delta q$ ,  $\delta p$  &  $\delta q$  étant de l'ordre  $\alpha$ ; cela posé, si l'on retranche l'équation (2) de l'équation (3), après avoir substitué dans celle-ci  $t = T$ , au lieu de  $t_1$ , on aura, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ,  $0 = [\delta p - \frac{\alpha}{4} T \cdot q] \cdot \sin.t + [\delta q - \frac{\alpha}{4} T \cdot p] \cdot \cos.t$ , équation qui à cause de  $t$  variable & de  $T$  supposé constant, se partage dans les deux suivantes,

$$\delta p = \frac{\alpha}{4} \cdot T \cdot q; (4).$$

$$\delta q = \frac{\alpha}{4} \cdot T \cdot p; (5).$$

On voit ainsi que  $p$  &  $q$  sont fonctions de  $\frac{\alpha}{4}.T$ ; pour déterminer ces fonctions, soit  $\frac{\alpha}{4}.T = x$ , on aura, comme l'on fait,

$$p = p + \delta p = p + x \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{\partial \partial p}{\partial x^2} + \&c.$$

$$q = q + \delta q = q + x \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{\partial \partial q}{\partial x^2} + \&c.$$

partant

$$\delta p = x \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{\partial \partial p}{\partial x^2} + \&c.$$

$$\delta q = x \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{\partial \partial q}{\partial x^2} + \&c.$$

les équations (4) & (5) deviendront ainsi, en négligeant les quantités de l'ordre  $x^2$ , ou, ce qui revient au même, en comparant les termes multipliés par  $x$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = q; (6). \quad \frac{\partial q}{\partial x} = p; (7).$$

Pour intégrer ces deux équations, je fais  $p = fe^{nx}$ , &  $q = ge^{nx}$ ,  $e$  étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, &  $f$  &  $n$  étant constants; en substituant ces valeurs de  $p$  & de  $q$  dans les équations différentielles (6) & (7), on aura,  $fn = g$ , &  $gn = f$ , d'où l'on tire  $n = \pm 1$ ; partant, on aura  $p = fe^x + 'fe^{-x}$ ; &  $q = ge^x + 'ge^{-x}$ ; de plus on a  $f = g$  &  $'f = -'g$ ;

donc,  $p = fe^{\frac{\alpha}{4}T} + 'f \cdot e^{-\frac{\alpha}{4}T}$ ; &

$q = fe^{\frac{\alpha}{4}T} - 'f \cdot e^{-\frac{\alpha}{4}T}$ ,  $f$  &  $'f$  étant deux nouvelles constantes arbitraires; ce sont les expressions de  $p$  & de  $q$ , après le temps  $T$ , ou, ce qui est la même chose, les valeurs de  $p$  & de  $q$ ; maintenant, si l'on substitue dans l'équation (3) ces valeurs de  $p$  & de  $q$ , & que l'on y suppose  $t = 0$ , elle deviendra

$$y = fe^{\frac{\alpha}{4}T} \cdot [\sin.T + \cos.T - \frac{\alpha}{16} \cdot \sin.3T - \frac{\alpha}{16} \cdot \cos.3T] + 'fe^{-\frac{\alpha}{4}T} \cdot [\sin.T - \cos.T - \frac{\alpha}{16} \cdot \sin.3T + \frac{\alpha}{16} \cdot \cos.3T] \quad (\sigma)$$

c'est l'expression de  $y$ , après le temps quelconque  $T$ , en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ .

Si l'on vouloit porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , on le feroit d'une manière semblable, en faisant varier les nouvelles arbitraires  $f$  &  $'f$ .

On pourroit parvenir encore à l'équation  $(\sigma)$  de cette manière, je reprends l'équation  $(2)$ ,

$$y = (p + \frac{\alpha}{4}qt) \cdot \sin.t + (q + \frac{\alpha}{4}pt) \cdot \cos.t - \frac{\alpha p}{16} \cdot \sin.3t - \frac{\alpha q}{16} \cdot \cos.3t \quad (2).$$

& j'observe que puisqu'on a négligé les termes de l'ordre  $\alpha^2$ , on peut substituer dans les termes de l'ordre  $\alpha$ , au lieu de  $p$  &  $q$ , d'autres quantités  $'p$  &  $'q$ , telles que leurs différences d'avec  $p$  &  $q$ , soient de l'ordre  $\alpha$ , en sorte que  $'p$  &  $'q$  feroient constans, si l'on avoit  $\alpha = 0$ ; je suppose donc  $'p$  &  $'q$  tels que l'on ait,  $'p - p = \frac{\alpha}{4}q.t$ , &  $'q - q = \frac{\alpha}{4}p.t$ ;

l'équation  $(2)$  donnera

$$y = 'p \cdot \sin.t + 'q \cdot \cos.t - \frac{\alpha \cdot 'p}{16} \cdot \sin.3t - \frac{\alpha \cdot 'q}{16} \cdot \cos.3t;$$

de plus, on aura comme précédemment, en faisant  $\frac{\alpha}{4}t = x$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = q, \text{ \& \, } \frac{\partial q}{\partial x} = p, \text{ d'où l'on tirera l'équation}$$

$$y =$$

$$y = fe^{\frac{\alpha}{4}t} \cdot [\sin.t + \cos.t - \frac{\alpha}{16} \cdot \sin.3t - \frac{\alpha}{16} \cdot \cos.3t] \\ + fe^{-\frac{\alpha}{4}t} \cdot [\sin.t - \cos.t - \frac{\alpha}{16} \cdot \sin.3t + \frac{\alpha}{16} \cdot \cos.3t]$$

la même que l'équation (σ).

Quoique de cette seconde manière, le calcul soit plus simple, cependant je préférerai dans la suite la première qui me paroît plus directe.

### EXEMPLE II.

Soit encore l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y = \alpha y^2 \cdot \sin.3t; \quad (8)$$

en intégrant d'abord celle-ci,  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y = 0$ , on aura,  
 $y = p \cdot \sin.t + q \cdot \cos.t$ ,  $p$  &  $q$  étant deux constantes arbitraires dépendantes des valeurs de  $y$  & de  $\frac{\partial y}{\partial t}$ , lorsque  $t = 0$ .

On fera ensuite  $y = p \cdot \sin.t + q \cdot \cos.t + \alpha z$ , & l'équation (8) donnera, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + z = \frac{pq}{2} \cdot \cos.t + \frac{q^2 - p^2}{4} \cdot \sin.t + \frac{p^2 + q^2}{2} \cdot \sin.3t \\ + \frac{q^2 - p^2}{4} \cdot \sin.5t - \frac{pq}{2} \cdot \cos.5t;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$z = \frac{pq.t}{4} \cdot \sin.t + \frac{(p^2 - q^2).t}{8} \cdot \cos.t - \frac{p^2 + q^2}{16} \cdot \sin.3t \\ + \frac{p^2 - q^2}{96} \cdot \sin.5t + \frac{pq}{48} \cdot \cos.5t;$$

partant,

$$y = \left[ p + \frac{\alpha pq}{4} \cdot t \right] \cdot \sin.t + \left[ q + \alpha \cdot \frac{p^2 - q^2}{8} \cdot t \right] \cdot \cos.t \\ - \alpha \cdot \frac{p^2 + q^2}{16} \cdot \sin.3t + \alpha \cdot \frac{p^2 - q^2}{96} \cdot \sin.5t \\ + \frac{\alpha pq}{48} \cdot \cos.5t \quad (9).$$

Si l'on fait présentement dans l'équation (8),  $t = T + t_1$ , elle deviendra

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2} + y = \alpha y^2 \cdot \sin. 3 (T + t_1),$$

& en l'intégrant on aura,

$$\left. \begin{aligned} y = & \left[ 'p + \alpha \cdot \frac{'p \cdot 'q}{4} t_1 \right] \cdot \sin. (T + t_1) \\ & + \left[ 'q + \alpha \cdot \frac{'p^2 + 'q^2}{8} t_1 \right] \cdot \cos. (T + t_1) \\ & - \alpha \cdot \frac{'p^2 + 'q^2}{16} \cdot \sin. 3 (T + t_1) \\ & + \alpha \cdot \frac{'p^2 - 'q^2}{96} \cdot \sin. 5 (T + t_1) \\ & - \alpha \cdot \frac{'p \cdot 'q}{48} \cdot \cos. 5 (T + t_1) \end{aligned} \right\} (10).$$

'p & 'q étant deux nouvelles constantes arbitraires dépendantes des valeurs de y & de  $\frac{\partial y}{\partial t_1}$ , lorsque  $t_1 = 0$ .

Si l'on avoit  $\alpha = 0$ , on auroit ' $p = p$  & ' $q = q$ , donc ' $p$  & ' $q$  ne diffèrent de  $p$  & de  $q$  que de quantités de l'ordre  $\alpha$ ; soit donc ' $p = p + \delta p$ , & ' $q = q + \delta q$ , on aura, en comparant les équations (9) & (10), & négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ,

$$\delta p = \alpha \cdot \frac{pq}{4} \cdot T; \quad \delta q = \alpha \cdot \frac{(p^2 - q^2)}{8} \cdot T;$$

d'où l'on voit que  $p$  &  $q$  sont fonctions de  $\alpha T$ ; soit  $\frac{\alpha T}{8} = x$ , & l'on aura comme dans l'exemple précédent,

$\frac{\partial p}{\partial x} = 2pq$ ;  $\frac{\partial q}{\partial x} = p^2 - q^2$ ; en multipliant la première de ces équations par  $\sqrt{-1}$ , & en l'ajoutant & la retranchant successivement de la seconde, on formera les deux suivantes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} + \sqrt{-1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= p^2 - q^2 + 2pq\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})^2 \\ \frac{\partial q}{\partial x} - \sqrt{-1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= p^2 - q^2 - 2pq\sqrt{-1} = (p - q\sqrt{-1})^2. \end{aligned}$$



Soit  $p + q\sqrt{-1} = s'\sqrt{-1}$ , &  $p - q\sqrt{-1} = s\sqrt{-1}$ ,  
on aura

$$\frac{\partial s'}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} - \sqrt{-1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$- \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} + \sqrt{-1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x};$$

donc  $\frac{\partial s'}{\partial x} = -s^2$ , &  $\frac{\partial s}{\partial x} = (s')^2$ ; en différentiant  
cette dernière équation, on aura

$$\frac{\partial \partial s}{\partial x^2} = 2s' \frac{\partial s'}{\partial x} = -2s' \cdot s^2 = -2s^2 \cdot \sqrt{-1} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right);$$

donc  $\left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial \partial s}{\partial x} = -2s^2 \partial s$ , & en intégrant,

$$\frac{2}{3} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} a^3 - \frac{2}{3} s^3, \text{ } a \text{ étant une constante arbitraire;}$$

partant,  $\frac{\partial s}{(a^3 - s^3)^{\frac{1}{2}}} = \partial x$ , &  $h + \int \frac{\partial s}{(a^3 - s^3)^{\frac{1}{2}}} = x$ ;

$h$  &  $a$  étant arbitraires; de-là on aura  $s$ , & par conséquent  
 $p$  &  $q$  en  $x$ , & restituant au lieu de  $x$  la valeur  $\frac{\alpha T}{8}$ , on  
aura les valeurs de  $p$  & de  $q$ , & l'équation (10) donnera,  
en y supposant  $t_i = 0$ ,

$$y = p \cdot \sin. T + q \cdot \cos. T - \alpha \cdot \frac{({}'p^2 + {}'q^2)}{2} \cdot \sin. 3T$$

$$+ \alpha \cdot \frac{{}'p^2 - {}'q^2}{96} \cdot \sin. 5T$$

$$+ \alpha \cdot \frac{{}'p \cdot {}'q}{48} \cdot \cos. 5T;$$

c'est l'expression de  $y$ , après le temps quelconque  $T$ ; toute  
la difficulté se réduit donc à intégrer la quantité  $\frac{\partial s}{(a^3 - s^3)^{\frac{1}{2}}}$ ;

or elle n'est renfermée dans aucun des cas connus dans  
lesquels le binome  $x^m \partial x (a + b x^n)^p$  est intégrable; car,  
pour cela, il faut, comme l'on fait, que  $\frac{m+1}{n}$ , ou

$\frac{m+1}{n} + p$ , soient des nombres entiers, ce qui n'a point lieu pour la quantité,  $\partial s.(a^3 - s^3)^{-\frac{2}{3}}$ .

## E X E M P L E I I I.

Que l'on propose encore d'intégrer l'équation,

$$0 = \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + y - l + \alpha y^2; \quad (11).$$

On intégrera d'abord celle-ci,

$$0 = \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + y - l;$$

ce qui donne,

$$y = l + p \cdot \sin. t + q \cdot \cos. t;$$

$p$  &  $q$  étant des constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de  $y$  & de  $\frac{\partial y}{\partial t}$ , lorsque  $t = 0$ ; je fais ensuite,

$$y = l + p \cdot \sin. t + q \cdot \cos. t + \alpha z;$$

& substituant cette valeur de  $y$  dans l'équation (11), elle donne, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , & en intégrant,

$$z = - \frac{(2l^2 + p^2 + q^2)}{2} + \frac{q^2 - p^2}{6} \cdot \cos. 2t \\ + \frac{pq}{3} \cdot \sin. 2t + lpt \cdot \cos. t - lqt \cdot \sin. t;$$

donc,

$$y = l - \alpha \left\{ \frac{(2l^2 + p^2 + q^2)}{2} + (p - \alpha lqt) \cdot \sin. t \right. \\ \left. + (q + \alpha lpt) \cdot \cos. t; \right. \\ \left. + \alpha \cdot \frac{(q^2 - p^2)}{6} \cdot \cos. 2t + \frac{\alpha pq}{3} \cdot \sin. 2t \right\} \quad (12).$$

Que l'on fasse présentement dans l'équation (11),  $t = T + t$ ,  $T$  étant supposé constant, elle deviendra,

$$0 = \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + y - l + \alpha y^2;$$

d'où l'on tirera en l'intégrant, & négligeant les quantités

de l'ordre  $\alpha^2$ ,

$$y = l - \frac{\alpha(1^2 + {}^1p^2 + {}^1q^2)}{2} + \left. \begin{aligned} &({}^1p - \alpha l \cdot {}^1q \cdot t_1) \cdot \sin. (T + t_1) \\ &+ ({}^1q + \alpha l \cdot {}^1p \cdot t_1) \cdot \cos. (T + t_1) \\ &+ \frac{\alpha \cdot ({}^1q^2 - {}^1p^2)}{6} \cdot \cos. (2T + 2t_1) \\ &+ \frac{\alpha \cdot {}^1p \cdot {}^1q}{3} \cdot \sin. (2T + 2t_1) \end{aligned} \right\} (13).$$

${}^1p$  &  ${}^1q$  étant deux nouvelles constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de  $y$  & de  $\frac{\partial y}{\partial t_1}$ , lorsque  $t_1 = 0$ .

Présentement, si l'on avoit  $\alpha = 0$ , on auroit  ${}^1p = p$ ,  ${}^1q = q$ ; donc,  ${}^1p$  &  ${}^1q$ , ne diffèrent de  $p$  & de  $q$  que de quantités de l'ordre  $\alpha$ ; soit donc,

$${}^1p = p + \delta p, \text{ \& } {}^1q = q + \delta q.$$

Si l'on compare les équations (12) & (13), on aura, comme dans l'exemple précédent, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ,

$$\delta p = -\alpha l T \cdot q, \text{ \& } \delta q = \alpha l T \cdot p;$$

d'où l'on voit que  $p$  &  $q$  sont fonctions de  $\alpha l T$ ; soit  $\alpha l T = x$ , & l'on aura,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -q, \text{ \& } \frac{\partial q}{\partial x} = p;$$

en intégrant cette équation, on aura,

$p = e \cdot \cos. (x + \varpi)$ , &  $q = e \cdot \sin. (x + \varpi)$ ,  
 $e$  &  $\varpi$  étant deux nouvelles constantes arbitraires que l'on déterminera au moyen des valeurs de  $p$  & de  $q$ , lorsque  $x = 0$ ; on aura donc,

${}^1p = e \cdot \cos. (\alpha l T + \varpi)$ ;  ${}^1q = e \cdot \sin. (\alpha l T + \varpi)$ ,  
& l'équation (13) donnera, en y supposant  $t_1 = 0$ ,

$$y = l - \frac{\alpha \cdot (2l^2 + e^2)}{2} + e \cdot \sin. [T(1 + \alpha l) + \varpi] \\ - \frac{\alpha e^2}{6} \cdot \cos. [2T(1 + \alpha l) + 2\varpi];$$

c'est l'expression de  $y$  après le temps quelconque  $T$ , en négligeant la quantité de l'ordre  $\alpha^2$ .

Si l'on veut pousser l'approximation jusques aux quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , on fera,

$$y = l - \frac{\alpha(2l^2 + e^2)}{2} + e \cdot \sin. [t(1 + \alpha l) + \varpi] \\ - \frac{\alpha^2 e^2}{6} \cdot \cos. [2t(1 + \alpha l) + \varpi] + \alpha^2 \zeta,$$

& l'équation (11) donnera, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^3$ ,  $0 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta - 2l^3 - e^2 l$

$$- \frac{(18el^2 + 5e^3)}{6} \sin. [t(1 + \alpha l) + \varpi] \\ + e^2 l \cdot \cos. [2t(1 + \alpha l) + 2\varpi] \\ - \frac{e^3}{6} \cdot \sin. [3t(1 + \alpha l) + 3\varpi];$$

partant, en intégrant, & en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha$ , on aura,  $\zeta = 2l^3 + e^2 l$

$$- \frac{(18el^2 + 5e^3)}{12} t \cdot \cos. [t(1 + \alpha l) + \varpi] \\ + \frac{e^2 l}{3} \cdot \cos. [2t(1 + \alpha l) + 2\varpi] \\ - \frac{e^3}{48} \cdot \sin. [3t(1 + \alpha l) + 3\varpi],$$

&

$$y = l - \alpha l^2 - \frac{\alpha e^2}{2} + 2\alpha^2 l^3 \\ + \alpha^2 e^2 l + e \cdot \sin. [t(1 + \alpha l) + \varpi] \\ - \alpha^2 \cdot \frac{(18el^2 + 5e^3)}{12} \cdot t \cdot \cos. [t(1 + \alpha l) + \varpi] \\ - \left[ \frac{\alpha e^2}{6} - \frac{\alpha^2 e^2 l}{3} \right] \cdot \cos. [2t(1 + \alpha l) + 2\varpi] \\ - \frac{\alpha^3 e^3}{48} \cdot \sin. [3t(1 + \alpha l) + 3\varpi] \quad (14).$$

$e$  &  $\varpi$ , dépendans des valeurs de  $y$  & de  $\frac{\partial y}{\partial t}$ , lorsque  $t = 0$ .

Que l'on fasse présentement comme ci-dessus,  $t = T + t_1$ , dans l'équation (11), & l'on trouvera de la même manière que nous venons de conclure l'équation (14).

$$y = l - \alpha l^2 - \frac{\alpha \cdot {}^1e^2}{2} + 2\alpha^2 l^3 + \alpha^2 \cdot {}^1e \cdot {}^2l \left. \begin{aligned} &+ {}^1e \cdot \sin. [(T + t_1)(1 + \alpha l) + {}^1\omega] \\ &- \frac{\alpha^2 \cdot (18 \cdot {}^1e l^2 + 5 \cdot {}^1e^2)}{12} \cdot l_1 \cdot \cos. [(T + t_1)(1 + \alpha l) + {}^1\omega] \\ &- \left[ \frac{\alpha \cdot {}^1e^2}{6} - \frac{\alpha^2 \cdot {}^1e^2 \cdot l}{3} \right] \cdot \cos. [(2T + t_1)(1 + \alpha l) + 2 \cdot {}^1\omega] \\ &- \frac{\alpha^2 \cdot {}^1e^3}{48} \cdot \sin. [(3T + 3t_1)(1 + \alpha l) + 3 \cdot {}^1\omega] \end{aligned} \right\} (15).$$

${}^1e$  &  ${}^1\omega$  dépendans des valeurs de  $y$  & de  $\frac{\partial y}{\partial t_1}$ , lorsque

$t_1 = 0$ ; or, si on négligeoit les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , on auroit visiblement  ${}^1e = e$ , &  ${}^1\omega = \omega$ ; donc,  ${}^1e$  ne diffère de  $e$ , &  ${}^1\omega$  de  $\omega$ , que de quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ; soit donc,  ${}^1e = e + \delta e$ , &  ${}^1\omega = \omega + \delta \omega$ ; cela posé, les équations (14) & (15) donnent, en les comparant, & en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^3$ ,

$$\delta e \cdot \sin. [t(1 + \alpha l) + \omega] + e \delta \omega \cdot \cos. [t(1 + \alpha l) + \omega] \\ = - \frac{\alpha^3}{12} \cdot (18 e l^2 + 5 e^2) T \cdot \cos. [t(1 + \alpha l) + \omega];$$

d'où l'on tire,

$$\delta e = 0, \text{ \& } \delta \omega = - \frac{\alpha^3}{12} \cdot (18 l^2 + 5 e^2) \cdot T; \quad (16)$$

partant,  $e$  est constant, &  $\omega$  est fonction de

$$- \frac{\alpha^3}{12} \cdot (18 l^2 + 5 e^2) \cdot T;$$

en nommant donc  $x$  cette quantité, on aura,

$$\delta \omega = x \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{-x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial \delta \omega}{\partial x^2} + \&c.$$

& l'équation (16) donnera en comparant les termes multi-

pliés par  $x$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = -1$ ; partant,  $\omega = -x + \theta$ ,

$\theta$  étant une nouvelle constante arbitraire que l'on déterminera au moyen de la valeur de  $\omega$ , lorsque  $x = 0$ ;

$$\varpi = \theta - \frac{a^2}{12} \cdot (12l^2 + 5e^2) \cdot T;$$

l'équation (15) deviendra par conséquent en y supposant  $t_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} y = & 1 - al^2 - \frac{a^2e^2}{2} + 2a^2l^3 \\ & + a^2e^2l + e \cdot \sin. \left[ T(1 + al - \frac{3}{2}a^2l^2 - \frac{5}{12}a^2e^2) + \theta \right] \\ & - \frac{ae^2}{6} \cdot (1 - 2al) \cdot \cos. \left[ 2T(1 + al - \frac{3}{2}a^2l^2 - \frac{5}{12}a^2e^2) + 2\theta \right] \\ & - \frac{a^2e^2}{48} \cdot \sin. \left[ 3T(1 + al - \frac{3}{2}a^2l^2 - \frac{5}{12}a^2e^2) + 3\theta \right]; \end{aligned}$$

c'est aux quantités près de l'ordre  $a^3$ , la valeur de  $y$ , après le temps quelconque  $T$ ; on pourroit, en suivant ce procédé, continuer aussi loin que l'on voudroit l'approximation.

## II.

La méthode de l'article précédent consiste, comme l'on voit, à déterminer à chaque approximation les constantes arbitraires, de manière à faire disparaître les arcs de cercle, lorsque cela est possible; mais au lieu de répéter cette opération autant de fois qu'il y a d'approximations, on peut d'abord intégrer l'équation différentielle, en conservant les arcs de cercle, & en poussant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre auquel on veut s'arrêter; ensuite, on n'aura plus besoin que d'une seule opération pour faire disparaître les arcs de cercle. Développons cette méthode, & pour cela, considérons l'équation différentielle,

$$0 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y - 1 + ay^2; \quad (11).$$

que nous venons d'intégrer.

Comme je ne veux porter la précision que jusqu'aux quantités de l'ordre  $a^2$  inclusivement, je fais

$$y = z + az^2 + a^2z^3,$$

en substituant cette valeur de  $y$  dans l'équation (11), & comparant

Comparant séparément les termes sans  $\alpha$ , ceux de l'ordre  $\alpha$ , & ceux de l'ordre  $\alpha^2$ , j'ai les trois équations suivantes,

$$\frac{\partial \partial z}{\partial t^2} + z - l = 0,$$

$$\frac{\partial \partial z^2}{\partial t^2} + z^2 + z^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \partial z''}{\partial t^2} + z'' + 2 z z' = 0;$$

ce qui donne, en les intégrant successivement,

$$z = l + p \sin. t + q \cos. t;$$

$$z' = -\frac{1}{2} \cdot (2 l^2 + p^2 + q^2) - l q t \cdot \sin. t + l p t \cdot \cos. t \\ + \frac{q^2 - p^2}{6} \cdot \cos. 2 t + \frac{p q}{3} \cdot \sin. 2 t;$$

$$z'' = l \cdot [2 l^2 + p^2 + q^2] \\ + \sin. t \cdot \left[ \frac{1}{12} q t \cdot (18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2) - \frac{1}{2} p l^2 t t \right] \\ - \cos. t \cdot \left[ \frac{1}{12} p t \cdot (18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2) + \frac{1}{2} q l^2 t t \right] \\ - \sin. 2 t \cdot \left[ \frac{2 p q l}{3} - l \cdot \frac{(p^2 - q^2)}{3} \cdot t \right] \\ + \cos. 2 t \cdot \left[ l \cdot \frac{(p^2 - q^2)}{3} + \frac{2 p q l}{3} \cdot t \right] \\ + p \cdot \frac{(3 q^2 - p^2)}{48} \sin. 3 t + q \cdot \frac{(q^2 - 3 p^2)}{48} \cos. 3 t;$$

partant

$$y = l - \alpha \cdot \left[ \frac{1}{2} - \alpha l \right] \cdot [2 l^2 + p^2 + q^2] \\ + \sin. t \cdot \left[ p - \alpha l q t + \frac{\alpha^2 q t}{12} \cdot (18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2) - \frac{\alpha^2 p l^2}{2} \cdot t t \right] \\ + \cos. t \cdot \left[ q + \alpha l p t - \frac{\alpha^2 p t}{12} \cdot (18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2) - \frac{\alpha^2 q l^2}{2} \cdot t t \right] \\ + \alpha \sin. 2 t \cdot \left[ \frac{p q}{3} - \frac{2 \alpha p q l}{3} + \frac{\alpha l \cdot (p^2 - q^2)}{3} \cdot t \right] \\ + \alpha \cos. 2 t \cdot \left[ \frac{q^2 - p^2}{6} + \frac{\alpha l \cdot (p^2 - q^2)}{3} + \frac{2 \alpha p q l}{3} \cdot t \right] \\ + \frac{\alpha^2 p \cdot (3 q^2 - p^2)}{48} \cdot \sin. 3 t + \frac{\alpha^2 q \cdot (q^2 - 3 p^2)}{48} \cdot \cos. 3 t \quad (V).$$

$p$  &  $q$  étant des constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de  $y$ , & de  $\frac{\partial y}{\partial t}$ , lorsque  $t = 0$ .

Si l'on fait présentement dans l'équation (11),  $t = T + t$ , on aura en l'intégrant,

$$\begin{aligned}
 y = & l - \alpha \cdot \left[ \frac{1}{2} - \alpha l \right] \cdot (2l^2 + {}^1p^2 + {}^1q^2) \\
 & + \sin. (T + t_1) \cdot [{}^1p - \alpha l \cdot {}^1qt_1 \\
 & + \frac{\alpha^2 \cdot {}^1q \cdot t_1}{12} \cdot (18l^2 + 5 \cdot {}^1p^2 + 5 \cdot {}^1q^2) - \frac{\alpha^2}{2} \cdot {}^1p \cdot l t_1^2] \\
 & + \cos. (T + t_1) \cdot [{}^1q + \alpha l \cdot {}^1pt_1 \\
 & - \frac{\alpha^2 \cdot {}^1p \cdot t_1}{12} \cdot (18l^2 + 5 \cdot {}^1p^2 + 5 \cdot {}^1q^2) - \frac{\alpha^2}{2} \cdot {}^1q \cdot l t_1^2] \\
 & + \alpha \cdot \sin. 2(T + t_1) \cdot \\
 & \quad \left[ \frac{{}^1p \cdot {}^1q}{3} - \frac{2\alpha \cdot {}^1p \cdot {}^1q \cdot l}{3} + \frac{\alpha l ({}^1p^2 - {}^1q^2)}{3} \cdot t_1 \right] \\
 & + \alpha \cdot \cos. 2(T + t_1) \cdot \\
 & \quad \left[ \frac{{}^1q^2 - {}^1p^2}{6} + \frac{\alpha l ({}^1p^2 - {}^1q^2)}{3} - \frac{2\alpha \cdot {}^1p \cdot {}^1q \cdot l}{3} \cdot t_1 \right] \\
 & + \frac{\alpha^2 \cdot {}^1p \cdot (3 \cdot {}^1q^2 - {}^1p^2)}{48} \cdot \sin. 3(T + t_1) \\
 & + \frac{\alpha^2 \cdot {}^1q \cdot ({}^1q^2 - 3 \cdot {}^1p^2)}{48} \cdot \cos. 3(T + t_1)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y = & \end{aligned}} \right\} (V').$$

${}^1p$  &  ${}^1q$  étant deux nouvelles constantes arbitraires dépendantes des valeurs de  $y$ , & de  $\frac{\partial y}{\partial t_1}$ , lorsque  $t_1 = 0$ .

On peut, sans intégrer une seconde fois, conclure l'équation (V'), de l'équation (V), en changeant dans celle-ci,  $p$  en  ${}^1p$ ,  $q$  en  ${}^1q$ ,  $t$  en  $t_1$ , excepté sous les sinus & les cosinus, où l'on doit écrire  $T + t_1$ , au lieu de  $t$ .

Si l'on compare maintenant dans les équations (V) & (V'), les coefficients de  $\sin. t$ , & de  $\cos. t$ , on aura, en observant que  $t = T + t_1$ , les deux équations,

$$\begin{aligned}
 {}^1p - \alpha l \cdot {}^1qt_1 + \frac{\alpha^2 \cdot {}^1q \cdot t_1}{12} \cdot (18l^2 + 5 \cdot {}^1p^2 + 5 \cdot {}^1q^2) - \frac{\alpha^2}{2} \cdot {}^1p \cdot l t_1^2 \\
 = p - \alpha (T + t_1) \cdot [lq - \frac{\alpha q}{12} \cdot (18l^2 + 5p^2 + 5q^2)] \\
 - \frac{\alpha^2}{2} \cdot p l^2 \cdot (T + t_1)^2;
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 q + \alpha l p t_1 - \frac{\alpha^2 q t_1}{12} \cdot (18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2) - \frac{\alpha^2}{2} \cdot q \cdot l^2 t_1^2 \\
 = q + \alpha (T + t_1) \cdot [lp - \frac{\alpha p}{12} \cdot (18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2)] \\
 - \frac{\alpha^2}{2} \cdot q l^2 \cdot (T + t_1)^2;
 \end{aligned}$$

Je fais dans ces deux équations  $t_1 = 0$ , & j'observe que l'on a,

$$p = p + T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{T^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} + \&c.$$

$$q = q + T \cdot \frac{\partial q}{\partial T} + \frac{T^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + \&c.$$

en substituant ces valeurs de  $p$  & de  $q$ , dans les équations précédentes, on aura, en comparant séparément les termes multipliés par  $T$ , les deux équations suivantes,

$$\frac{\partial p}{\partial T} = - \alpha l q + \frac{\alpha^2 q}{12} \cdot [18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2]$$

$$\frac{\partial q}{\partial T} = \alpha l p - \frac{\alpha^2 p}{12} \cdot [18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2].$$

Soit  $\alpha l T = x$ , & l'on aura

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - q + \frac{\alpha q \cdot (18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2)}{12 \cdot l}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = p - \frac{\alpha p \cdot (18 l^2 + 5 p^2 + 5 q^2)}{12 \cdot l}.$$

Je multiplie la première de ces équations par  $p$ , la seconde par  $q$ , & je les ajoute ensemble, ce qui donne

$$p \frac{\partial p}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial x} = 0;$$

donc,  $pp + qq = e^2$ ,  $e$  étant constant; on aura conséquemment,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - q \cdot \left[ 1 - \frac{\alpha \cdot (18 l^2 + 5 e^2)}{12 \cdot l} \right]$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = p \cdot \left[ 1 - \frac{\alpha \cdot (18 l^2 + 5 e^2)}{12 \cdot l} \right];$$

Nn ij

d'où je conclus en intégrant,

$$p = e \cdot \cos. \left[ x \cdot \left( 1 - \frac{\alpha \cdot (18 l^2 + 5 e^2)}{12 \cdot l} \right) + \theta \right]$$

$$q = e \cdot \sin. \left[ x \cdot \left( 1 - \frac{\alpha \cdot (18 l^2 + 5 e^2)}{12 \cdot l} \right) + \theta \right];$$

$e$  &  $\theta$  étant deux constantes arbitraires dépendantes des valeurs de  $p$  & de  $q$ , lorsque  $x = 0$ ; on aura donc,

$$p = e \cdot \cos. \left[ \alpha T \cdot \left( 1 - \frac{\alpha (18 l^2 + 5 e^2)}{12} \right) + \theta \right]$$

$$q = e \cdot \sin. \left[ \alpha T \cdot \left( 1 - \frac{\alpha (18 l^2 + 5 e^2)}{12} \right) + \theta \right];$$

Ainsi, l'équation (V') donnera, en y supposant  $t_1 = 0$ ,

$$y = l - \alpha \cdot \left( \frac{1}{2} - \alpha l \right) \cdot (2 l^2 + e^2)$$

$$+ e \sin. \left[ T \left( 1 + \alpha l - \frac{3}{2} \alpha^2 l^2 - \frac{5}{12} \alpha^2 e^2 \right) + \theta \right]$$

$$- \frac{\alpha e^2}{6} \cdot (1 - 2 \alpha l) \cdot \cos. \left[ 2 T \left( 1 + \alpha l - \frac{3}{2} \alpha^2 l^2 - \frac{5}{12} \alpha^2 e^2 \right) + 2 \theta \right]$$

$$- \frac{\alpha^2 e^3}{48} \cdot \sin. \left[ 3 T \left( 1 + \alpha l - \frac{3}{2} \alpha^2 l^2 - \frac{5}{12} \alpha^2 e^2 \right) + 3 \theta \right].$$

C'est aux quantités près de l'ordre  $\alpha^3$ , l'expression de  $y$ , après le temps quelconque  $T$ ; cette valeur est précisément la même que celle à laquelle nous sommes arrivés par un autre procédé dans l'article précédent.

Prenons encore pour exemple l'équation différentielle

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h^2 y &= T + \alpha \cdot \left[ T^{iv} \cdot y + T^{iii} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right] \\ &+ \alpha^2 \cdot \left[ T^{viii} \cdot y^2 + T^{vii} \cdot y \frac{\partial y}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + T^{vi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \\ &+ \alpha^3 \cdot \left[ T^{xii} \cdot y^3 + \&c. \right] + \&c. \end{aligned} \right\} (x).$$

$T, T', \&c.$  étant des fonctions rationnelles & entières de sinus & de cosinus de cette forme,  $\sin. \mathcal{C} t, \cos. \mathcal{C} t$ .

Soit  $y = z + \alpha z^1 + \alpha^2 z^{11} + \&c.$  & l'on aura en comparant séparément les quantités sans  $\alpha$ , celles de l'ordre  $\alpha$ , celles de l'ordre  $\alpha^2$ , &c. les équations différentielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + h^2 \cdot z = T$$

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} + h^2 \cdot z' = T' z + T'' \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 z''}{\partial t^2} + h^2 \cdot z'' = T' z' + T'' \frac{\partial z'}{\partial t} + T''' \cdot z' \\ + T^{iv} \cdot z \frac{\partial z}{\partial t} + \&c.$$

&c.

Ces équations seront au nombre de  $n + 1$ , si l'on veut pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^n$ , inclusivement; on les intégrera facilement par les méthodes connues, en conservant les arcs-de-cercle, & l'on pourra, pour plus de simplicité, rejeter des valeurs de  $z'$ ,  $z''$ , &c. les termes de la forme  $\mathcal{C} \cdot \sin. ht$ , &  $\mathcal{C} \cdot \cos. ht$ ,  $\mathcal{C}$  étant constant; car je suppose que dans la valeur de  $z'$  on ait le terme  $\mathcal{C} \cdot \sin. ht$ ; comme on peut ajouter à l'intégrale de l'équation différentielle en  $z'$  le terme  $K \cdot \sin. ht$ ,  $K$  étant arbitraire, on pourra prendre  $K$  égal à  $-\mathcal{C}$ ; & dans ce cas, le terme  $\sin. ht$  disparaît. A la vérité, de cette manière,  $z'$ ,  $z''$ , &c. ne renferment point de constantes arbitraires; mais comme  $z$  en renferme deux, la valeur de  $y$  les renfermera pareillement; partant, elle sera complète; on aura ainsi pour  $y$  une expression de cette forme,

$$y = \sin. ht \cdot \left\{ \begin{array}{l} p + t \cdot [ K + \alpha \cdot ( ap + {}^1 a q ) \\ \quad + \alpha^2 \cdot ( {}^2 a p^2 + {}^3 a p q + {}^4 a q^2 ) \\ \quad + \alpha^3 \cdot ( {}^5 a p^3 + \&c. ) + \&c. ] \\ + t^2 \cdot [ K + \&c. ] \\ + \&c. \end{array} \right\} \\ + \cos. ht \cdot \left\{ \begin{array}{l} q + t \cdot [ H + \alpha \cdot ( b q + {}^1 b p ) \\ \quad + \alpha^2 \cdot ( {}^2 b q^2 + {}^3 b p q + {}^4 b p^2 ) \\ \quad + \alpha^3 \cdot ( {}^5 b q^3 + \&c. ) + \&c. ] \\ + t^2 \cdot [ H + \&c. ] \\ + \&c. \end{array} \right\} + R \quad (V'').$$

$R$  étant fonction de  $t$ , de sinus & de cosinus.

Présentement, si l'on suppose dans l'équation (x) ;  
 $l = T + t_1$ , on aura en l'intégrant,

$$y = \sin. h (T + t_1) \cdot \left\{ \begin{array}{l} p' + t_1 \cdot [K + a.(ap' + 'aq') + \&c.] \\ + t_1^2 \cdot [K + \&c.] \\ + \&c. \end{array} \right\} + \cos. h (T + t_1) \cdot \left\{ \begin{array}{l} q' + t_1 \cdot [H + a.(bq' + 'bp') + \&c.] \\ + t_1^2 \cdot [H + \&c.] \\ + \&c. \end{array} \right\} + R' \quad (V''').$$

$p'$  &  $q'$ , étant deux constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de  $y$ , de  $\frac{\partial y}{\partial t_1}$ , lorsque  $t_1 = 0$  ;  $R'$  étant ce que devient  $R$ , lorsqu'on y change  $p$  en  $p'$ ,  $q$  en  $q'$ , &  $t$  en  $t_1$  excepté sous les sinus & les cosinus, où il faut écrire,  $T + t_1$ , au lieu de  $t$  ; si l'on compare maintenant les deux valeurs précédentes de  $y$ , on aura, en observant que  $t = T + t_1$ , & égalant séparément les coefficients de  $\sin. ht$ , & de  $\cos. ht$ .

$$\begin{aligned} p + (T + t_1) \cdot [K + a.(ap + 'aq) + \&c.] \\ + (T + t_1)^2 \cdot [K + \&c.] \\ + \&c. \\ = p' + t_1 \cdot [K + a.(ap' + 'aq') + \&c.] \\ + t_1^2 \cdot [K + \&c.] \\ + \&c. \end{aligned} \quad (f).$$

$$\begin{aligned} q + (T + t_1) \cdot [H + a.(bq + 'bp) + \&c.] \\ + (T + t_1)^2 \cdot [H + \&c.] \\ + \&c. \\ = q' + t_1 \cdot [H + a.(bq' + 'bp') + \&c.] \\ + t_1^2 \cdot [H + \&c.] \\ + \&c. \end{aligned} \quad (f').$$

Je fais dans ces deux équations  $t_1 = 0$ , & j'observe que l'on a

$$p' = p + T \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{T^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} + \&c.$$

$$q' = q + T \frac{\partial q}{\partial T} + \frac{T^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + \&c.$$

Substituant ces valeurs de  $p'$  & de  $q'$ , dans les deux équations précédentes, on aura, en comparant séparément les termes multipliés par  $T$ , les deux suivantes ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial T} = & K + \alpha \cdot (ap + {}^1aq) \\ & + \alpha^2 \cdot ({}^2ap^2 + {}^3apq + {}^4aq^2) \\ & + \alpha^3 \cdot ({}^3ap^3 + \&c.) + \&c. \quad (h). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial T} = & H + \alpha \cdot (bq + {}^1bp) \\ & + \alpha^2 \cdot ({}^2bq^2 + {}^3bpq + {}^4bp^2) \\ & + \alpha^3 \cdot ({}^3bq^3 + \&c.) + \&c. \quad (h'). \end{aligned}$$

il ne s'agit donc plus que d'intégrer ces deux équations ; or voici pour cela, la méthode qui m'a paru la plus simple.

Soit,

$$\begin{aligned} p = & r + \alpha \cdot (fr^2 + {}^1frs + {}^2fs^2) \\ & + \alpha^2 \cdot ({}^3fr^3 + \&c.) + \&c. \\ q = & s + \alpha \cdot (gs^2 + {}^1grs + {}^2gr^2) \\ & + \alpha^2 \cdot ({}^3gs^3 + \&c.) + \&c. \end{aligned}$$

en différentiant, on aura,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial T} = & \frac{\partial r}{\partial T} \cdot [1 + \alpha \cdot (2fr + {}^1fs) + \&c.] \\ & + \alpha \cdot \frac{\partial s}{\partial T} \cdot [({}^1fr + 2 \cdot {}^2fs) + \&c.] \\ \frac{\partial q}{\partial T} = & \frac{\partial s}{\partial T} \cdot [1 + \alpha \cdot (2gs + {}^1gr) + \&c.] \\ & + \alpha \cdot \frac{\partial r}{\partial T} \cdot [({}^1gs + 2 \cdot {}^2gr) + \&c.] \end{aligned}$$

substituant, au lieu de  $p$ ,  $q$ ,  $\frac{\partial p}{\partial T}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial T}$ , &c. ces valeurs dans les équations (h) & (h'), on aura deux équations de cette forme.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial r}{\partial T} \cdot [1 + \alpha \cdot (2fr + {}^1fs) + \&c.] \\
& \quad + \alpha \cdot \frac{\partial s}{\partial T} \cdot [({}^1fr + 2 \cdot {}^2fs) + \&c.] \\
& = K + \alpha \cdot (ar + {}^1as) + \alpha^2 \cdot (mr^2 + \&c.) + \&c. \\
& \quad \frac{\partial s}{\partial T} \cdot [1 + \alpha \cdot (2gs + {}^1gr) + \&c.] \\
& \quad + \alpha \cdot \frac{\partial r}{\partial T} \cdot [({}^1gs + 2 \cdot {}^2gr) + \&c.] \\
& = H + \alpha \cdot (bs + {}^1br) + \alpha^2 \cdot (ns^2 + \&c.) + \&c.
\end{aligned}$$

Je multiplie la première par le coefficient de  $\frac{\partial s}{\partial T}$  de la seconde, & la seconde par le coefficient de  $\frac{\partial r}{\partial T}$  de la première, & je les retranche l'une de l'autre, ce qui donne une équation de cette forme,

$$\frac{\partial r}{\partial T} \cdot [1 + \alpha(cr + {}^1cs) + \&c.] = M + \alpha(er + {}^1es) + \&c.$$

en divisant cette équation par  $1 + \alpha(cr + {}^1cs) + \&c.$  & réduisant le second membre dans une suite ascendante, par rapport à  $\alpha$ , en ne portant la précision que jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^n$  inclusivement, on aura une équation de cette forme,

$$\frac{\partial r}{\partial T} = M + \alpha \cdot ({}^1Cr + {}^1Cs) + \alpha^2 \cdot ({}^2Cr^2 + {}^3Crs + {}^4Cs^2) + \&c.$$

on aura, par un procédé entièrement semblable, une autre équation de cette forme,

$$\frac{\partial s}{\partial T} = N + \alpha \cdot (\lambda s + {}^1\lambda r) + \alpha^2 \cdot ({}^2\lambda s^2 + {}^3\lambda rs + {}^4\lambda r^2) + \&c.$$

$M, N, C, {}^1C, {}^2C, \&c. \lambda, {}^1\lambda, {}^2\lambda, \&c.$  sont fonctions de  $f, {}^1f, {}^2f, \&c. g, {}^1g, {}^2g, \&c.$

Maintenant, pour n'avoir que deux équations linéaires, je forme les suivantes.

$${}^2C = 0, \quad {}^3C = 0, \quad {}^4C = 0, \quad \&c.$$

$${}^2\lambda = 0, \quad {}^3\lambda = 0, \quad {}^4\lambda = 0, \quad \&c.$$

au moyen desquelles on déterminera  $f, {}^1f, \&c. g, {}^1g, \&c.$   
comme

comme on porte la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^n$  inclusivement, il est aisé de voir que ces équations sont au nombre  $(n - 1) \cdot (n + 4)$ ; mais on peut s'assurer aussi très-facilement que le nombre des indéterminées  $f, f', \&c. g, g', \&c.$  est également  $(n - 1) \cdot (n + 4)$ ; d'où il suit qu'il y a autant d'inconnues que d'équations; cela posé, on aura,

$$\frac{\partial r}{\partial T} = M + \alpha \cdot (\mathcal{C}r + \mathcal{C}s)$$

$$\frac{\partial s}{\partial T} = N + \alpha \cdot (\lambda s + \lambda r)$$

équations très-faciles à intégrer.

Avant ainsi les valeurs de  $r$  & de  $s$ , on conclura aisément celles de  $p$  & de  $q$ , & substituant ces valeurs dans l'équation  $(V'')$ , & y supposant  $t_i = 0$ , on aura, aux quantités près de l'ordre  $\alpha^{n+1}$ , la valeur de  $y$ , après le temps quelconque  $T$ . Telle est, si je ne me trompe, la méthode la plus générale & la plus directe pour intégrer, par approximation, les équations différentielles.

En supposant dans les équations  $(f)$  &  $(f')$ ,  $t_i = 0$ , & en y substituant au lieu de  $p'$ ,  $p + T \frac{\partial p}{\partial T} + \&c.$  & au lieu de  $q'$ ,  $q + T \frac{\partial q}{\partial T} + \&c.$  on a simplement comparé les termes multipliés par  $T$ , & on a négligé ceux qui le sont par  $T^2, T^3, \&c.$  ce qui a donné les équations  $(h)$  &  $(h')$ . Il est en effet visible que les coefficients de  $T$ , ceux de  $T^2, \&c.$  doivent être égaux séparément; de-là il suit que les valeurs de  $p$  & de  $q$ , que donnent les équations  $(h)$  &  $(h')$ , satisfont aux équations qui résulteroient de la comparaison des coefficients de  $T^2, T^3, \&c.$  dans les équations  $(f)$  &  $(f')$ . Il seroit difficile de le démontrer d'une manière directe; mais on voit que cela doit être. Il arrive ici la même chose que dans l'application du calcul infinitésimal, où l'on néglige les quantités infiniment petites d'un ordre supérieur à celles que l'on compare, bien certain que les équations auxquelles on parvient, satisferoient aux équations résultantes de la comparaison des ordres supérieurs.

## III.

Jusqu'ici, je n'ai considéré que les équations différentielles à deux variables; celles que j'ai intégrées dans l'article 1.<sup>er</sup> sont fort simples, & par cette raison elles étoient propres à faire entendre cette nouvelle méthode; mais les suivantes, qui, traitées par les méthodes déjà connues, conduiroient à des calculs impraticables, en feront sentir l'avantage, par la facilité avec laquelle elle donne leurs intégrales approchées; comme ces équations sont à peu-près du même genre que celles du mouvement des Planètes, je vais les considérer ici avec étendue.

Je suppose que l'on ait entre les  $n$  variables  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  les  $n$  équations,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q^2 \cdot y &= 2aq \cdot \left\{ \begin{aligned} &(0)y + 2 \cdot (0,1) \cdot y' \cdot \cos.(q' - q)t \\ &+ 2 \cdot \frac{(0,1)}{q'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} \cdot \sin.(q' - q)t \\ &+ 2 \cdot (0,2) \cdot y'' \cdot \cos.(q'' - q)t \\ &+ 2 \cdot \frac{(0,2)}{q''} \cdot \frac{\partial y''}{\partial t} \cdot \sin.(q'' - q)t \\ &+ \&c. \end{aligned} \right. \\ \\ \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} + (q')^2 \cdot y' &= 2aq' \cdot \left\{ \begin{aligned} &(1)y' + 2 \cdot (1,0) \cdot y \cdot \cos.(q - q')t \\ &+ 2 \cdot \frac{(1,0)}{q} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \sin.(q - q')t \\ &+ 2 \cdot (1,2) \cdot y'' \cdot \cos.(q'' - q')t \\ &+ 2 \cdot \frac{(1,2)}{q''} \cdot \frac{\partial y''}{\partial t} \cdot \sin.(q'' - q')t \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} (\Psi). \\ \\ \frac{\partial^2 y''}{\partial t^2} + (q'')^2 \cdot y'' &= 2aq'' \cdot \left\{ \begin{aligned} &(2)y'' + 2 \cdot (2,0) \cdot y \cdot \cos.(q - q'')t + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned} \right. \\ &\&c. \end{aligned}$$

$(0), (0,1), (0,1), (0,2), (0,2), \&c. (1), (1,0), \&c. (2) \&c.$   
étant des coefficients constans quelconques.



J'intègre d'abord les équations,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q^2 \cdot y = 0, \quad \frac{\partial^2 y^i}{\partial t^2} + (q^i)^2 \cdot y^i = 0, \quad \&c.$$

ce qui donne,

$$y = h \cdot \sin. qt + l \cdot \cos. qt; \quad y^i = h^i \cdot \sin. q^i t + l^i \cdot \cos. q^i t, \quad \&c.$$

$h, h^i, \&c. l, l^i, \&c.$  étant des constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de  $y, \frac{\partial y}{\partial t}, y^i, \frac{\partial y^i}{\partial t}, \&c.$

lorsque  $t = 0$ .

Je fais ensuite,

$$y = h \cdot \sin. qt + l \cdot \cos. qt + \alpha z;$$

$$y^i = h^i \cdot \sin. q^i t + l^i \cdot \cos. q^i t + \alpha z^i; \quad \&c.$$

Je substitue ces valeurs dans les équations  $(\Psi)$ , en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ; elles donnent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + q^2 z &= 2q \cdot \sin. qt \cdot \{ (0) h + h^i \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ &\quad + h^{ii} \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \} \\ &+ 2q \cdot \cos. qt \cdot \{ (0) l + l^i \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ &\quad + l^{ii} \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \} \\ &+ [(0,1) + \overline{(0,1)}] \cdot 2q \cdot [h^i \cdot \sin. (2q^i - q)t \\ &\quad + l^i \cdot \cos. (2q^i - q)t] \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

On formera des équations analogues pour  $z^i, z^{ii}, \&c.$  on aura donc en intégrant & ajoutant  $\alpha z$  à la valeur précédente de  $y$ ,

$$\begin{aligned} y &= \{ h + \alpha t \cdot [(0) l + l^i \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ &\quad + l^{ii} \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \} \cdot \sin. qt \\ &+ \{ l - \alpha t \cdot [(0) h + h^i \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ &\quad + h^{ii} \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \} \cdot \cos. qt \quad (\lambda) \\ &+ \frac{\alpha q \cdot [(0,1) + \overline{(0,1)}]}{2q^i \cdot (q - q^i)} \cdot [h^i \cdot \sin. (2q^i - q)t \\ &\quad + l^i \cdot \cos. (2q^i - q)t] \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Si l'on suppose maintenant dans les équations  $(\Psi)$ ,  
 $t = T + t_1$ , & qu'on les intègre, on trouvera facilement,

$$y = \left. \begin{aligned} & \{ {}^1h + \alpha t_1 \cdot [({}^0; 1)h + {}^1l \cdot [({}^0; 1) - \overline{({}^0; 1)}] \\ & \quad + {}^1l'' \cdot [({}^0; 2) - \overline{({}^0; 2)}] + \&c.] \} \sin. q(T + t_1) \\ & + \{ {}^1l - \alpha t_1 \cdot [({}^0; 1)h + {}^1h'' \cdot [({}^0; 1) - \overline{({}^0; 1)}] \\ & \quad + {}^1h'' \cdot [({}^0; 2) - \overline{({}^0; 2)}] + \&c.] \} \cos. q(T + t_1) \\ & + \frac{\alpha q \cdot [({}^0; 1) + \overline{({}^0; 1)}]}{2q'(q - q')} \cdot [{}^1h' \sin. (2q^2 - q) \cdot (T + t_1) \\ & \quad + {}^1l' \cos. (2q^2 - q) \cdot (T + t_1)] \\ & + \&c. \end{aligned} \right\} (\lambda^1).$$

' $h$ , ' $l$ , ' $h'$ , ' $l'$ , &c. étant des constantes arbitraires dépendantes  
 des valeurs de  $y$ ,  $\frac{\partial y}{\partial t_1}$ ,  $y'$ ,  $\frac{\partial y'}{\partial t_1}$ , &c. lorsque  $t_1 = 0$ ; or,  
 si l'on avoit  $\alpha = 0$ , on auroit ' $h = h$ , ' $l = l$ , ' $h' = h'$ , &c.  
 donc ' $h$  ne diffère de  $h$ , ' $l$  de  $l$ , &c. que de quantités de  
 l'ordre  $\alpha$ ; soit donc ' $h = h + \delta h$ , ' $l = l + \delta l$ , &c.  
 & l'on aura en comparant les équations  $(\lambda)$ , &  $(\lambda')$ , & en  
 négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ .

$$\delta l = -\alpha T \cdot \{ ({}^0)h + h' \cdot [({}^0; 1) - \overline{({}^0; 1)}] \\ + h'' \cdot [({}^0; 2) - \overline{({}^0; 2)}] + \&c. \}$$

$$\delta h = \alpha T \cdot \{ ({}^0)l + l' \cdot [({}^0; 1) - \overline{({}^0; 1)}] \\ + l'' \cdot [({}^0; 2) - \overline{({}^0; 2)}] + \&c. \}$$

Soit  $\alpha T = x$ ;  $h$  &  $l$  seront, comme l'on voit, fonctions  
 de  $x$ , & l'on aura

$$\delta h = x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{\partial \delta h}{\partial x^2} + \&c.$$

$$\delta l = x \cdot \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{\partial \delta l}{\partial x^2} + \&c.$$

donc en comparant les termes multipliés par  $x$ , on aura

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= (0)l + l' \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ &\quad + l'' \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \\ \frac{\partial l}{\partial x} &= - (0)h - h' \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ &\quad - h'' \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] - \&c.\end{aligned}$$

on trouvera de la même manière,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h'}{\partial x} &= (1)l' + l \cdot [(1,0) - \overline{(1,0)}] \\ &\quad + l'' \cdot [(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c. \\ \frac{\partial l'}{\partial x} &= - (1)h' - h \cdot [(1,0) - \overline{(1,0)}] \\ &\quad - h'' \cdot [(1,2) - \overline{(1,2)}] - \&c. \\ \frac{\partial h''}{\partial x} &= (2)l'' + l \cdot [(2,0) - \overline{(2,0)}] \\ &\quad + l' \cdot [(2,1) - \overline{(2,1)}] + \&c. \\ \frac{\partial l''}{\partial x} &= - (2)h'' - h \cdot [(2,0) - \overline{(2,0)}] \\ &\quad - h' \cdot [(2,1) - \overline{(2,1)}] - \&c.\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial l}{\partial x} \\ \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial l'}{\partial x} \\ \frac{\partial h''}{\partial x} \\ \frac{\partial l''}{\partial x} \end{aligned}} \right\} (\Psi).$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'intégrer ces équations, & pour cela on fera, ainsi que M. de la Grange l'a pratiqué dans un cas à peu-près semblable (voyez son excellente *Pièce sur le mouvement des nœuds, & l'inclinaison des orbites des Planètes*).

$$\begin{aligned}h &= b \cdot \sin.(fx + \varpi), & l &= b \cdot \cos.(fx + \varpi), \\ h' &= b' \cdot \sin.(fx + \varpi), & l' &= b' \cdot \cos.(fx + \varpi), \\ &\&c. & \&c.\end{aligned}$$

& l'on aura les  $n$  équations

$$\begin{aligned}fb &= (0)b + b' \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] + b'' \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \\ fb' &= (1)b' + b \cdot [(1,0) - \overline{(1,0)}] + b'' \cdot [(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c. \\ fb'' &= (2)b'' + b \cdot [(2,0) - \overline{(2,0)}] + b' \cdot [(2,1) - \overline{(2,1)}] + \&c. \\ &\&c.\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= b \cdot [(0) - f] + b' \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] + b'' \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \\ 0 &= b \cdot [(1,0) - \overline{(1,0)}] + b' \cdot [(1) - f] + b'' \cdot [(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c. \\ 0 &= b \cdot [(2,0) - \overline{(2,0)}] + b' \cdot [(2,1) - \overline{(2,1)}] + b'' \cdot [(2) - f] + \&c. \end{aligned} \right\} (>).$$

&c.

de ces équations, on en tirera une en  $f$ ; les Géomètres ont donné pour cet objet des règles générales (voyez l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes de M. Cramer, & les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1764, p. 292*); mais comme elles ne me paroissent avoir été jusqu'ici démontrées que par induction, & que d'ailleurs elles sont impraticables, pour peu que le nombre des équations soit considérable; je vais reprendre de nouveau cette matière, & donner quelques procédés plus simples que ceux qui sont déjà connus, pour éliminer entre un nombre quelconque d'équations du premier degré.

## I V.

Je suppose que l'on ait entre les  $n$  inconnues  $\mu, \mu', \mu'', \&c.$  les  $n$  équations

$$\begin{aligned} 0 &= {}^1a \cdot \mu + {}^1b \cdot \mu' + {}^1c \cdot \mu'' + \&c. \\ 0 &= {}^2a \cdot \mu + {}^2b \cdot \mu' + {}^2c \cdot \mu'' + \&c. \\ 0 &= {}^3a \cdot \mu + {}^3b \cdot \mu' + {}^3c \cdot \mu'' + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Les nombres 1, 2, 3, &c. placés à gauche des lettres  $a, b, c, \&c.$  étant ce que je nommerai dans la suite *indices* de ces lettres; on déterminera ainsi l'équation de condition qui doit avoir lieu entre les quantités  ${}^1a, {}^1b, {}^1c, \&c. {}^2a, {}^2b, \&c. {}^3a, \&c.$  pour que les équations précédentes soient possibles.

Lorsque dans un produit tel que  ${}^1d \cdot {}^2c \cdot {}^3b \cdot {}^4a$ , dont les indices suivent la loi des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, une lettre telle que  $b$ , précède une autre lettre dont elle est précédée dans l'ordre de l'alphabet, j'appelle cela *variation*, &

un terme a d'autant plus de variations que cela peut arriver de plus de manières; par exemple, dans le terme  $d.^2.c.^3.b.^4.a$ ,  $d$  précède  $c, b, a$ , dont il est précédé dans l'ordre de l'alphabet, ce qui forme trois variations;  $c$ , précède  $b$  &  $a$ , ce qui donne deux variations, &  $b$  précède  $a$ , d'où résulte une variation; ainsi ce terme renferme six variations; cela posé, formez toutes les permutations possibles entre toutes les lettres  $a, b, c, d, e$ , &c. & dans chaque permutation, donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, l'indice 3 à la troisième, &c. ensuite faites précéder chaque permutation du signe  $+$  si le nombre des variations y est nul ou pair, & du signe  $-$  si ce nombre est impair; en égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous aurez l'équation de condition demandée.

Cette règle est due à M. Cramer, mais elle peut être simplifiée par le procédé suivant, que M. Bézout a donné dans l'endroit cité des Mémoires de l'Académie.

Écrivez la lettre  $a$ , & avec cette lettre & la lettre  $b$ , formez toutes les permutations possibles, en écrivant d'abord la lettre  $b$ , la dernière, ensuite l'avant-dernière, & changeant de signe, lorsque  $b$  change de place, & vous aurez  $+ab - ba$ .

Avec ces deux permutations & la lettre  $c$ , formez toutes les permutations possibles, en écrivant d'abord dans chaque terme la lettre  $c$ , la dernière, ensuite l'avant-dernière, & ainsi de suite; & changeant de signe toutes les fois que  $c$  change de place, & vous aurez

$$+abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Combinez de la même manière toutes ces permutations avec la lettre  $d$ , & ainsi de suite, en employant autant de lettres qu'il y a d'inconnues  $\mu, \mu'$ , &c. cela posé, donnez dans chaque terme l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, l'indice 3 à la troisième, &c. en égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous aurez l'équation de condition demandée.

Cette règle est, comme l'on voit, d'un usage fort commode, & il est facile de s'assurer qu'elle retombe dans celle de M. Cramer. Cela est d'abord évident pour les deux permutations  $+ab - ba$ ; si on les combine présentement avec la lettre  $c$ , il est aisé de voir qu'en écrivant dans ces deux termes la lettre  $c$  la dernière, le nombre des variations dans chacun d'eux ne changera pas, aussi conservent-ils le même signe qu'ils avoient; mais si dans ces termes on écrit la lettre  $c$  l'avant-dernière, le nombre de leurs variations est alors augmenté d'une unité, & suivant la règle, ils changent de signe; d'où il suit généralement que les termes dont le nombre des variations sera zéro ou pair, auront le signe  $+$  & les autres le signe  $-$ . D'ailleurs, le nombre des termes dont l'équation de condition est formée, est, suivant les deux méthodes, égal à  $1.2.3 \dots n$ , s'il y a  $n$  lettres; & tous ces termes sont différens les uns des autres; donc l'équation de condition sera la même dans les deux cas. Nous allons présentement démontrer la règle de M. Bézout, comme étant la plus simple.

Si au lieu de combiner d'abord la lettre  $a$  avec la lettre  $b$ , ensuite ces deux-ci avec la lettre  $c$ , & ainsi de suite; c'est-à-dire, si au lieu de combiner les lettres  $a, b, c, d, e$ , &c. dans l'ordre  $a, b, c, d, e$ , &c. on les eût combinées dans l'ordre  $a, c, b, d, e$ , &c. ou  $a, d, b, c, e$ , &c. ou  $a, e, b, c, d$ , &c. ou &c. je dis qu'on auroit toujours eu la même quantité à la différence des signes près.

Pour démontrer ce Théorème, nommons en général, *résultante*, la quantité qui résulte de l'une quelconque de ces combinaisons, en sorte que la *première résultante* soit celle qui vient de la combinaison suivant l'ordre  $a, b, c, d, e$ , &c. que la *seconde résultante* soit celle qui vient de la combinaison, suivant l'ordre  $a, c, b, d, e$ , &c. que la *troisième résultante* soit celle qui vient de la combinaison, suivant l'ordre  $a, d, b, c, e$ , &c. & ainsi de suite; cela posé, il est clair que toutes ces résultantes renferment le même nombre de termes, & précisément les mêmes, puisqu'elles renferment tous les termes  
qui

qui peuvent résulter de la combinaison des  $n$  lettres  $a, b, c, d, e, \&c.$  disposées entre elles de toutes les manières possibles; il ne peut donc y avoir de différence entre deux résultantes, que dans les signes de chacun de leurs termes; or, il est visible que la première résultante donne la seconde, si l'on change dans la première  $b$  en  $c$ , & réciproquement  $c$  en  $b$ ; mais ce changement augmente ou diminue d'une unité le nombre des variations de chaque terme; d'où il suit que dans la seconde résultante, tous les termes dont le nombre des variations est impair, auront le signe  $+$ , & les autres le signe  $-$ ; partant, cette seconde résultante n'est que la première, prise négativement.

Il est visible pareillement que la seconde résultante donnera la troisième, en y changeant  $c$  en  $d$ , & réciproquement; or, ce changement augmente ou diminue d'une unité le nombre des variations de chaque terme; donc les termes dont le nombre des variations est zéro ou pair dans la troisième résultante, auront le signe  $+$ , & les autres le signe  $-$ ; de-là on conclura généralement que si l'on nomme  $R$  la première résultante,  $R'$  la seconde,  $R''$  la troisième, &c. on aura  $R' = -R$ ;  $R'' = R$ ;  $R''' = -R$ ; &c.

Il suit de-là que si dans la première résultante, on change  $a$  en  $b$ , & réciproquement, ou  $a$  en  $c$ , & réciproquement, ou  $a$  en  $d$ , & réciproquement, &c. on aura toujours la même résultante, à la différence des signes près; car l'échange de  $a$  en  $b$ , & de  $b$  en  $a$ , ne signifie autre chose, sinon qu'au lieu de combiner  $+ab - ba$ , avec les lettres  $c, d, e, \&c.$  on combine  $-ab + ba$  avec ces mêmes lettres, ce qui donne la première résultante prise en  $-$ ; pareillement, l'échange de  $a$  en  $c$ , & de  $c$  en  $a$ , indique qu'au lieu de combiner  $+ac - ca$  avec les lettres  $b, d, e, \&c.$  on combine avec elles  $-ac + ca$ , ce qui donne la seconde résultante prise en  $-$ , ou la première prise en  $+$ , & ainsi de suite.

Il suit encore du théorème précédent, que, si dans la première résultante, on écrit  $b$ , ou  $c$ , ou  $d$ , ou &c. par-tout

où est  $a$ , cette résultante sera identiquement nulle; car je suppose que l'on écrive  $c$  au lieu de  $a$ , la première résultante est égale, par ce que nous venons de voir à la troisième, c'est-à-dire à celle qui résulte de la combinaison suivant l'ordre  $a, c, b, d, e$ , &c. or, en combinant d'abord les deux lettres  $a$ , &  $c$ , on a  $+ac - ca$ ; si l'on combine ces deux termes avec la lettre  $b$ , ensuite ceux-ci avec la lettre  $d$ , &c. il est visible que la quantité qui en résultera deviendra identiquement nulle, en écrivant  $c$ , au lieu de  $a$ , parce qu'alors  $ac - ca$ , devient identiquement nul.

Je suppose maintenant que l'on ait les trois équations,

$$0 = {}^1a.\mu + {}^1b.\mu' + {}^1c.\mu'',$$

$$0 = {}^2a.\mu + {}^2b.\mu' + {}^2c.\mu'',$$

$$0 = {}^3a.\mu + {}^3b.\mu' + {}^3c.\mu'';$$

je forme d'abord la résultante des trois lettres  $a, b, c$ , suivant l'ordre  $a, b, c$ , ce qui donne,

$${}^1a.{}^2b.{}^3c - {}^1a.{}^2c.{}^3b + {}^1c.{}^2a.{}^3b - {}^1b.{}^2a.{}^3c + {}^1b.{}^2c.{}^3a - {}^1c.{}^2b.{}^3a,$$

ou

$${}^1a.[{}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b] + {}^2a.[{}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c] + {}^3a.[{}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b];$$

je multiplie ensuite la première des équations précédentes par  ${}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b$ , la seconde par  ${}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c$ , la troisième par  ${}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b$ , & je les ajoute ensemble, ce qui donne,

$$\begin{aligned} 0 = & \mu.[{}^1a.({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a.({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3a.({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)] \\ & + \mu'.[{}^1b.({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2b.({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3b.({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)] \\ & + \mu''.[{}^1c.({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2c.({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3c.({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)]; \end{aligned}$$

or, il suit de ce que nous venons de voir, que les coefficients de  $\mu'$  &  $\mu''$ , sont identiquement nuls, puisqu'ils ne sont que la résultante des trois lettres  $a, b, c$ , dans laquelle on écrit  $b$ , ou  $c$ , par-tout où est  $a$ ; donc, on aura pour l'équation de condition demandée.

$$0 = {}^1a.({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a.({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3a.({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b);$$

c'est-à-dire, la résultante de la combinaison des trois lettres



$a, b, c$ , égale à zéro. On démontreroit la même chose, quel que soit le nombre des équations.

Pour montrer l'analogie de cette matière, avec l'élimination des équations du premier degré, je suppose que l'on ait les trois équations,

$$^1p = ^1a.\mu + ^1b.\mu' + ^1c.\mu'',$$

$$^2p = ^2a.\mu + ^2b.\mu' + ^2c.\mu'',$$

$$^3p = ^3a.\mu + ^3b.\mu' + ^3c.\mu''.$$

Je multiplie, comme ci-devant, la première par  $(^2b.^3c - ^2c.^3b)$ , la seconde par  $(^1c.^3b - ^1b.^3c)$ , & la troisième par  $(^1b.^2c - ^1c.^2b)$ , je les ajoute ensemble, & j'observe que les coefficients de  $\mu'$ , & de  $\mu''$ , sont identiquement nuls dans l'équation qui en résulte; d'où je conclus,

$$\mu = \frac{^1p.(^2b.^3c - ^2c.^3b) + ^2p.(^1c.^3b - ^1b.^3c) + ^3p.(^1b.^2c - ^1c.^2b)}{^1a.(^2b.^3c - ^2c.^3b) + ^2a.(^1c.^3b - ^1b.^3c) + ^3a.(^1b.^2c - ^1c.^2b)};$$

on voit donc que le numérateur de l'expression de  $\mu$ , se forme du dénominateur, en y changeant  $a$  en  $p$ ; on aura ensuite  $\mu'$  ou  $\mu''$ , en changeant dans l'expression de  $\mu$ ,  $a$  en  $b$ , ou en  $c$ , & réciproquement; mais en changeant dans le dénominateur de  $\mu$ ,  $a$  en  $b$ , & réciproquement, on a toujours, par ce qui précède, la même quantité, au signe près; donc la valeur de  $\mu'$  sera  $\frac{K}{-R}$ ,  $R$  étant le dénomi-

nateur de  $\mu$ , en ce qui revient au même, la première résultante des trois lettres  $a, b, c$ ;  $K$  se formera de  $-R$ , en y changeant  $b$  en  $p$ ; partant  $-K$ , se formera de  $R$ , en y changeant  $b$  en  $p$ ; donc  $\mu' = \frac{-K}{-R} = \frac{-K}{R}$ ; ainsi

l'expression de  $\mu'$  est réduite au même dénominateur que celle de  $\mu$ , & les numérateurs de ces deux expressions se forment du dénominateur commun  $R$ , en y changeant  $a$  en  $p$  pour  $\mu$ , &  $b$  en  $p$  pour  $\mu'$ ; on démontreroit de la même manière que l'expression de  $\mu''$  a  $R$  pour dénominateur, & que son numérateur se forme de  $R$ , en y changeant  $c$  en  $p$ ,

& cette règle a généralement lieu, quel que soit le nombre des équations.

Voici maintenant un procédé fort simple qui peut considérablement abrégier le calcul de l'équation de condition entre les lettres  $a, b, c$ , &c.

Je suppose que vous ayez deux équations,

$$0 = {}^1a \cdot \mu + {}^1b \cdot \mu'; \quad 0 = {}^2a \cdot \mu + {}^2b \cdot \mu',$$

écrivez  $+ ab$ , & donnez l'indice 1 à la première lettre, & l'indice 2 à la seconde; l'équation de condition demandée, sera  $+ {}^1a \cdot {}^2b - {}^1b \cdot {}^2a = 0$ .

Je suppose que vous ayez trois équations; écrivez  $+ abc$ , combinez ce terme avec la lettre  $c$  de toutes les manières possibles, en changeant le signe de chaque terme chaque fois que  $c$  change de place, vous aurez ainsi  $+ abc - acb + cab$ ; donnez dans chaque terme l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, l'indice 3 à la troisième, & vous aurez  $+ {}^1a \cdot {}^2b \cdot {}^3c - {}^1a \cdot {}^2c \cdot {}^3b + {}^1c \cdot {}^2a \cdot {}^3b$ ; cela posé, au lieu de  $+ {}^1a \cdot {}^2b \cdot {}^3c$ , écrivez  $+ ({}^1a \cdot {}^2b - {}^2b \cdot {}^1a) \cdot {}^3c$ ; au lieu de  $- {}^1a \cdot {}^2c \cdot {}^3b$ , écrivez  $- ({}^1a \cdot {}^3b - {}^1b \cdot {}^3a) \cdot {}^2c$ ; & au lieu de  $+ {}^1c \cdot {}^2a \cdot {}^3b$ , écrivez  $+ ({}^2a \cdot {}^3b - {}^2b \cdot {}^3a) \cdot {}^1c$ ; l'équation de condition demandée sera

$$0 = ({}^1a \cdot {}^2b - {}^1b \cdot {}^2a) \cdot {}^3c - ({}^1a \cdot {}^3b - {}^1b \cdot {}^3a) \cdot {}^2c + ({}^2a \cdot {}^3b - {}^2b \cdot {}^3a) \cdot {}^1c.$$

Je suppose que vous ayez quatre équations, écrivez  $+ abc - acb + cab$ , & combinez ces trois termes avec la lettre  $d$ , en observant 1.<sup>o</sup> de n'admettre que les termes dans lesquels  $c$  précède  $d$ ; 2.<sup>o</sup> de changer de signe dans chaque terme toutes les fois que  $d$  change de place, & vous aurez

$+ abcd - acbd + acdb + cabd - cadb + cdab$ ; donnez ensuite l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, &c. & vous aurez

$$+ {}^1a \cdot {}^2b \cdot {}^3c \cdot {}^4d - {}^1a \cdot {}^2c \cdot {}^3b \cdot {}^4d + {}^1a \cdot {}^2c \cdot {}^3d \cdot {}^4b + {}^1c \cdot {}^2a \cdot {}^3b \cdot {}^4d - {}^1c \cdot {}^2a \cdot {}^3d \cdot {}^4b + {}^1c \cdot {}^2d \cdot {}^3a \cdot {}^4b;$$

cela posé, au lieu de  $+ {}^1a.^2b.^3c.^4d$ , écrivez

$$+ ({}^1a.^2b - {}^1b.^2a).({}^3c.^4d - {}^3d.^4c),$$

& ainsi des autres termes, & l'équation de condition sera

$$\begin{aligned} 0 = & ({}^1a.^2b - {}^1b.^2a).({}^3c.^4d - {}^3d.^4c) - ({}^1a.^3b - {}^1b.^3a).({}^2c.^4d - {}^2d.^4c) \\ & + ({}^1a.^4b - {}^1b.^4a).({}^2c.^3d - {}^2d.^3c) + ({}^2a.^3b - {}^2b.^3a).({}^1c.^4d - {}^1d.^4c) \\ & - ({}^2a.^4b - {}^2b.^4a).({}^1c.^3d - {}^1d.^3c) + ({}^3a.^4b - {}^3b.^4a).({}^1c.^2d - {}^1d.^2c). \end{aligned}$$

Je suppose que vous ayez cinq équations, écrivez les six termes  $+ abcd - acbd +$  &c. relatifs à quatre équations, & combinez-les avec la lettre  $e$  de toutes les manières possibles, en observant de changer de signe chaque fois que  $e$  change de place; donnez ensuite l'indice 1 à la première lettre de chaque terme, l'indice 2 à la seconde, &c. cela posé, transformez chacun de ces termes dans un autre suivant la méthode que nous venons de prescrire pour les équations à trois & à quatre inconnues; ainsi au lieu du terme  $+ {}^1a.^2c.^3b.^4e.^5d$ , écrivez  $+ ({}^1a.^3b - {}^1b.^3a).({}^2c.^5d - {}^2d.^5c).^4e$ ; en égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous aurez l'équation de condition demandée.

Lorsqu'on aura six équations, on combinera les termes  $+ abcde - abced +$  &c. relatifs à cinq équations avec la lettre  $f$ , en observant 1.<sup>o</sup> de n'admettre que les termes dans lesquels  $e$  précède  $f$ ; 2.<sup>o</sup> de changer de signe lorsque  $f$  change de place; on transformera ensuite, par la règle précédente, chaque terme dans un autre composé du produit des trois facteurs, chacun de deux dimensions & de deux termes, & l'on aura l'équation de condition demandée; il en sera de même pour un nombre quelconque d'équations.

Il est aisé de voir qu'en effectuant les multiplications, les termes qui en résulteroient seroient tous différens les uns des autres, en sorte que par ce procédé on n'a aucun terme inutile; on voit d'ailleurs qu'il abrège considérablement le calcul de l'équation de condition. Il faut présentement la démontrer, & pour cela nommons  $(R)$  l'équation de condition

qu'il donne, &  $R$ , celle qui résulte des méthodes de M.<sup>rs</sup> Cramer & Bezout; nommons de plus *dérangemens*, les cas dans lesquels  $b$  précède  $a$ , où  $c$  précède  $d$ , où  $e$  précède  $f$ , &c. en sorte qu'il y ait d'autant plus de dérangemens dans un terme, que cela y arrive de plus de manières; cela posé, il est clair, d'après la formation de  $(R)$ , que cette quantité renferme tous les termes de  $R$ ; car  $(R)$  renferme 1.<sup>o</sup> toutes les combinaisons possibles entre  $a, b, c$ , &c. dont le nombre des dérangemens est nul; 2.<sup>o</sup> toutes les combinaisons dont le nombre des dérangemens est 1; 3.<sup>o</sup> toutes celles dont le nombre des dérangemens est 2, & ainsi de suite; donc  $(R)$  renferme tous les termes qui peuvent résulter de la combinaison de  $n$  lettres  $a, b, c$ , &c. & par conséquent cette équation renferme les mêmes termes que  $R$ ; d'ailleurs chaque terme de  $(R)$  a le même signe que son correspondant dans  $R$ . 1.<sup>o</sup> Cela est évident pour les termes dont le nombre des dérangemens est zéro, puisqu'ils sont formés de la même manière dans les deux équations; 2.<sup>o</sup> ceux qui ont un dérangement, ont des signes contraires aux premiers, & cela a pareillement lieu dans  $R$ , puisqu'en changeant  $b$  en  $a$ , & réciproquement, ou  $d$  en  $c$ , & réciproquement, ou &c. le nombre des variations augmente ou diminue d'une unité, & partant, le signe de chaque terme est différent; 3.<sup>o</sup> les termes qui ont deux dérangemens, ont des signes contraires à ceux qui n'en ont qu'un, ce qui a lieu également pour  $R$ , & ainsi de suite; d'où l'on voit que l'équation  $(R)$  est identiquement la même que l'équation  $R$ . On peut aisément déterminer le nombre des termes de l'équation  $(R)$ ; car celui de l'équation  $R$  étant  $1.2.3 \dots n$ ; si  $n$  est pair, chaque terme de  $(R)$  sera le produit de  $\frac{n}{2}$  facteurs de deux termes, ce qui donnera,

après avoir effectué les multiplications  $2^{\frac{n}{2}}$  termes; donc; si l'on nomme  $q$ , le nombre des termes de  $(R)$ , on aura, après les multiplications,  $q.2^{\frac{n}{2}}$  termes qui, comme nous

l'avons vu, sont tous différens; partant,  $(R)$  étant égale à  $R$ ,

on aura  $q.2^{\frac{n}{2}} = 1.2.3\dots n$ ; donc  $q = \frac{1.2.3\dots n}{2^{\frac{n}{2}}}$ ; on

trouvera par le même raisonnement que si  $n$  est impair,

on a  $q = \frac{1.2.3\dots n}{2^{\frac{n-1}{2}}}$ .

On peut réduire encore de la manière suivante l'équation  $R$  en termes composés de facteurs de trois dimensions; pour cela je désigne par  $(abc)$  la quantité

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba,$$

& par  $(ab)$  la quantité  $ab - ba$ , & ainsi de suite; par  $(^1a.^2b.^3c)$ , j'indiquerai la quantité  $(abc)$ , dans les termes de laquelle on donne 1 pour indice à la première lettre, 2 à la seconde, & 3 à la troisième; par  $(^1a.^2b)$ , je désignerai la quantité  $(ab)$ , dans les termes de laquelle on donne 1 pour indice à la première lettre, & 2 à la seconde; & ainsi de suite.

Je suppose maintenant que vous ayez trois équations, l'équation de condition sera,  $0 = (^1a.^2b.^3c)$ .

Je suppose que vous ayez quatre équations; écrivez  $+abc$ , & combinez ce terme de toutes les manières possibles avec la lettre  $\partial$ , en observant de changer de signe lorsque  $\partial$  change de place, ce qui donne  $+abc\partial - ab\partial c + a\partial bc - \partial abc$ ; donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, &c. & vous aurez

$+ ^1a.^2b.^3c.^4\partial - ^1a.^2b.^3\partial.^4c + ^1a.^2\partial.^3b.^4c - ^1\partial.^2a.^3b.^4c$ ;  
au lieu du terme  $+ ^1a.^2b.^3c.^4\partial$ , écrivez  $+ (^1a.^2b.^3c).^4\partial$ ;  
au lieu de  $- ^1a.^2b.^3\partial.^4c$ ; écrivez  $- (^1a.^2b.^3c).^3\partial$ , & ainsi de suite, & vous formerez l'équation de condition

$$0 = (^1a.^2b.^3c).^4\partial - (^1a.^2b.^4c).^3\partial + (^1a.^3b.^4c).^2\partial - (^2a.^3b.^4c).^1\partial.$$

Je suppose que vous ayez cinq équations, combinez les termes  $+abc\partial - ab\partial c +$  &c. relatifs à quatre équations

avec la lettre  $e$ , en observant 1.<sup>o</sup> de n'admettre que les termes dans lesquels  $d$  précède  $e$ ; 2.<sup>o</sup> de changer de signe lorsque  $e$  change de place, & vous aurez

$$+ abcde - abdec + abedc + \&c.$$

donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, &c. & vous aurez

$$+ 'a.^2b.^3c.^4d.^5e - 'a.^2b.^3d.^4c.^5e + 'a.^2b.^3d.^4e.^5c + \&c.$$

ensuite, au lieu de  $+ 'a.^2b.^3c.^4d.^5e$ , écrivez  $+ ('a.^2b.^3c).(d.^5e)$ ; au lieu de  $- 'a.^2b.^3d.^4c.^5e$ , écrivez  $- ('a.^2b.^4c).(d.^5e)$ . & ainsi de suite; & en égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous formerez l'équation de condition demandée.

Je suppose que vous ayez six équations, combinez les termes  $+ abcde - \&c.$  relatifs à cinq équations avec la lettre  $f$ , en observant 1.<sup>o</sup> de n'admettre que les termes où  $e$  précède  $f$ ; 2.<sup>o</sup> de changer de signe lorsque  $f$  change de place; donnez ensuite 1 pour indice à la première lettre, 2 à la seconde, &c. & au lieu d'un terme quelconque tel que  $'a.^2d.^3b.^4e.^5c.^6f$ , écrivez  $('a.^2b.^3c).(d.^4e.^6f)$ , & ainsi des autres termes, & en égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous aurez l'équation de condition demandée.

Si vous avez sept équations, combinez les termes  $+ abcdef - \&c.$  relatifs à six équations avec la lettre  $g$ , de toutes les manières possibles; pour huit équations, combinez les termes relatifs à sept avec la lettre  $h$ , en n'admettant que les termes dans lequel  $g$  précède  $h$ , & ainsi du reste.

On décomposeroit de la même manière l'équation  $R$  en termes composés de facteurs de 4, de 5, &c. dimensions.

### V.

Je reprends maintenant les équations ( $>$ ) de l'article III, & j'observe que l'équation de condition qui en résulte est du degré  $n$ , par rapport à  $f$ ; car il est aisé de voir, par l'article précédent, qu'elle renfermera le terme

$$[(0) - f] \cdot [(1) - f] \cdot [(2) - f] \dots [(n - 1) - f],$$

lequel

lequel est du degré  $n$  par rapport à  $f$ , & ce terme est celui qui renferme la plus haute puissance de  $f$ . Soient  $f, {}^1f, {}^2f$ , &c. les  $n$  racines de cette équation de condition; il est visible que les équations ( $\Psi$ ) de l'article III étant linéaires, leur intégrale complète sera

$$h = b \cdot \sin.(fx + \varpi) + {}^1b \cdot \sin.({}^1fx + {}^1\varpi) \\ + {}^2b \cdot \sin.({}^2fx + {}^2\varpi) + \&c.$$

$$l = b \cdot \cos.(fx + \varpi) + {}^1b \cdot \cos.({}^1fx + {}^1\varpi) \\ + {}^2b \cdot \cos.({}^2fx + {}^2\varpi) + \&c.$$

$$h' = b' \cdot \sin.(fx + \varpi) + {}^1b' \cdot \sin.({}^1fx + {}^1\varpi) \\ + {}^2b' \cdot \sin.({}^2fx + {}^2\varpi) + \&c.$$

$$l' = b' \cdot \cos.(fx + \varpi) + {}^1b' \cdot \cos.({}^1fx + {}^1\varpi) + \&c.$$

$$h'' = b'' \cdot \sin.(fx + \varpi) + \&c.$$

&c.

$b, {}^1b, {}^2b$ , &c.  $b', {}^1b', {}^2b'$ , &c.  $b'', \&c.$   $\varpi, {}^1\varpi, {}^2\varpi$ , &c. étant des constantes arbitraires, telles que  $b$  &  $\varpi, b'$  &  $\varpi, b''$  &  $\varpi$ , &c. dépendent de la même manière de  $f$ , que  ${}^1b$  &  ${}^1\varpi, {}^2b$  &  ${}^2\varpi$ , &c. dépendent de  ${}^1f$ , ou que  ${}^2b$  &  ${}^2\varpi$ , &c. dépendent de  ${}^2f$ , & ainsi de suite.

Soient  $H, H', \&c. L, L', \&c.$  les valeurs de  $h, h', \&c. l, l', \&c.$  à l'origine des intégrables que je suppose commencer avec  $x$ , on aura,

$$\left. \begin{aligned} H &= b \cdot \sin.\varpi + {}^1b \cdot \sin.{}^1\varpi + {}^2b \cdot \sin.{}^2\varpi + \&c. \\ H' &= b' \cdot \sin.\varpi + {}^1b' \cdot \sin.{}^1\varpi + {}^2b' \cdot \sin.{}^2\varpi + \&c. \\ L &= b \cdot \cos.\varpi + {}^1b \cdot \cos.{}^1\varpi + {}^2b \cdot \cos.{}^2\varpi + \&c. \\ L' &= b' \cdot \cos.\varpi + {}^1b' \cdot \cos.{}^1\varpi + \&c. \end{aligned} \right\} (\Gamma).$$

On aura ainsi  $2n$  équations; mais on formera  $n - 1$ , systèmes d'équations semblables à celui des équations ( $>$ ) de l'art. III, en prenant successivement au lieu de  $f, b, b', \&c.$  les quantités  ${}^1f, {}^1b, {}^1b', \&c.$  ou  ${}^2f, {}^2b, {}^2b', \&c.$  ou  ${}^3f, \&c.$  Si

dans chaque système on élimine  $f, f', f'', \&c.$  on formera  $n.(n-1)$ , équations entre  $b, b', \&c. {}^1b, {}^1b', \&c. {}^2b, \&c.$  lesquelles étant ajoutées avec les  $2n$  précédentes, donneront  $nn+n$ , équations entre les  $nn+n$ , indéterminées,  $\varpi, {}^1\varpi, \&c. b, b', \&c. {}^1b, {}^1b', \&c.$

En suivant les méthodes ordinaires d'élimination, on tomberoit dans des calculs impraticables; mais M. de la Grange a donné dans la pièce déjà citée, *sur le mouvement des nœuds & l'inclinaison des orbites des Planètes*, une très-belle méthode pour éliminer dans un cas à peu-près semblable; comme elle me paroît être ce qu'on peut trouver de plus simple, je vais l'exposer ici en peu de mots, pour dispenser le lecteur de la chercher ailleurs.

Soit,

$$\begin{aligned} H_1 &= (0).H + H' \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ &\quad + H'' \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \\ H'_1 &= (1).H' + H \cdot [(1,0) - \overline{(1,0)}] \\ &\quad + H'' \cdot [(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c. \\ H''_1 &= (2).H'' + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

En substituant dans la première de ces équations, au lieu de  $H, H', \&c.$  leurs valeurs tirées des équations (Γ), on aura,

$$\begin{aligned} H_1 &= \sin. \varpi \cdot \{ (0).b + b' \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ &\quad + b'' \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \} \\ &\quad + \sin. {}^1\varpi \cdot \{ (0).{}^1b + {}^1b' \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ &\quad + {}^1b'' \cdot [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c. \} \\ &\quad + \&c. \end{aligned}$$

Or, les équations (>) de l'art. III. donnent,

$$\begin{aligned} (0).b + b' \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] + \&c. &= f.b; \\ (0).{}^1b + {}^1b' \cdot [(0,1) - \overline{(0,1)}] + \&c. &= f.{}^1b; \\ &\&c. \end{aligned}$$



Donc,

$H_1 = f.b.\sin.\varpi + {}^1f.{}^1b.\sin.{}^1\varpi + {}^2f.{}^2b.\sin.{}^2\varpi + \&c.$   
 & de-là on conclura  $H_1'$ ,  $H_1''$ , &c. en marquant d'un, de deux  
 &c. traits à droite, les lettres  $b$ ,  ${}^1b$ , &c. de l'expression de  $H_1$ .

Soit pareillement,

$$H_1 = (0).H_1 + H_1' . [(0,1) - \overline{(0,1)}] \\ + H_1'' . [(0,2) - \overline{(0,2)}] + \&c.$$

$$H_1' = (1).H_1 + H_1' . [(1,0) - \overline{(1,0)}] \\ + H_1'' . [(1,2) - \overline{(1,2)}] + \&c.$$

&c.

& l'on trouvera de la même manière,

$$H_2 = f^2.b.\sin.\varpi + {}^1f^2.{}^1b.\sin.{}^1\varpi + {}^2f^2.{}^2b.\sin.{}^2\varpi + \&c.$$

En continuant d'opérer ainsi, on formera les  $n$ , équations,

$$H = b.\sin.\varpi + {}^1b.\sin.{}^1\varpi + {}^2b.\sin.{}^2\varpi + \&c.$$

$$H_1 = f.b.\sin.\varpi + {}^1f.{}^1b.\sin.{}^1\varpi + {}^2f.{}^2b.\sin.{}^2\varpi + \&c.$$

$$H_2 = f^2.b.\sin.\varpi + {}^1f^2.{}^1b.\sin.{}^1\varpi + {}^2f^2.{}^2b.\sin.{}^2\varpi + \&c.$$

$$\dots\dots\dots H_{n-1} = f^{n-1}.b.\sin.\varpi + {}^1f^{n-1}.{}^1b.\sin.{}^1\varpi + \&c.$$

$$\dots\dots\dots + {}^{n-1}f^{n-1}.{}^{n-1}b.\sin.{}^{n-1}\varpi,$$

Il faut présentement tirer de ces équations, les valeurs de  $b.\sin.\varpi$ ,  ${}^1b.\sin.{}^1\varpi$ , &c. on peut imaginer pour cela différens moyens; en voici un fort simple, dont j'ai déjà fait usage ailleurs. Je multiplie la première des équations précédentes par  ${}^{n-1}f$ , & j'en retranche la seconde; je multiplie la seconde par  ${}^{n-1}f$ , & j'en retranche la troisième, & ainsi de suite, ce qui donne

$${}^{n-1}f.H - H_1 = b.\sin.\varpi . ({}^{n-1}f - f) \\ + {}^1b.\sin.{}^1\varpi . ({}^{n-1}f - {}^1f) + \&c\dots \\ + {}^{n-2}b . ({}^{n-1}f - {}^{n-1}f) . \sin.{}^{n-1}\varpi$$

$${}^{n-1}f.H_1 - H_2 = f.b.\sin.\varpi . ({}^{n-1}f - f) \\ + {}^1f.{}^1b.\sin.{}^1\varpi . ({}^{n-1}f - {}^1f) + \&c\dots \\ + {}^{n-2}b . {}^{n-2}f . \sin.{}^{n-2}\varpi . ({}^{n-1}f - {}^{n-2}f)$$

&c.

Q q ij

Je multiplie pareillement la première de ces équations par  ${}^{n-2}f$ , & j'en retranche la seconde; je multiplie la seconde par  ${}^{n-3}f$ , & j'en retranche la troisième, & ainsi de suite, ce qui donne

$$\begin{aligned} & H \cdot ({}^{n-1}f \cdot {}^{n-2}f) - H_1 \cdot ({}^{n-2}f + {}^{n-1}f) \\ & + H_1 = b \cdot \sin. \varpi \cdot ({}^{n-1}f - f) \cdot ({}^{n-2}f - f) \\ & \quad + \&c. \\ & + {}^{n-3}b \cdot \sin. {}^{n-3}\varpi \cdot ({}^{n-1}f - {}^{n-3}f) \cdot ({}^{n-2}f - {}^{n-3}f); \\ & H_1 \cdot ({}^{n-1}f \cdot {}^{n-2}f) - H_2 \cdot ({}^{n-2}f + {}^{n-1}f) \\ & + H_2 = f b \cdot \sin. \varpi \cdot ({}^{n-1}f - f) \cdot ({}^{n-2}f - f) \\ & \quad + \&c. \\ & + {}^{n-3}f \cdot {}^{n-3}b \cdot \sin. {}^{n-3}\varpi \cdot ({}^{n-1}f - {}^{n-3}f) \cdot ({}^{n-2}f - {}^{n-3}f) \\ & \quad \&c. \end{aligned}$$

Je multiplie la première de ces équations par  ${}^{n-3}f$ , & j'en retranche la seconde, & ainsi de suite, ce qui donne

$$\begin{aligned} & H \cdot ({}^{n-1}f \cdot {}^{n-2}f \cdot {}^{n-3}f) \\ & - H_1 \cdot ({}^{n-1}f \cdot {}^{n-3}f + {}^{n-2}f \cdot {}^{n-3}f + {}^{n-1}f \cdot {}^{n-2}f) \\ & + H_1 \cdot ({}^{n-1}f + {}^{n-2}f + {}^{n-3}f) \\ & - H_2 = b \cdot \sin. \varpi \cdot ({}^{n-1}f - f) \cdot ({}^{n-2}f - f) \cdot ({}^{n-3}f - f) + \&c. \\ & \quad \&c. \end{aligned}$$

De-là il est aisé de voir que si l'on nomme  $\mathcal{E}$  la somme de toutes les racines  ${}^1f, {}^2f, {}^3f$ , &c.  $\gamma$  la somme de tous leurs produits deux à deux;  $\lambda$  la somme de leurs produits trois à trois, & ainsi de suite, on aura

$$b \cdot \sin. \varpi = \frac{H_{n-1} - \mathcal{E} \cdot H_{n-2} + \gamma \cdot H_{n-3} - \lambda \cdot H_{n-4} + \&c.}{(f - {}^1f) \cdot (f - {}^2f) \cdot (f - {}^3f) \cdot \dots \cdot (f - {}^{n-1}f)}.$$

On aura,  ${}^1b \cdot \sin. {}^1\varpi$ ,  ${}^2b \cdot \sin. {}^2\varpi$ , &c. en changeant successivement dans cette valeur de  $b \cdot \sin. \varpi$ ,  $f$  en  ${}^1f$ ,  ${}^2f$ , &c. & réciproquement; on aura de la même manière,

$$b^1 \cdot \sin. \varpi = \frac{H'_{n-1} - \mathcal{E} \cdot H'_{n-2} + \gamma \cdot H'_{n-3} - \&c.}{(f - {}^1f) \cdot (f - {}^2f), \&c.},$$

$$b'' \cdot \sin. \varpi = \frac{H''_{n-1} - \&c.}{(f - {}^1f), \&c.}, \&c.$$

& on en conclura  ${}^1b' . \sin. {}^1\varpi, {}^2b' . \sin. {}^2\varpi, \&c. {}^1b'' . \sin. {}^1\varpi, {}^2b'' . \sin. {}^2\varpi, \&c.$  en y changeant successivement  $f$  en  ${}^1f, {}^2f, \&c.$  & réciproquement.

De plus, il est aisé de voir par la nature des équations ( $\Gamma$ ), qu'il suffit pour avoir  $b . \cos. \varpi$  de changer dans l'expression précédente de  $b . \sin. \varpi, H, H', \&c.$  en  $L, L', \&c.$  désignant donc par  $L_{n-1}, L_{n-2}, \&c.$  des fonctions en  $L, L', \&c.$  pareilles à celles de  $H_{n-1}, H_{n-2}, \&c.$  en  $H, H', \&c.$  on aura

$$b . \cos. \varpi = \frac{L_{n-1} - \mathcal{C} . L_{n-2} + \gamma . L_{n-3} - \&c.}{(f - {}^1f) . (f - {}^2f) . \&c.},$$

& de-là on conclura facilement  ${}^1b . \cos. {}^1\varpi, {}^2b . \cos. {}^2\varpi, \&c. b' \cos. \varpi, \&c.$

Les quantités  $\mathcal{C}, \gamma, \lambda$ , peuvent se déterminer aisément de cette manière; soit

$$x^n - \theta . x^{n-1} + {}^1\theta . x^{n-2} - {}^2\theta . x^{n-3} + {}^3\theta . x^{n-4} - \&c. = 0$$

l'équation dont les différentes racines sont  $f, {}^1f, {}^2f, \&c.$  on aura, en divisant cette équation par  $x - f$ ,

$$x^{n-1} - \mathcal{C} . x^{n-2} + \gamma . x^{n-3} - \lambda . x^{n-4} + \&c. = 0;$$

donc, en multipliant cette dernière équation par  $x - f$ , & la comparant terme à terme à la première, on aura

$$\mathcal{C} + f = \theta; \gamma + \mathcal{C}f = {}^1\theta; \lambda + f\gamma = {}^2\theta; \&c.$$

ou

$$\mathcal{C} = \theta - f; \gamma = {}^1\theta - \mathcal{C}f; \lambda = {}^2\theta - f\gamma; \&c.$$

Quant au produit  $(f - {}^1f) . (f - {}^2f), \&c.$  on le déterminera facilement, en considérant que l'équation

$$x^n - \theta x^{n-1} + {}^1\theta x^{n-2} - \&c. = 0, \text{ peut être mise}$$

sous cette forme,  $(x - f) (x - {}^1f) (x - {}^2f) . \&c. = 0;$

en sorte que  $(x - f) (x - {}^1f), \&c. = x^n - \theta . x^{n-1} + \&c.$

Soit  $x = f + \alpha$ ,  $\alpha$  étant supposé infiniment petit, & l'on aura, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$  & divisant par  $\alpha$ ,

$$(f - {}^1f) . (f - {}^2f), \&c. = n . f^{n-1} - (n-1) . \theta . f^{n-2} \\ + (n-2) . {}^1\theta . f^{n-3} - \&c.$$

Maintenant, on aura

$$h = b \cdot \sin. \varpi \cdot \cos. \alpha f T + b \cdot \cos. \varpi \cdot \sin. \alpha f T + \&c.$$

$$l = b \cdot \cos. \varpi \cdot \cos. \alpha f T - b \cdot \cos. \varpi \cdot \sin. \alpha f T + \&c.$$

Donc, l'équation ( $\lambda'$ ) de l'article III donne, en y supposant  $t_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} y &= b \cdot \sin. \varpi \cdot \sin. (q + \alpha f) \cdot T + b \cdot \cos. \varpi \cdot \cos. (q + \alpha f) \cdot T \\ &+ b \cdot \sin. \varpi \cdot \sin. (q + \alpha' f) \cdot T + b \cdot \cos. \varpi \cdot \cos. (q + \alpha' f) \cdot T \\ &+ \&c. \\ &+ \frac{\alpha q \cdot [(0, t) + \overline{(0, 1)}]}{2 q \cdot (q - q')} \cdot \left\{ \begin{aligned} &b' \cdot \sin. \varpi \cdot \sin. (2 q' - q - \alpha f) \cdot T \\ &+ b' \cdot \cos. \varpi \cdot \cos. (2 q' - q - \alpha f) \cdot T \end{aligned} \right. \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

C'est la valeur de  $y$ , après le temps quelconque  $T$ .

Si l'on vouloit porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , on feroit varier les nouvelles constantes arbitraires  $H$ ,  $H'$ , &c.  $L$ ,  $L'$ , &c. comme nous l'avons fait dans l'article I.<sup>er</sup>

## V I.

On pourroit encore étendre aux équations à un nombre quelconque de variables, la méthode que nous avons donnée, article II, pour une équation différentielle à deux variables; je suppose en effet que l'on ait les deux équations,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h^2 \cdot y &= T + \alpha \cdot [T^I \cdot y + T^{II} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + T^{III} \cdot y^I + T^{IV} \cdot \frac{\partial y^I}{\partial t}] \\ &+ \alpha^2 \cdot [T^V \cdot y^2 + \&c.] + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y^I}{\partial t^2} + (h^I)^2 \cdot y^I &= S + \alpha \cdot [S^I \cdot y^I + S^{II} \cdot \frac{\partial y^I}{\partial t} + S^{III} \cdot y + S^{IV} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}] \\ &+ \alpha^2 \cdot [S^V \cdot (y^I)^2 + \&c.] + \&c. \end{aligned}$$

$T$ ,  $T'$ , &c.  $S$ ,  $S'$  &c. étant des fonctions quelconques rationnelles & entières de sinus & de cosinus; on fera,

$$y = z + \alpha z^I + \alpha^2 z^{II} + \&c.$$

$$y^I = u + \alpha u^I + \alpha^2 u^{II} + \&c.$$

& l'on trouvera pour  $y$  & pour  $y^I$  deux expressions de cette forme,

$$\begin{aligned}
 y &= \sin. h. t. \left\{ \begin{aligned} &p + t. [K + \alpha (a.p + {}^1a.q + {}^2a.^1p + {}^3a.^1q) + \&c.] \\ &+ t^2. \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} + R. \\
 &+ \cos. h. t. \left\{ \begin{aligned} &q + t. [H + \alpha (b.q + {}^1b.p + {}^2b.^1q + {}^3b.^1p) + \&c.] \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} \\
 y' &= \sin. h'. t. \left\{ \begin{aligned} &{}^1p + t. [M + \alpha (c.^1p + {}^1c.^1q + {}^2c.p + {}^3c.q) + \&c.] \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} \\
 &+ \cos. h'. t. \left\{ \begin{aligned} &{}^1q + t. [N + \alpha (e.^1q + {}^1e.^1p + {}^2e.p + {}^3e.p) + \&c.] \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} + {}^1R.
 \end{aligned}$$

$p, q, {}^1p$  &  ${}^1q$  étant les quatre constantes arbitraires des valeurs de  $y, y', \frac{\partial y}{\partial t},$  &  $\frac{\partial y'}{\partial t},$  lorsque  $t = 0$ ; de-là on tirera par la méthode de l'article cité, les quatre équations,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial T} &= K + \alpha. (a.p + {}^1a.q + {}^2a.^1p + {}^3a.^1q) + \alpha^2. ({}^4a.p^2 + \&c.) + \&c. \\
 \frac{\partial q}{\partial T} &= H + \alpha. (b.q + {}^1b.p + {}^2b.^1q + {}^3b.^1p) + \alpha^2. ({}^4b.q^2 + \&c.) + \&c. \\
 \frac{\partial {}^1p}{\partial T} &= M + \alpha. (c.^1p + {}^1c.^1q + {}^2c.p + {}^3c.q) + \&c. \\
 \frac{\partial {}^1q}{\partial T} &= N + \alpha. (e.^1q + {}^1e.^1p + {}^2e.q + {}^3e.p) + \&c.
 \end{aligned}$$

Pour intégrer ces équations, on fera,

$$\begin{aligned}
 p &= r + \alpha. (f.r + {}^1f.s + {}^2f.^1r + {}^3f.^1s) \\
 &\quad + \alpha. ({}^4f.r + \&c.) + \&c. \\
 q &= s + \alpha. (g.s + \&c.) + \&c. \\
 {}^1p &= {}^1r + \alpha. (m.^1r + \&c.) + \&c. \\
 {}^1q &= {}^1s + \&c.
 \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs de  $p, q, {}^1p, {}^1q,$  dans les quatre équations précédentes, on formera par la méthode du même article, quatre équations linéaires entre  $r, s, {}^1r,$  &  ${}^1s$ ; d'où l'on aura, comme dans l'article cité, les valeurs de  $y,$  &  $y',$  après le temps quelconque  $T,$  aux quantités près de l'ordre  $\alpha^{n+1}.$

## V I I.

La méthode précédente d'intégrer par approximation les équations différentielles, en faisant varier les constantes arbitraires des intégrales approchées, est, si je ne me trompe, très-féconde dans l'analyse; pour en donner un usage fort étendu, je suppose que l'on ait une équation différentielle, d'un ordre quelconque, entre  $z, t, p, q, \&c.$   $\partial t$ , étant supposé constant, &  $p, q, \&c.$  étant des quantités qui croissent fort lentement; on intégrera d'abord cette équation, en regardant  $p$  &  $q$  comme constans; je suppose que l'intégrale soit  $z = \phi(t, p, q, \&c. a, b, \&c.)$ ;  $a, b, \&c.$  étant des constantes arbitraires dépendantes des valeurs de  $z, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \&c.$  à l'origine de l'intégrale que je fixe lorsque  $t = h$ .

Cette valeur de  $z$  pourra être employée, sans erreur sensible, pour une valeur de  $t$ , fort grande; car les variations de  $p, q, \&c.$  étant supposées de l'ordre  $\alpha$ , si l'on regarde  $\alpha$  comme infiniment petit, il faut supposer à  $t$  une valeur infinie, pour que les quantités qu'on néglige, en regardant  $p, q, \&c.$  comme constans, puissent devenir sensibles; mais lorsque  $t$  est infini, ces quantités peuvent être finies; ainsi le problème qu'il s'agit de résoudre, est d'avoir une expression de  $z$ , telle que les quantités de l'ordre  $\alpha$ , qu'on y néglige, ne puissent devenir finies, après une valeur de  $t$  infiniment grande.

Pour cela, je suppose  $t = h + T$ ,  $T$  étant extrêmement grand, mais tel cependant que dans cet intervalle, les valeurs de  $p, q, \&c.$  soient encore peu sensibles; on peut faire usage de l'expression  $z = \phi(t, p, q, \&c. a, b, \&c.)$ , depuis  $t = h$ , jusqu'à  $t = h + T$ . Si l'on vouloit avoir la valeur de  $z$ , pour un intervalle plus considérable; par exemple, lorsque  $t = h + T + t_1$ , on auroit  $z = \phi(h + T + t_1, p', q', \&c. a', b', \&c.)$ ;  $p', q', \&c. a', b', \&c.$  étant ce que deviennent  $p, q, \&c. a, b, \&c.$  après l'intervalle  $T$ ; cette nouvelle valeur de  $z$  peut être employée sans erreur sensible,

depuis

depuis  $t = 0$ , jusqu'à  $t = T$ ,  $T$  étant tel que dans cet intervalle, les variations de  $p, q$ , &c. soient encore fort petites; en continuant d'opérer ainsi, & prenant les valeurs de  $z$ , 1.<sup>o</sup> depuis  $t = h$ , jusqu'à  $t = h + T$ ; 2.<sup>o</sup> depuis  $t = h + T$ , jusqu'à  $t = h + T + T'$ ; 3.<sup>o</sup> depuis  $t = h + T + T'$ , jusqu'à  $t = h + T + T' + T''$ , &c. on aura l'expression de  $z$ , pour une valeur quelconque de  $t$ ; mais il faut, à chaque opération, déterminer les nouvelles constantes arbitraires  $a', b'$ , &c.  $a'', b''$ , &c. qu'elle introduit; or, de la même manière que les constantes arbitraires  $a, b$ , &c. se déterminent au moyen des valeurs de  $z$ ,  $\frac{\partial z}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ , &c. lorsque  $t = h$ ; de même, les constantes arbitraires  $a', b'$ , &c. doivent se déterminer au moyen de ces valeurs, lorsque  $t = h + T$ ; soit donc,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \phi^I.(t, p, q, \&c. a, b, \&c.),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \phi^{II}.(t, p, q, \&c. a, b, \&c.),$$

&c.

On aura, à la fin de l'intervalle compris entre  $t = h$ , &  $t = h + T$ ;

$$z = \phi.(h + T, p, q, \&c. a, b, \&c.),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \phi^I.(h + T, p, q, \&c. a, b, \&c.),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \phi^{II}.(h + T, p, q, \&c. a, b, \&c.),$$

&c.

& au commencement de l'intervalle compris entre  $t = h + T$ , &  $t = h + T + T'$ ,

$$z = \phi.(h + T, p^I, q^I, \&c. a^I, b^I, \&c.),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \phi^I.(h + T, p^I, q^I, \&c. a^I, b^I, \&c.),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \phi^{II}.(h + T, p^I, q^I, \&c. a^I, b^I, \&c.).$$

&c.

*Mém. 1772, II.<sup>e</sup> Partie.*

Rr

Ces valeurs de  $z$ ,  $\frac{\partial z}{\partial t}$ , &c. sont les mêmes à la fin du premier intervalle, qu'au commencement du second; on aura donc les équations,

$$\left. \begin{aligned} & \phi . (h + T, p, q, \&c. a, b, \&c.) \\ & = \phi . (h + T, p', q', \&c. a', b', \&c.); \\ & \phi' . (h + T, p, q, \&c. a, b, \&c.) \\ & = \phi' . (h + T, p', q', \&c. a', b', \&c.); \\ & \&c. \end{aligned} \right\} (\sigma).$$

Si  $p, q, \&c.$  étoient invariables, on auroit  $a = a', b = b', \&c.$  soit donc  $p' = p + \delta p, q' = q + \delta q, \&c.$   $\delta p, \delta q, \&c.$  étant des quantités extrêmement petites de l'ordre  $\alpha$ ; soit de plus,  $a' = a + \delta a, b' = b + \delta b, \&c.$   $\delta a, \delta b, \&c.$  seront de l'ordre  $\delta p, \delta q, \&c.$  les équations  $(\sigma)$  donneront, cela posé, en négligeant les quantités de l'ordre  $\delta p^2$ .

$$0 = \delta p . \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right) + \delta q . \left( \frac{\partial z}{\partial q} \right) + \&c.$$

$$+ \delta a . \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right) + \delta b . \left( \frac{\partial z}{\partial b} \right) + \&c.$$

$$0 = \delta p . \left( \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial t} \right) + \delta q . \left( \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial t} \right) + \&c.$$

$$+ \delta a . \left( \frac{\partial^2 z}{\partial a \partial t} \right) + \delta b . \left( \frac{\partial^2 z}{\partial b \partial t} \right) + \&c.$$

$$0 = \delta p . \left( \frac{\partial^3 z}{\partial p^2 \partial t} \right) + \&c.$$

&c.

Les quantités  $\left( \frac{\partial z}{\partial p} \right), \left( \frac{\partial z}{\partial q} \right), \&c. \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right), \&c.$  représentent

les coëfficiens de  $\partial p, \partial q, \&c. \partial a, \&c.$  dans la différentiation de  $z$  en y faisant varier  $p, q, \&c. a, \&c.$

Maintenant, si l'on différentie les équations précédentes, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , & observant que

$$\partial . \delta p = \delta p, \partial \delta q = \delta q, \&c. \partial \delta a = \delta a, \&c.$$

la première donnera



$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right) + \frac{\partial q}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial q} \right) + \&c. \\
& + \frac{\partial a}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right) + \frac{\partial b}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial b} \right) + \&c. \\
& + \delta p \cdot \left( \frac{\partial \partial z}{\partial p \partial t} \right) + \delta q \cdot \left( \frac{\partial \partial z}{\partial q \partial t} \right) + \&c. \\
& + \delta a \cdot \left( \frac{\partial \partial z}{\partial a \partial t} \right) + \&c.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$0 = \delta p \cdot \left( \frac{\partial \partial z}{\partial p \partial t} \right) + \delta q \cdot \left( \frac{\partial \partial z}{\partial q \partial t} \right) + \&c.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right) + \frac{\partial q}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial q} \right) + \&c. \\
& + \frac{\partial a}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right) + \frac{\partial b}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial b} \right) + \&c.
\end{aligned}$$

On trouvera de la même manière,

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial \partial z}{\partial p \partial t} \right) + \frac{\partial q}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial \partial z}{\partial q \partial t} \right) + \&c. \\
& + \frac{\partial a}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial \partial z}{\partial a \partial t} \right) + \frac{\partial b}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial \partial z}{\partial b \partial t} \right) + \&c.
\end{aligned}$$

& ainsi de suite; on formera autant de ces équations qu'il y a d'arbitraires  $a, b, \&c.$  & en les intégrant, on aura les valeurs de ces constantes arbitraires. On peut observer que dans ces équations la supposition de  $a$  infiniment petit, permet de supposer  $t$  infiniment grand, ce qui simplifie le calcul dans un grand nombre de circonstances.

On peut parvenir encore à ces mêmes équations de la manière suivante.

Je suppose que l'équation  $z = \phi(t, p, q, \&c. a, b, \&c.)$ , au lieu d'être l'intégrale approchée de l'équation différentielle proposée, en soit l'intégrale complète, il est visible que  $a, b, \&c.$  ne seront plus constants, mais qu'ils varieront avec  $p, q, \&c.$  dans un rapport qu'il s'agit de déterminer. Je suppose donc, comme ci-dessus, que lorsque  $p, q, \&c.$  croissent depuis l'origine de l'intégrale des quantités  $\delta p, \delta q, \&c.$   $a, b, \&c.$  croissent des quantités  $\delta a, \delta b, \&c.$   $\delta p, \delta q, \&c.$   $\delta a, \delta b, \&c.$

R r ij

étant extrêmement petits; on aura, comme l'on fait, en négligeant les quantités de l'ordre  $\Delta^2$ ,

$$\begin{aligned} z = & \varphi(t, p, q, \&c. a, b, \&c.) + \Delta p \cdot \left( \frac{\partial \cdot \varphi(t, p, q, \&c. a, b, \&c.)}{\partial p} \right) \\ & + \Delta q \cdot \left( \frac{\partial \cdot \varphi(t, p, q, \&c. a, b, \&c.)}{\partial q} \right) + \&c. \\ & + \Delta a \cdot \left( \frac{\partial \cdot \varphi(t, p, \&c.)}{\partial a} \right) + \&c. \end{aligned}$$

$p, q, \&c. a, b, \&c.$  étant les valeurs de  $p, q, \&c. a, b, \&c.$  à l'origine de l'intégrale; en regardant conséquemment  $p, q, \&c. a, b, \&c.$  comme constans, on néglige dans l'expression de  $z$ , la quantité

$$\Delta p \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \right) + \Delta q \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \right) + \&c. + \Delta a \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} \right) + \Delta b \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial b^2} \right) + \&c.$$

Faisant donc en sorte que cette erreur soit nulle, on aura l'équation

$$0 = \Delta p \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \right) + \Delta q \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \right) + \&c. + \Delta a \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} \right) + \&c.$$

la même que nous avons trouvée précédemment. En raisonnant sur les valeurs de  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ ,  $\&c.$  comme nous venons de le faire sur celle de  $z$ , nous aurons les autres équations.

#### E X E M P L E.

Je suppose que l'on veuille intégrer l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + p^2 z = 0; \text{ } p \text{ étant une quantité croissante très-}$$

lentement, & telle que l'on ait  $p = m \cdot \cos(a t + \epsilon)$ ,  $a$  étant extrêmement petit; j'intègre d'abord cette équation en supposant  $p$  constant, ce qui donne  $z = a \cdot \sin. p t + b \cdot \cos. p t$ ; & l'on a, par ce qui précède, les deux équations

$$0 = (\partial a - b t \partial p) \cdot \sin. p t + (\partial b + a t \partial p) \cdot \cos. p t$$

$$0 = (a \partial p + p \partial a - p b t \partial p) \cdot \cos. p t - (b \partial p + p \partial b + p a t \partial p) \cdot \sin. p t$$

La supposition de  $t$  extrêmement grand, fait disparaître le terme  $a \partial p \cdot \cos. p t$  devant  $- p a t \partial p \cdot \sin. p t$ ; il peut donc

être négligé ainsi que le terme  $-b\partial p \cdot \sin.pt$ ; on aura ainsi les deux équations

$$0 = (\partial a - b t \partial p) \cdot \sin.pt + (\partial p + a t \partial p) \cdot \cos.pt$$

$$0 = (\partial a - b t \partial p) \cdot \cos.pt - (\partial b + a t \partial p) \cdot \sin.pt;$$

Je multiplie la première par  $\sin.pt$ , & la seconde par  $\cos.pt$ , & je les ajoute, ce qui donne,  $0 = \partial a - b t \partial p$ ; je multiplie ensuite la seconde par  $\sin.pt$ , & je la retranche de la première multipliée par  $\cos.pt$ , ce qui donne

$$0 = \partial b + a t \partial p; \text{ soit } t \partial p = \partial s, \text{ on aura}$$

$$0 = \partial a - b \partial s, \quad 0 = \partial b + a \partial s;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$a = f \cdot \sin.(s + \varpi), \quad b = f \cdot \cos.(s + \varpi),$$

$f$  &  $\varpi$  étant deux constantes arbitraires; donc

$$z = f \cdot \sin.(s + \varpi) \cdot \sin.pt + f \cdot \cos.(s + \varpi) \cdot \cos.pt = f \cdot \cos.(pt - s - \varpi);$$

or,

$$s = \int. t \partial p = pt - \int p \partial t = pt - \frac{m}{\alpha} \cdot \sin.(\alpha t + \epsilon);$$

donc,

$$z = f \cdot \cos. \left[ -\varpi + \frac{m}{\alpha} \sin.(\alpha t + \epsilon) \right],$$

c'est l'expression de  $z$ , en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha$  qui restent toujours fort petites, quel que soit le temps  $t$ .

## V I I I.

### *Application de la méthode précédente à la théorie des Planètes.*

La partie la plus délicate de cette importante théorie, est la détermination des inégalités séculaires du mouvement des Planètes, & malgré les savantes recherches des premiers Géomètres de ce siècle, sur cet objet, il faut convenir qu'elle laisse beaucoup à désirer encore.

M. de la Grange est le premier qui ait envisagé cette

matière sous son véritable point de vue, dans la belle pièce *sur les inégalités des Satellites de Jupiter*, & dans la *théorie de Jupiter & de Saturne*; la méthode qu'il a employée pour cela est un chef-d'œuvre d'analyse, & l'excellent Mémoire qu'il vient de donner, *sur les variations du mouvement des nœuds des Planètes & de l'inclinaison de leurs orbites*, renferme la théorie la plus générale & la plus simple de ces variations; mais toutes les autres inégalités séculaires, & sur-tout celle du moyen mouvement & de la moyenne distance, n'avoient point encore été déterminées avec l'exactitude & la généralité qu'on peut desirer, au moins jusqu'au moment où je donnai sur cet objet, mes recherches, dans lesquelles j'ai prouvé que les moyens mouvemens des Planètes & leurs moyennes distances au Soleil, sont invariables. (*Voyez le tome VII des Savans étrangers*) Je me propose ici de considérer toutes les inégalités, tant périodiques que séculaires, du mouvement de ces corps; on verra avec quelle facilité la méthode précédente donne ces inégalités, & j'ose me flatter que cette discussion intéressera les Géomètres par sa généralité, & sur-tout par l'exactitude des résultats.

*Du mouvement d'un point sollicité par des forces quelconques.*

Je suppose ici toutes les parties d'un corps réunies à son centre de gravité; pour en déterminer la position dans l'espace, je prends, sur un plan fixe, deux droites perpendiculaires entre elles, & qui se croisent dans un point que je nomme  $S$ ; l'une sera ce que j'appelle *axe des  $x$* , & l'autre, *axe des  $y$* ; soit de plus  $z$  la distance du corps à ce plan, sa position sera déterminée par les trois coordonnées  $x$ ,  $y$  &  $z$ ; cela posé, si l'on réduit toutes les forces dont il est animé, à trois autres parallèles aux axes des  $x$ , des  $y$  & des  $z$ ; que l'on nomme  $\psi$  la première,  $\psi'$  la seconde &  $\psi''$  la troisième; on aura, en prenant l'élément  $dt$ , du temps, pour constant, & supposant que les forces  $\psi$ ,  $\psi'$  &  $\psi''$ , tendent à augmenter les  $x$ , les  $y$

$$\& \text{ les } z, \quad \partial \partial x = \psi \cdot \partial t^2; \quad (1)$$

$$\partial \partial y = \psi' \cdot \partial t^2; \quad (2)$$

$$\partial \partial z = \psi'' \cdot \partial t^2; \quad (3)$$

maintenant, par l'origine  $S$  des  $x$  & des  $y$ , je mène au point de projection du corps sur le plan fixe, une droite que je représente par  $r$ , & que dans la suite je nommerai *rayon vecteur*; je nomme ensuite  $\phi$  l'angle formé par cette droite & par l'axe des  $x$ , &  $s$  la tangente de la latitude du corps vu du point  $S$ ; on aura,

$$x = r \cdot \cos. \phi; \quad y = r \cdot \sin. \phi; \quad \& \quad z = rs;$$

partant,

$$\partial \partial x = \partial \partial r \cdot \cos. \phi - 2 \partial r \partial \phi \cdot \sin. \phi - r \partial \partial \phi \cdot \sin. \phi - r \partial \phi^2 \cdot \cos. \phi,$$

$$\partial \partial y = \partial \partial r \cdot \sin. \phi + 2 \partial r \partial \phi \cdot \cos. \phi + r \partial \partial \phi \cdot \cos. \phi - r \partial \phi^3 \cdot \sin. \phi,$$

$$\partial \partial z = r \partial \partial s + 2 \partial s \partial r + s \partial \partial r.$$

Or, si l'on suppose que l'axe des  $x$  soit infiniment près de la droite  $r$ , on aura  $\phi = 0$ ,  $\sin. \phi = 0$ , &  $\cos. \phi = 1$ ; partant,  $\partial \partial x = \partial \partial r - r \partial \phi^2$ ;  $\partial \partial y = r \partial \partial \phi + 2 \partial r \partial \phi$ ; les équations (1), (2) & (3) deviendront conséquemment,

$$\partial \partial r - r \partial \phi^2 - \psi \partial t^2 = 0; \quad (4)$$

$$r \partial \partial \phi + 2 \partial r \partial \phi - \psi' \partial t^2 = 0; \quad (5)$$

$$\partial \partial s + \frac{2 \partial s \partial r}{r} + s \frac{\partial \partial r}{r} - \frac{\psi''}{r} \cdot \partial t^2 = 0; \quad (6)$$

mais il faut observer qu'alors la force  $\psi$ , est parallèle à  $r$ , & tend à l'augmenter, & que la force  $\psi'$  est perpendiculaire à cette droite, & tend à augmenter l'angle  $\phi$ ; or, comme les équations précédentes ne renferment que les différentielles de cet angle, on peut en fixer où l'on voudra, l'origine sur le plan fixe.

Si l'on multiplie l'équation (5) par  $r$ , & qu'on l'intègre, on aura  $\frac{r^2 \partial \phi}{\partial t} = c + \int \psi' \cdot r \partial t$ ;  $c$  étant une constante arbitraire; donc,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c + \int \psi' \cdot r \partial t}{r^2}; \quad (7)$$

l'équation (4) deviendra, en y substituant cette valeur de  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ,

$$\frac{\partial \partial r}{\partial t^2} - \frac{[c + f\psi^1 \cdot r \partial t]^2}{r^3} - \psi = 0; (8)$$

& si dans l'équation (6) on substitue, au lieu de  $\partial \partial r$ , la valeur tirée de l'équation (8), on aura

$$\frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + \frac{2 \partial s \partial r}{\partial t^2} + \frac{s \cdot [c + f\psi^1 \cdot r \partial t]^2}{r^4} + \frac{s\psi - \psi^{11}}{r} = 0; (9)$$

au moyen des équations (7), (8) & (9), on déterminera le mouvement du corps dans l'espace.

Je suppose qu'au lieu de  $\partial t$ , on veuille prendre  $\partial \phi$  pour constant, on mettra l'équation (5) sous cette forme,

$$r \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \partial \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2 \partial r \cdot \frac{\partial \phi^2}{\partial t^2} = \psi^1 \cdot \partial \phi;$$

si l'on multiplie cette équation par  $2r^3$ , le premier membre devient intégrable, & l'on a  $r^4 \cdot \frac{\partial \phi^2}{\partial t^2} = h^2 + 2 \int r^3 \psi^1 \cdot \partial \phi$ ,

$h$  étant une constante arbitraire; donc  $\partial t = \frac{r^2 \partial \phi}{\sqrt{h^2 + 2 \int r^3 \psi^1 \cdot \partial \phi}}$ ;

ensuite l'équation (4) donne  $\partial \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right) - r \frac{\partial \phi^2}{\partial t} = \psi \partial t$ ;

en substituant, au lieu de  $\partial t$ , la valeur, & faisant  $\frac{1}{r} = u$ , on aura

$$\frac{\partial \partial u}{\partial \phi^2} + u + \frac{\frac{\psi}{u^2} + \frac{1}{u^3} \cdot \psi^1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi}}{h^2 + 2 \int \frac{\psi^1 \cdot \partial \phi}{u^3}} = 0.$$

L'équation (6) donnera, par un procédé semblable, en y faisant  $\frac{1}{r} = u$ , & en y substituant, au lieu de  $\partial \partial u$ , la valeur tirée de l'équation précédente,

$$\frac{\partial \partial s}{\partial \phi^2} + s + \frac{s\psi - \psi^{11} + \psi^1 \cdot \frac{\partial s}{\partial \phi}}{u^3 \cdot [h^2 + 2 \int \frac{\psi^1 \cdot \partial \phi}{u^3}]} = 0.$$

## I X.

*Du mouvement des Planètes autour du Soleil, en négligeant leur action les unes sur les autres.*

Je suppose un nombre indéfini de Planètes  $P, P', P'', \&c.$  circulantes autour du Soleil, & que l'on néglige leur action les unes sur les autres; soit  $S$  la masse du Soleil, & concevons cet astre immobile au point  $S$ ; si l'on transporte en sens contraire à la Planète  $P$  son action sur le Soleil, elle sera

sollicitée vers  $S$  par une force égale à  $\frac{S+P}{r^2(1+ss)}$ , d'où l'on tire

$$\psi' = 0, \psi = -\frac{(S+P).u^2}{(1+ss)^{\frac{3}{2}}}, \text{ \& } \psi'' = -\frac{(S+P).su^2}{(1+ss)^{\frac{5}{2}}};$$

on aura ainsi les trois équations,

$$\partial t = \frac{r^2 \partial \phi}{h}; \frac{\partial \partial u}{\partial \phi^2} + u - \frac{(S+P)}{h^2(1+ss)^{\frac{3}{2}}} = 0; \frac{\partial^2 s}{\partial \phi^2} + s = 0;$$

$\frac{r^2 \partial \phi}{2}$  étant le petit secteur décrit par le rayon vecteur  $r$ ,

durant l'élément du temps  $\partial t$ , la première de ces trois équations nous apprend que les aires décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps; la troisième équation donne en l'intégrant,  $s = a\gamma \cdot \sin.(\phi + \varpi)$ ,  $a\gamma$  &  $\varpi$  étant deux constantes arbitraires; & la seconde donne

$$u = \frac{S+P}{h^2(1+a^2\gamma^2)} \cdot \sqrt{(1+ss)} + m \cdot \cos.(\phi + \epsilon);$$

$m$  &  $\epsilon$  étant constans & arbitraires. L'expression de  $s$  montre que l'orbite est dans un plan invariable, dont la tangente d'inclinaison au plan fixe est  $a\gamma$ , ce qui d'ailleurs est visible. Je suppose donc que le plan fixe soit celui de cette orbite,

on aura  $s = 0$ , &  $a\gamma = 0$ ; donc,  $u = \frac{S+P}{h^2}$

$$+ m \cdot \cos.(\phi + \epsilon); \text{ \& } r = \frac{1}{\frac{S+P}{h^2} + m \cdot \cos.(\phi + \epsilon)};$$

mais si l'on nomme  $a$  le demi-grand axe d'une ellipse,  $ae$  son excentricité,  $r$  le rayon vecteur mené d'un des foyers à la courbe,  $\varphi + \epsilon$  l'angle compris entre le rayon vecteur & la plus grande des deux parties du grand axe divisé inégalement par le foyer, on a, comme l'on fait,  $r = \frac{a \cdot (1 - a^2 e^2)}{1 - ae \cdot \cos(\varphi + \epsilon)}$ ; d'où en comparant cette expression de  $r$  à la précédente, on aura  $m = -\frac{-ae}{a \cdot (1 - a^2 e^2)}$ , &  $\frac{h^2}{P + S} = a \cdot (1 - a^2 e^2)$ ; partant  $h = \sqrt{(S + P) \cdot a \cdot (1 - a^2 e^2)}$ .

Si l'on reprend l'équation  $\partial t = \frac{r^3 \partial \varphi}{h}$ , en nommant  $T$  le temps d'une révolution entière de  $P$ , &  $E$  la surface de l'ellipse que décrit cette Planète, on aura  $T = \frac{2E}{h}$ ; mais si l'on désigne par  $\pi$  le rapport de la demi-circonférence au rayon, on a  $E = a^2 \pi \cdot \sqrt{(1 - a^2 e^2)}$ ; donc, si dans l'expression de  $T$ , on substitue au lieu de  $E$  & de  $h$  leurs valeurs, on aura  $T = \frac{2\pi \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S + P)}}$ .

En négligeant  $P$  par rapport à  $S$ , on a  $T = \frac{2\pi \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S)}}$ ; & en marquant d'un, de deux, &c. traits relativement à  $P'$ ,  $P''$ , &c. les quantités  $T$  &  $a$ , on aura  $T' = \frac{2\pi \cdot (a')^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S)}}$ ;  $T'' = \frac{2\pi \cdot (a'')^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S)}}$ , &c. Donc  $T^3 : (T')^3 : (T'')^3 : \&c. :: a^3 : (a')^3 : (a'')^3 : \&c.$

Soit  $nt$ , le moyen mouvement de  $P$  autour du Soleil; en sorte que l'on ait  $\varphi$  égal à  $nt$ , plus à une fonction de quantités périodiques, on aura  $nT = 360^\circ = 2\pi$ ; donc, puisque  $T = \frac{2\pi \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S + P)}}$ , on aura  $nn = \frac{S + P}{a^3}$ , &  $h = \sqrt{(S + P) \cdot a \cdot (1 - a^2 e^2)} = na^2 \cdot (1 - a^2 e^2)^{\frac{1}{2}}$ ;



partant,

$$\partial \phi = \frac{h \partial t}{r^2} = \frac{n \partial t}{(1 - \alpha^2 e^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot [1 - \alpha e \cdot \cos. (\phi + \epsilon)]^2.$$

Pour déterminer  $\phi$  en  $t$ , je suppose l'origine des angles  $\phi$ , &  $nt$ , à l'aphélie, en sorte que la Planète parte de ce point au premier instant de son mouvement, on aura  $\epsilon = 0$ ; soit  $\phi = nt + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \&c.$  on aura, en réduisant  $\cos. (\phi + \epsilon)$ , ou,  $\cos. (nt + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \&c.)$ , &  $\frac{1}{(1 - \alpha^2 e^2)^{\frac{1}{2}}}$ , en suites ascendantes par rapport à  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \partial \phi &= n \partial t + \alpha \partial z + \alpha^2 \partial z^2 + \&c. \\ &= n \partial t. \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2 \alpha e \cos. nt + 2 \alpha^2 e^2 + \&c. \\ + 2 \alpha^2 e z \sin. nt \\ + \frac{\alpha^2 e^2}{2} \cos. 2 nt \end{array} \right. \end{aligned}$$

De-là je conclus, en comparant ensemble les termes de l'ordre  $\alpha$ , ceux de l'ordre  $\alpha^2$ , &c.  $\partial z = - 2 e n \partial t \cdot \cos. nt$ ;

$$\partial z^2 = n \partial t \cdot [2 e^2 + 2 e z \sin. nt + \frac{e^2}{2} \cos. 2 nt]; \&c.$$

en intégrant ces équations, & faisant en sorte que  $z$ ,  $z^2$ , &c. soient nuls avec  $t$ , on aura

$$z = - 2 e \sin. nt; z^2 = \frac{5}{4} e^2 \sin. 2 nt; \&c.$$

donc

$$\phi = nt - 2 \alpha e \sin. nt + \frac{5}{4} \alpha^2 e^2 \sin. 2 nt + \&c.$$

Pour déterminer présentement  $r$  en  $t$ , j'observe que l'équation  $\partial t = \frac{r^2 \partial \phi}{h}$ , donne

$$r = \sqrt{\left( \frac{h \partial t}{\partial \phi} \right)} = \frac{a [1 - \alpha^2 e^2]^{\frac{1}{2}}}{[1 - 2 \alpha e \cos. nt + \frac{1}{2} \alpha^2 e^2 \cos. 2 nt + \&c.]^{\frac{1}{2}}}.$$

d'où je conclus

$$r = a \cdot [1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} + \alpha e \cos. nt - \frac{\alpha^2 e^2}{2} \cos. 2 nt + \&c.].$$

Si, lorsque  $t = 0$ , la Planète au lieu d'être à son aphélie, étoit plus avancée de la quantité  $\epsilon$ ; en nommant  $\theta$ , l'anomalie

S f ij

324 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
moyennie correspondante à l'anomalie vraie  $\epsilon$ , on a, par ce  
qui précède,

$$\begin{aligned}\epsilon &= \theta - 2ae \cdot \sin. \theta + \frac{5}{4} \cdot a^2 e^2 \cdot \sin. 2\theta + \&c. \\ \& \ \varphi &= \theta + nt - 2ae \cdot \sin. (nt + \theta) \\ &\quad + \frac{5}{4} a^2 e^2 \cdot \sin. 2(nt + \theta) + \&c.\end{aligned}$$

& si la ligne fixe d'où l'on commence à compter l'angle  $\varphi$ ,  
au lieu d'être sur la ligne des apsidés, est moins avancée  
que l'aphélie d'un certain angle  $I$ , en sorte que  $I$  soit la  
longitude de l'aphélie, on a

$$\begin{aligned}\varphi &= I + \theta + nt - 2ae \cdot \sin. (nt + \theta) \\ &\quad + \frac{5}{4} a^2 e^2 \cdot \sin. (2nt + 2\theta) + \&c. \\ \& \ r &= a \cdot \left[ 1 + \frac{a^2 e^2}{2} + ae \cdot \cos. (nt + \theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^3 e^3}{2} \cdot \cos. (2nt + 2\theta) + \&c. \right]\end{aligned}$$

Je suppose maintenant que l'on veuille rapporter le mou-  
vement de la Planète à un autre plan très-peu incliné à celui  
de son orbite, & passant par le centre du Soleil; je nomme  
 $^{\circ}\varphi$  &  $^{\circ}r$ , la longitude de la Planète & son rayon vecteur  
dans l'orbite réelle, &  $\varphi$  &  $r$ , ces quantités dans l'orbite  
projetée; les expressions que nous venons de trouver pour  
 $\varphi$  &  $r$ , se rapportant à l'orbite réelle, sont les valeurs de  
 $^{\circ}\varphi$  & de  $^{\circ}r$ ; il faut présentement en conclure  $\varphi$  &  $r$  en  $r$ .

Pour cela, je fixe l'origine de  $\varphi$  & de  $^{\circ}\varphi$  sur la ligne  
des nœuds; on a  $^{\circ}r \cos. ^{\circ}\varphi = r \cos. \varphi$ : de plus,  
 $^{\circ}r = r \sqrt{1 + ss}$ , & nous avons trouvé précédemment  
 $s = \alpha\gamma \cdot \sin. \varphi$ ; soit  $\varphi = ^{\circ}\varphi + q$ ,  $q$  étant nécessairement  
fort petit; l'équation  $^{\circ}r \cos. ^{\circ}\varphi = r \cos. \varphi$ , donnera  
 $\sqrt{1 + ss} \cdot \cos. ^{\circ}\varphi = \cos. (^{\circ}\varphi + q)$ ; donc en négligeant  
le quarré de  $q$  & la quatrième puissance de  $s$ , on aura  
 $q \cdot \sin. ^{\circ}\varphi = -\frac{1}{2} ss \cdot \cos. ^{\circ}\varphi$ ; on peut supposer dans  
cette équation,  $^{\circ}\varphi = \varphi$ , & en y substituant au lieu de  $\sin. \varphi$ ,  
sa valeur  $\frac{s}{\alpha\gamma}$ , on aura

$$q = -\frac{1}{2} \alpha\gamma s \cdot \cos. \varphi = -\frac{1}{4} \alpha^2 \gamma^2 \cdot \sin. 2\varphi:$$

Si l'on néglige les quantités de l'ordre  $\alpha^3$ , on peut supposer dans cette équation  $\phi = nt + \varpi$ ,  $\varpi$  étant la distance moyenne de la Planète à son nœud, lorsque  $t = 0$ ; donc

$$\begin{aligned}\phi &= \phi - \frac{1}{4} \alpha^2 \gamma^2 \cdot \sin. (2nt + 2\varpi) \\ &= I + \theta + nt - 2ae \cdot \sin. (nt + \theta) + \&c. \\ &\quad - \frac{1}{4} \alpha^2 \gamma^2 \cdot \sin. (2nt + 2\varpi); \end{aligned}$$

l'exprime ici la distance entre l'aphélie de la Planète & le nœud de son orbite; soit  $L$  la projection de cet angle, ou, ce qui revient au même, la distance entre le nœud & la projection de l'aphélie, on aura par ce qu'on vient de voir,  $I = L + \frac{1}{4} \alpha^2 \gamma^2 \cdot \sin. 2L$ ; supposons ensuite qu'au lieu de fixer l'origine de  $\phi$  sur la ligne des nœuds, on la fixe sur une droite moins avancée de l'angle  $H$ , en sorte que la longitude du nœud soit  $H$ , on aura

$$\begin{aligned}\phi &= H + L + \frac{1}{4} \alpha^2 \gamma^2 \cdot \sin. 2L \\ &\quad + \theta + nt - 2ae \cdot \sin. (nt + \theta) + \&c. \end{aligned}$$

Je fais pour abréger,

$$H + L + \frac{1}{4} \alpha^2 \gamma^2 \cdot \sin. 2L = A.$$

Maintenant l'équation  $r = r \cdot \sqrt{1 + ss}$  donne  $r = r - \frac{1}{4} a \cdot \alpha^2 \gamma^2 + \frac{1}{4} a \cdot \alpha^2 \gamma^2 \cdot \cos. (2nt + 2\varpi) + \&c.$  ensuite l'équation  $s = \alpha \gamma \cdot \sin. \phi$ , donne

$$s = \alpha \gamma \cdot \sin. (nt + \varpi) + \&c;$$

donc on aura pour déterminer le mouvement de la Planète sur le plan fixe, les trois équations,

$$\begin{aligned}\phi &= A + \theta + nt - 2ae \cdot \sin. (nt + \theta) \\ &\quad + \frac{5}{4} \alpha^2 e^2 \cdot \sin. (2nt + 2\theta) + \&c. \\ &\quad - \frac{1}{4} \alpha^2 \gamma^2 \cdot \sin. (2nt + 2\varpi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r &= a \cdot \left[ 1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} - \frac{\alpha^2 \gamma^2}{4} + ae \cdot \cos. (nt + \theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^2 e^2}{2} \cdot \cos. (2nt + 2\theta) + \&c. \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2 \gamma^2}{4} \cdot \cos. (2nt + 2\varpi) \right] \end{aligned}$$

$$s = \alpha \gamma \cdot \sin. (nt + \varpi) + \&c.$$

$a$  étant le demi-grand axe de l'ellipse décrite par la Planète, ou, ce qui revient au même, la moyenne distance au Soleil;  $e$ , son excentricité;  $\gamma$ , la tangente de son inclinaison sur le plan fixe;  $A$  étant la longitude de la projection de l'aphélie, augmentée de  $\frac{1}{4} \alpha^2 \gamma^2 \cdot \sin. 2L$ ;  $L$  étant égale à la longitude de cette projection, moins celle du nœud;  $\theta$  &  $\varpi$  étant les moyennes distances de la Planète à son aphélie & à son nœud, lorsque  $t = 0$ .

Si l'on vouloit avoir les valeurs de  $r^i, \phi^i, s^i; r^{ii}, \phi^{ii}, s^{ii}$ , &c. relatives aux Planètes  $P^i, P^{ii}$ , &c. il suffiroit de marquer d'un trait, de deux traits, &c. les lettres  $a, e, \theta, \gamma, A, \varpi, n$ .

## X.

*Du mouvement des Planètes autour du Soleil, en ayant égard à leur action les unes sur les autres.*

Je reprends les équations (7), (8) & (9) de l'art. VIII.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c + f\psi^i \cdot r \partial t}{r^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \partial r}{\partial t^2} - \frac{(c + f\psi^i \cdot r \partial t)^2}{r^3} - \psi = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial s \partial r}{\partial t^2} + \frac{s \cdot (c + f\psi^i \cdot r \partial t)^2}{r^4} + \frac{s\psi - \psi^{ii}}{r} = 0; \quad (9)$$

Au moyen desquelles il faut déterminer le mouvement de la Planète  $P$ ; pour cela, il est nécessaire de connoître les forces  $\psi, \psi^i, \psi^{ii}$ , dont elle est animée; or, cette Planète est d'abord attirée vers le Soleil par une force égale à  $\frac{S}{r^2(1+ss)}$ ;

de plus, elle attire le Soleil avec une force égale à  $\frac{P}{r^2(1+ss)}$ ;

& puisque nous cherchons le mouvement relatif de la Planète autour du Soleil, il faut considérer cet astre comme immobile,

& transporter à la Planète en sens contraire, la force  $\frac{P}{r^2(1+ss)}$ ;

ainsi cette Planète sera attirée vers  $S$  par une force égale à

$\frac{S+P}{r^2(1+s^2)}$ ; en la décomposant en deux, l'une parallèle au rayon vecteur, & tendante à éloigner  $P$  de  $S$ , & l'autre perpendiculaire au plan fixe, & tendante à élever la Planète au-dessus de ce plan, on aura, pour la première,  $\frac{-(S+P)}{r^2(1+s^2)^{\frac{1}{2}}}$ ; & pour la seconde,  $\frac{-(S+P) \cdot s}{r^2(1+s^2)^{\frac{1}{2}}}$ .

Imaginons ensuite une autre Planète  $P'$ , pour laquelle nous nommerons  $\phi'$ ,  $r'$  &  $s'$ , ce que nous avons nommé  $\phi$ ,  $r$  &  $s$  pour  $P$ ; soit  $v$  la distance de  $P$  à  $P'$ ;  $P'$  attirera  $P$  avec une force égale à  $\frac{P'^2}{v^2}$ ; il faut décomposer cette force en deux, l'une perpendiculaire au plan fixe, & l'autre parallèle à la projection de la droite  $v$  sur ce plan; or, la première est égale à  $\frac{r' \cdot s' - r \cdot s}{v^3} \cdot P'$ , & la seconde est égale à  $\frac{v \cdot P'}{v^3}$ ,

en nommant  $v$ , la projection de  $v'$ ; si l'on décompose cette dernière force en deux autres, l'une parallèle, & l'autre perpendiculaire à  $r$ , on trouvera pour la première,

$$\frac{[r' \cdot \cos.(\phi' - \phi) - r]}{v^3} \cdot P'; \text{ \& pour la seconde, } \frac{r' \cdot \sin.(\phi' - \phi)}{v^3} \cdot P'.$$

La Planète  $P'$  attire le Soleil avec une force égale à  $\frac{P'^2}{(r')^2(1+s'^2)}$ ; il faut donc transporter cette force en sens contraire à la Planète  $P$ ; & si après l'avoir ainsi transportée, on la décompose en trois, l'une perpendiculaire au plan fixe, l'autre parallèle à  $r$ , & la troisième parallèle au plan fixe & perpendiculaire à  $r$ , on trouvera pour la première  $-\frac{P' \cdot s'}{(r')^2(1+s'^2)^{\frac{1}{2}}}$ ;

pour la seconde,  $-\frac{P' \cdot \cos.(\phi' - \phi)}{(r')^2(1+s'^2)^{\frac{1}{2}}}$ ; & pour la troisième,  $-\frac{P' \cdot \sin.(\phi' - \phi)}{(r')^2(1+s'^2)^{\frac{1}{2}}}$ .

Si l'on marque de deux traits, de trois traits, &c. les lettres marquées d'un trait dans l'expression des forces précédentes, on aura les forces résultantes de l'action de tant d'autres Planètes,  $P''$ ,  $P'''$ ,  $P^{IV}$ , &c. qu'on voudra; rassemblant donc toutes ces forces, on aura

$$\psi = - \frac{S + P}{r^3(1+ss)^{\frac{3}{2}}} + \frac{P^I \cdot [r^I \cdot \cos(\phi^I - \phi) - r]}{r^3} - \frac{P^I \cdot \cos(\phi^I - \phi)}{(r^I)^3 \cdot (1+s^I \cdot s^I)^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{P^{II} \cdot [r^{II} \cdot \cos(\phi^{II} - \phi) - r]}{r^3} - \frac{P^{II} \cdot \cos(\phi^{II} - \phi)}{(r^{II})^3 \cdot (1+s^{II} \cdot s^{II})^{\frac{3}{2}}} \\ + \&c.$$

$$\psi' = P^I \cdot \sin(\phi^I - \phi) \cdot \left[ \frac{r^I}{r^3} - \frac{1}{(r^I)^3 \cdot (1+s^I \cdot s^I)^{\frac{3}{2}}} \right] + P^{II} \cdot \&c.$$

$$\psi'' = - \frac{(S+P) \cdot s}{r^3(1+ss)^{\frac{3}{2}}} + \frac{P^I \cdot (r^I \cdot s^I - rs)}{r^3} - \frac{P^I \cdot s^I}{(r^I)^3 \cdot (1+s^I \cdot s^I)^{\frac{3}{2}}} + P^{II} \cdot \&c.$$

partant, on aura

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = c + \int \left\{ \frac{P^I \cdot r \, dt \cdot \sin(\phi^I - \phi) \cdot \left[ \frac{r^I}{r^3} - \frac{1}{(r^I)^3 \cdot (1+s^I \cdot s^I)^{\frac{3}{2}}} \right]}{r^3} + P^{II} \cdot \&c. \right\} \quad (10)$$

$$0 = \frac{\partial \partial r}{\partial t^2} - \left\{ c + \int \left\{ \frac{P^I \cdot r \, dt \cdot \sin(\phi^I - \phi) \cdot \left[ \frac{r^I}{r^3} - \frac{1}{(r^I)^3 \cdot (1+s^I \cdot s^I)^{\frac{3}{2}}} \right]}{r^3} + P^{II} \cdot \&c. \right\} \right\}^2 \quad (11)$$

$$+ \frac{S + P}{r^3(1+ss)^{\frac{3}{2}}} + P^I \cdot \frac{[r - r^I \cdot \cos(\phi^I - \phi)]}{r^3} + \frac{P^I \cdot \cos(\phi^I - \phi)}{(r^I)^3 \cdot (1+s^I \cdot s^I)^{\frac{3}{2}}} + P^{II} \cdot \&c.$$

$$0 = \frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + \frac{2 \partial s \partial r}{r \partial t^2} + \frac{s}{rt} \left\{ c + \int \left\{ \frac{P^I \cdot r \, dt \cdot \sin(\phi^I - \phi) \cdot \left( \frac{r^I}{r^3} - \frac{1}{(r^I)^3 \cdot (1+s^I \cdot s^I)^{\frac{3}{2}}} \right)}{r^3} + P^{II} \cdot \&c. \right\} \right\}^2 \quad (12)$$

$$+ \frac{P^I}{r} \cdot [s^I - s \cdot \cos(\phi^I - \phi)] \cdot \left[ \frac{1}{(r^I)^3 \cdot (1+s^I \cdot s^I)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^I}{r^3} \right] + \frac{P^{II}}{r} \cdot \&c.$$

## X I.

Les Observations nous ont appris que les Planètes se meuvent dans des orbites presque circulaires & peu inclinées les unes aux autres, & que les perturbations que ces corps éprouvent en vertu de leur action réciproque, sont presque insensibles, puisque leurs mouvemens sont à très-peu près les mêmes que si le Soleil seul agissoit sur elles. Il faut donc que leurs masses soient extrêmement petites relativement à celle du Soleil; ainsi nommant  $\delta\mu$ ,  $\delta\mu'$ ,  $\delta\mu''$ , &c. les rapports des masses de  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$ , &c. à celles du Soleil, je considérerai ces quantités comme infiniment petites, & je négligerai leurs quarrés & leurs puissances supérieures, en sorte que dans les expressions de  $\phi$ ,  $r$ ,  $s$ , je n'aurai égard qu'aux termes de l'ordre  $\delta\mu$ , ce qui donne pour ces variables, des expressions de cette forme,

$$\left. \begin{aligned} \phi &= M + M' \cdot \delta\mu' + M'' \cdot \delta\mu'' + \&c. \\ r &= N + N' \cdot \delta\mu' + N'' \cdot \delta\mu'' + \&c. \\ s &= Q + Q' \cdot \delta\mu' + Q'' \cdot \delta\mu'' + \&c. \end{aligned} \right\} (>).$$

On peut supposer  $\delta\mu'' = 0$ ,  $\delta\mu''' = 0$ , &c. & déterminer dans cette supposition  $M'$ ,  $N'$ ,  $Q'$ ; car  $M''$ ,  $N''$ ,  $Q''$ ,  $M'''$ , &c. peuvent s'en déduire aisément en y changeant les quantités relatives à la planète  $P'$ , dans celles qui sont relatives aux planètes  $P''$ ,  $P'''$ , &c. Cela posé;

Si l'on avoit  $\delta\mu' = 0$ , ou, ce qui revient au même,  $P' = 0$ , les équations (10), (11) & (12) se changeroient dans celles-ci;

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{c}{r^2}; \quad (13).$$

$$0 = \frac{\partial \partial r}{\partial t^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{S + P}{r^2(1 + s)^{\frac{1}{2}}}; \quad (14).$$

$$0 = \frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + \frac{2 \partial s \partial r}{r \partial t^2} + \frac{c^2 s}{r^4}; \quad (15).$$

Ces équations sont celles qui auroient lieu, si les Planètes  
*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.* T t

330 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
 n'agissoient point les unes sur les autres ; leurs intégrales  
 sont donc par l'*art. IX*;

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A + \theta + nt - 2ae \cdot \sin. (nt + \theta) \\ &\quad + \frac{5}{4} a^2 e^2 \cdot \sin. (2nt + 2\theta) + \&c. \\ &\quad - \frac{1}{4} a^2 \gamma^2 \cdot \sin. (2nt + 2\varpi) \\ r &= a \cdot \left[ 1 + \frac{a^2 e^2}{2} - \frac{a^2 \gamma^2}{4} + ae \cos. (nt + \theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2 e^2}{2} \cdot \cos. (2nt + 2\theta) + \&c. \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 \gamma^2}{4} \cdot \cos. (2nt + 2\varpi) \right] \\ s &= a\gamma \cdot \sin. (nt + \varpi) + \&c. \end{aligned} \right\} (\sigma).$$

$a$  étant très-petit.

Ces trois valeurs de  $\varphi$ ,  $r$  &  $s$ , semblent renfermer sept constantes arbitraires  $A$ ,  $e$ ,  $\theta$ ,  $a$ ,  $n$ ,  $\gamma$ ,  $\varpi$ , quoiqu'il ne puisse y en avoir que six, le mouvement du corps  $P$  étant déterminé par trois équations différentielles du second ordre ; mais il faut observer qu'il existe (*art. IX*) entre  $n$  &  $a$ , une relation exprimée par cette équation,  $nn = \frac{S+P}{a^3}$ , ce qui réduit les deux arbitraires  $n$  &  $a$ , à une seule ; de plus, quoique la constante arbitraire  $c$ , de l'équation (13) ne paroisse pas entrer dans les valeurs de  $\varphi$ ,  $r$  &  $s$ , elle y est cependant implicitement renfermée en vertu d'une équation qui existe entre  $c$ ,  $a$ ,  $e$ , &  $\gamma$  ; en effet, puisque l'on a,  $r^2 \partial \varphi = c \partial t$ , si l'on nomme  $T$ , le temps d'une révolution entière de  $P$ , on aura  $cT = \int r^2 \partial \varphi$  ; mais il est visible que  $\int r^2 \partial \varphi$ , est égal au double de la surface de l'orbite projetée de la Planète ; or cette surface est à celle de l'orbite réelle, comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe ; donc, si l'on nomme  $E$ , la surface de l'orbite projetée, on aura en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $a^2$ ,



$$E = a^2 \pi \cdot (1 - \alpha^2 e^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + \alpha^2 \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2 \pi \times$$

$$\left[ 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 e^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \gamma^2 \right] = \frac{1}{2} c T;$$

mais par l'art. IX,  $T = \frac{2\pi \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{P+S}}$ ;

donc

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a \cdot (S+P)} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 e^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \gamma^2 \right) \\ &= n a^2 \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 e^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \gamma^2 \right] \end{aligned}$$

Les expressions précédentes de  $\phi$ ,  $r$  &  $s$ , satisfont aux équations (10), (11) & (12), lorsqu'on y suppose  $\delta \mu' = 0$ ,  $\delta \mu'' = 0$ , &c. Ce sont par conséquent les valeurs de  $M$ ,  $N$  &  $Q$  des équations (>). Pour déterminer présentement  $M'$ ,  $N'$  &  $Q'$ , il faut différencier les équations (13), (14) & (15) par rapport à  $\delta$ , & leur ajouter les termes multipliés par  $P'$ , dans les équations (10), (11) & (12), ce qui donne

$$\delta \cdot \frac{\delta \phi}{\delta t} = \frac{\delta c}{r^2} - \frac{2 c \delta r}{r^3} + \frac{P'}{r^2} \times \left\{ \int r dt. \sin. (\phi' - \phi) \cdot \left[ \frac{r^2}{u^3} - \frac{1}{(r')^2 \cdot (1 + s^2 \cdot s')^{\frac{3}{2}}} \right] \right\} \quad (16).$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta \delta \cdot \delta r}{\delta t^2} - \frac{2 c \delta c}{r^3} + \frac{3 c^2 \delta r}{r^4} - \frac{2 \cdot (S+P) \cdot \delta r}{r^3 (1 + s s')^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad - \frac{3 (S+P) \cdot s \delta s}{r^2 (1 + s s')^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 c P'}{r^3} \cdot \int r \delta t. \sin. (\phi' - \phi) \times \\ &\quad \left[ \frac{r^2}{u^3} - \frac{1}{(r')^2 \cdot (1 + s^2 \cdot s')^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{P'}{u^3} \times \\ &\quad \left[ r - r' \cdot \cos. (\phi' - \phi) \right] + \frac{P' \cdot \cos. (\phi' - \phi)}{(r')^2 \cdot (1 + s^2 \cdot s')^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (17).$$

T t ij

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial \partial_t \delta s}{\partial t^2} + \frac{2 \partial r \cdot \partial \delta s}{r \cdot \partial t^2} + \frac{2 \partial s \cdot \partial \delta r}{r \cdot \partial t^2} \\
& + \frac{c^2 \delta s}{r^2} + \frac{2 s c \delta c}{r^2} - \frac{4 c^2 s \delta r}{r^3} \\
& + \frac{2 c P^2}{r^4} \cdot \int r \partial t \cdot \sin. (\varphi^i - \varphi) \cdot \left[ \frac{r^i}{u^3} - \frac{1}{(r^i)^2 \cdot (1 + s^i \cdot s^i)^{\frac{1}{2}}} \right] \\
& + \frac{P^i}{r} \cdot [s^i - s \cdot \cos. (\varphi^i - \varphi)] \cdot \left[ \frac{1}{(r^i)^2 \cdot (1 + s^i \cdot s^i)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r^i}{u^3} \right]
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\frac{\partial \partial_t \delta s}{\partial t^2}} \right\} (18).$$

Il faut présentement tirer de ces équations, les valeurs de  $\delta c$ ,  $\delta \varphi$ ,  $\delta r$  &  $\delta s$ .

## X I I.

$\alpha$  étant ici fort petit, je n'aurai égard qu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , & parmi les termes de cet ordre, je ne considérerai que ceux qui peuvent produire dans la valeur de  $\delta \varphi$ , des quantités de la forme  $\delta \mu^i \cdot \alpha \cdot h t t$ , d'où résulteroit une équation séculaire dans le moyen mouvement de la Planète; ces termes méritent conséquemment une attention particulière: or il est aisé de voir à l'inspection des équations (16) & (17), que si dans le développement de

$$r \partial t \cdot \sin. (\varphi^i - \varphi) \cdot \left[ \frac{r^i}{u^3} - \frac{1}{(r^i)^2 \cdot (1 + s^i \cdot s^i)^{\frac{1}{2}}} \right],$$

il y avoit un terme tout constant, il en produiroit un dans la valeur de  $\delta r$ , de la forme  $\delta \mu^i \cdot f t$ , & dans la valeur de  $\delta \varphi$ , un de la forme  $\delta \mu^i \cdot g t t$ ; il faut donc dans le développement de cette quantité, porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ; mais on peut n'avoir aucun égard aux termes de cet ordre, qui seroient multipliés par des sinus ou des cosinus.

Il est aisé de voir pareillement qu'il est inutile d'avoir égard aux termes de l'ordre  $\alpha^2$ , dans le développement de

$$\frac{P^i}{u^3} \cdot [r - r^i \cdot \cos. (\varphi^i - \varphi)] + \frac{P^i \cdot \cos. (\varphi^i - \varphi)}{(r^i)^2 \cdot (1 + s^i \cdot s^i)^{\frac{1}{2}}};$$

soit donc

$$\partial \phi = \partial \mu' \cdot [x + \alpha x' + \alpha^2 \mathcal{C}.nni],$$

$$\partial r = a \partial \mu' \cdot [y + \alpha y' + \alpha^2 \lambda.ni],$$

$$\partial s = \alpha z \cdot \partial \mu'.$$

On substituera ces valeurs dans les équations (16), (17) & (18), en observant 1.<sup>o</sup> de substituer par-tout, au lieu de  $\phi, r, s$ ;  $\phi', r', s'$ , leurs valeurs tirées des équations ( $\sigma$ ) de l'article précédent; ce qui est évidemment permis, puisqu'on néglige ici les termes de l'ordre  $(\partial \mu')^2$ ; 2.<sup>o</sup> au lieu de  $P'$ , de substituer  $\partial \mu' \cdot a^3.nni$ ; car en négligeant les quantités de l'ordre  $\partial \mu$ , on a  $\frac{S}{a^3} = nn$ , &  $\partial \mu' = \frac{P'}{S}$ ; 3.<sup>o</sup> au lieu de  $c$ , d'écrire  $n \cdot a^2 \cdot (1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \cdot e^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \cdot \gamma^2)$ ; on comparera ensuite séparément les termes sans  $\alpha$ , ceux de l'ordre  $\alpha$ , ceux de l'ordre  $\alpha^2$ ; l'équation (16) en donnera donc trois autres entre  $x, x'$  &  $\mathcal{C}$ ; l'équation (17) en donnera trois entre  $y, y'$  &  $\lambda$ ; & l'équation (18) en donnera une en  $z$ .

Les substitutions précédentes n'ont de difficultés que celles qui peuvent venir du développement de  $\frac{1}{r^3}$ ; il ne sera donc pas inutile de faire quelques remarques à ce sujet.

## X I I I.

$v$  exprimant la distance de  $P$  à  $P'$ , on a, comme il est facile de s'en assurer,

$$v^2 = r^2 - 2 r r' \cdot \cos. (\phi' - \phi) + (r')^2 + (r' \cdot s' - r s)^2;$$

donc

$$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{[r^2 + (r')^2 + (r' \cdot s' - r s)^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{[1 - \frac{2 r r' \cdot \cos. (\phi' - \phi)}{r^2 + (r')^2 + (r' \cdot s' - r s)^2}]^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit, pour abrégér,  $\frac{2 r r'}{r^2 + (r')^2 + (r' \cdot s' - r s)^2} = q$ , on aura

(Voyez la première pièce de M. Euler sur Jupiter & Saturne, ou le premier volume du Calcul intégral de cet illustre Auteur).

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{(a')^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot [1 - q \cdot \cos(\phi' - \phi)]^{\mu}} = b + b_1 \cdot \cos(\phi' - \phi) \\
& \quad + b_2 \cdot \cos 2(\phi' - \phi) + b_3 \cdot \cos 3(\phi' - \phi) + \&c. \\
b = & \frac{\gamma}{\left(1 + \frac{(a')^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\mu+1}{2} \cdot q^2 \\ & - \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\mu+1}{2} \cdot \frac{\mu+2}{4} \cdot \frac{\mu+3}{4} \cdot q^4 \\ & + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\mu+1}{2} \cdot \frac{\mu+2}{4} \cdot \frac{\mu+3}{4} \cdot \frac{\mu+4}{6} \cdot \frac{\mu+5}{6} \cdot q^6 + \&c. \end{aligned} \right. \\
b_1 = & \frac{\mu q}{\left(1 + \frac{(a')^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{\mu+1}{2} \cdot \frac{\mu+2}{4} \cdot q^2 \\ & - \frac{\mu+1}{2} \cdot \frac{\mu+2}{4} \cdot \frac{\mu+3}{4} \cdot \frac{\mu+4}{6} \cdot q^4 \\ & + \frac{\mu+1}{2} \cdot \frac{\mu+2}{4} \cdot \frac{\mu+3}{4} \cdot \frac{\mu+4}{6} \cdot \frac{\mu+5}{6} \cdot \frac{\mu+6}{8} \cdot q^6 + \&c. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Ayant ainsi  $b$  &  $b_1$ , on aura  $b_2$ ,  $b_3$ , &c. au moyen des équations suivantes,

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= \frac{2\mu b \cdot q - 2b_1}{(\mu-2) \cdot q} \\ b_3 &= \frac{(\mu+1)b_1 \cdot q - 4b_2}{(\mu-3) \cdot q} \\ b_4 &= \frac{(\mu+2)b_2 \cdot q - 6b_1}{(\mu-4) \cdot q} \\ b_5 &= \frac{(\mu+3)b_1 \cdot q - 8b_2}{(\mu-5) \cdot q} \end{aligned} \right\} (I);$$

& généralement,

$$b_s = \frac{(\mu+s-2) \cdot b_{s-2} \cdot q - 2(s-1)b_{s-1}}{(\mu-s) \cdot q}.$$

les quantités  $b$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , &c. sont fonctions de la variable  $q$ ; & puisque nous avons besoin de porter dans certains cas la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $a^2$ , & que les variations de  $q$  sont de l'ordre  $a$ , il faut réduire  $b$ ,  $b_1$ , &c. en suites ascendantes par rapport à  $a$ : soit donc  $q = h + ah'$ ,  $h$  étant constant & égal à  $\frac{2aa'}{a^2 + (a')^2}$ , on aura

$$b = (b) + ah' \cdot \left( \frac{\partial b}{\partial q} \right) + \frac{a^2 \cdot (h')^2}{1.2} \cdot \left( \frac{\partial^2 b}{\partial q^2} \right) + \&c.$$

$(b), \left( \frac{\partial b}{\partial q} \right), \left( \frac{\partial^2 b}{\partial q^2} \right), \&c.$  étant ce que deviennent  $b, \frac{\partial b}{\partial q}, \frac{\partial^2 b}{\partial q^2}, \&c.$

lorsqu'on y substitue  $h$ , au lieu de  $q$ , on aura pareillement

$$b_1 = (b_1) + ah' \cdot \left( \frac{\partial b}{\partial q} \right) + \frac{a^2 \cdot (h')^2}{1.2} \cdot \left( \frac{\partial^2 b_1}{\partial q^2} \right) + \&c.$$

$$b_2 = (b_2) + ah' \cdot \left( \frac{\partial b_1}{\partial q} \right) + \&c.$$

$\&c.$

Il ne s'agit donc plus que d'avoir les valeurs de  $\frac{\partial b}{\partial q}, \frac{\partial^2 b}{\partial q^2}, \&c.$

$\frac{\partial b_1}{\partial q}, \&c.$  or l'équation

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{(a')^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot [1 - q \cdot \cos(\varphi' - \varphi)]^\mu = b + b_1 \cdot \cos(\varphi' - \varphi) + b_2 \cdot \cos 2(\varphi' - \varphi) + \&c;$$

donne en la différenciant par rapport à  $q$ ,

$$\frac{\mu \cdot \cos(\varphi' - \varphi)}{\left(1 + \frac{(a')^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot [1 - q \cdot \cos(\varphi' - \varphi)]^\mu \cdot [1 - q \cdot \cos(\varphi' - \varphi)] = \frac{\partial b}{\partial q} + \frac{\partial b_1}{\partial q} \cdot \cos(\varphi' - \varphi) + \&c.$$

partant,

$$\begin{aligned} & \mu \cdot \cos(\varphi' - \varphi) \cdot [b + b_1 \cdot \cos(\varphi' - \varphi) + b_2 \cdot \cos 2(\varphi' - \varphi) + \&c.] \\ &= [1 - q \cdot \cos(\varphi' - \varphi)] \cdot \left[ \frac{\partial b}{\partial q} + \frac{\partial b_1}{\partial q} \cdot \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{\partial b_2}{\partial q} \cdot \cos 2(\varphi' - \varphi) + \&c. \right] \end{aligned}$$

De-là en faisant les multiplications & réduisant les produits de cosinus en cosinus, on aura, en comparant séparément les coefficients constants, ceux des cosinus de l'angle  $\varphi' - \varphi$ , & de ses multiples,

$$2 \cdot \frac{\partial b}{\partial q} = \mu b_1 + q \cdot \frac{\partial b_1}{\partial q},$$

$$2 \cdot \frac{\partial b}{\partial q} = 2 \left( \mu b + q \cdot \frac{\partial b}{\partial q} \right) + \mu b_2 + q \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q},$$

$$2 \cdot \frac{\partial b_1}{\partial q} = \mu b_1 + q \cdot \frac{\partial b_1}{\partial q} + \mu b_2 + q \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q},$$

$$2 \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q} = \mu b_2 + q \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q} + \mu b_2 + q \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q},$$

$\&c.$

Au moyen de ces équations & des équations ( $\nearrow$ ), on aura  $\frac{\partial b_1}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial b_2}{\partial q}$ , &c. lorsqu'on connoîtra  $\frac{\partial b}{\partial q}$ , &  $\frac{\partial b_1}{\partial q}$ ; or on a par ce qui précède,  $b_2 = \frac{-2b_1 + 2\mu b q}{(\mu - 2)q}$ ; partant,

$$\mu b_2 + q \cdot \frac{\partial b_2}{\partial q} = - \frac{2\mu b_1}{(\mu - 2)q} + \frac{2\mu \mu b}{\mu - 2} - 2 \cdot \frac{\frac{\partial b_1}{\partial q}}{\mu - 2} + \frac{2b_1}{(\mu - 2) \cdot q} + \frac{2\mu q \cdot \frac{\partial b}{\partial q}}{\mu - 2}.$$

on aura donc les deux équations

$$\frac{2\partial b}{\partial q} = \mu b_1 + q \cdot \frac{\partial b_1}{\partial q};$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial q} = 2\mu b - \frac{b_1}{q} + 2q \cdot \frac{\partial b}{\partial q};$$

d'où l'on tirera

$$\frac{\partial b}{\partial q} = \frac{b_1 \cdot (\mu - 1) + 2\mu b q}{2(1 - qq)},$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial q} = \frac{2\mu b q + b_1 \cdot (\mu qq - 1)}{q(1 - qq)};$$

ayant ainsi déterminé  $\frac{\partial b}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial b_1}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial b_2}{\partial q}$ , &c. en  $b$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , &c.

on en conclura facilement par la différentiation, les valeurs de  $\frac{\partial \partial b}{\partial q^2}$ ,  $\frac{\partial \partial b_1}{\partial q^2}$ , &c. & en changeant  $q$  en  $h$ , on aura

$(b)$ ,  $(b_1)$ ,  $(b_2)$ , &c.  $(\frac{\partial b}{\partial q})$ ,  $(\frac{\partial b_1}{\partial q})$ , &c.  $(\frac{\partial \partial b}{\partial q^2})$ , &c. soit  $\frac{a^i}{a} = i$ , ce qui donne  $h = \frac{2i}{1 - ii}$ , on aura, cela posé, dans le cas de  $\mu = \frac{3}{2}$ ,

$$b = \frac{1}{(1 + ii)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{aligned} &1 + (1 - \frac{1}{4}) \cdot (\frac{2i}{1 + ii})^2 \\ &+ (1 - \frac{1}{4^2}) \cdot (1 - \frac{1}{8^2}) \cdot (\frac{2i}{1 + ii})^4 \\ &+ (1 - \frac{1}{4^3}) \cdot (1 - \frac{1}{8^3}) \cdot (1 - \frac{1}{12^2}) \cdot (\frac{2i}{1 + ii})^6 + \&c. \end{aligned} \right. \quad (b')$$

$$b_i = \frac{3i}{(1+ii)^{\frac{5}{2}}} \left\{ \begin{aligned} &1 + \left[1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right] \cdot \left(\frac{2i}{1+ii}\right)^2 \\ &+ \left[1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right] \cdot \left[1 + \frac{3}{4(5^2-1)}\right] \cdot \left(\frac{2i}{1+ii}\right)^4 \\ &+ \left[1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right] \cdot \left[1 + \frac{3}{4(5^2-1)}\right] \cdot \left[1 + \frac{3}{4(7^2-1)}\right] \cdot \left(\frac{2i}{1+ii}\right)^6 + \&c. \end{aligned} \right.$$

$$(b) = \frac{2 \cdot (b_1) \cdot (1+ii) - 6 \cdot (b) \cdot i}{i}; \quad (b_3) = \frac{4 \cdot (b_1) \cdot (1+ii) - 5 \cdot (b_1) \cdot i}{3i};$$

$$(b_1) = \frac{6 \cdot (b_1) \cdot (1+ii) - 7 \cdot (b_1) \cdot i}{5i}; \quad (b_5) = \frac{8 \cdot (b_1) \cdot (1+ii) - 9 \cdot (b_1) \cdot i}{7i}; \&c.$$

la loi de ces termes est trop visible pour les continuer plus loin; on aura ensuite,

$$\left(\frac{\partial b}{\partial q}\right) = \frac{(b_1) \cdot (1+ii)^2}{4 \cdot (1-ii)^2} + \frac{3(b) \cdot i \cdot (1+ii)^2}{(1-ii)^2};$$

$$\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) = \frac{3(b) \cdot (1+ii)^2}{(1-ii)^2} - \frac{(b_1) \cdot (1+ii) \cdot (1-4ii+i^4)}{2i \cdot (1-ii)^2};$$

$$\left(\frac{\partial b_3}{\partial q}\right) = \frac{6(b) \cdot (1+ii) \cdot (1-ii+i^4)}{i \cdot (1-ii)^2} - \frac{(b_1) \cdot (1+ii)^2 \cdot (4-9ii+4i^4)}{2i^2 \cdot (1-ii)^2};$$

& les équations ( $\nearrow$ ) donnent en les différentiant,

$$\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) = 4 \cdot \left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) \cdot (1+ii) - \frac{2 \cdot (b_1) \cdot (1+ii)^2}{3i^2} - \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right),$$

$$\left(\frac{\partial b_3}{\partial q}\right) = 6 \cdot \left(\frac{\partial b_3}{\partial q}\right) \cdot (1+ii) - \frac{3 \cdot (b_1) \cdot (1+ii)^2}{5i^2} - \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{\partial b_3}{\partial q}\right),$$

$$\left(\frac{\partial b_5}{\partial q}\right) = 8 \cdot \left(\frac{\partial b_5}{\partial q}\right) \cdot (1+ii) - \frac{4 \cdot (b_1) \cdot (1+ii)^2}{7i^2} - \frac{9}{7} \cdot \left(\frac{\partial b_5}{\partial q}\right),$$

&c.

la loi de ces termes est trop visible pour les continuer plus loin; enfin on aura

$$\left(\frac{\partial \partial b}{\partial q^2}\right) = \frac{3 \cdot (b) \cdot (3i^4 + 16i^2 + 3) \cdot (1+ii)^2}{4 \cdot (1-ii)^4} - \frac{(b_1) \cdot (1-18ii+i^4) \cdot (1+ii)^3}{8i \cdot (1-ii)^4},$$

$$\left(\frac{\partial \partial b_i}{\partial q^2}\right) = \frac{(b_i) \cdot [60 i^4 - 15 i^3 \cdot (1 + ii)^3 + 1 \cdot (1 + ii)^4] \cdot (1 + ii)^3}{4 i^3 \cdot (1 - ii)^4} \\ - \frac{3 \cdot (b_i) \cdot (1 + ii)^3 \cdot (1 - 18 i^3 + i^4)}{2 i \cdot (1 - ii)^4},$$

$$\left(\frac{\partial \partial b_i}{\partial q^2}\right) = \frac{3 \cdot (b_i) \cdot [-60 i^4 + 47 i^3 \cdot (1 + ii)^3 - 6 \cdot (1 + ii)^4] \cdot (1 + ii)^3}{2 i^3 \cdot (1 - ii)^4} \\ + \frac{(b_i) \cdot [220 i^4 - 99 i^3 \cdot (1 + ii)^3 + 12 \cdot (1 + ii)^4] \cdot (1 + ii)^3}{4 i^3 \cdot (1 - ii)^4}.$$

## X I V.

Il faut présentement développer les différens termes des équations (16), (17) & (18) de l'article XI, & pour faciliter ce calcul, il ne sera pas inutile d'avoir sous les yeux les formules suivantes,

$$\begin{aligned} \sin. a \cdot \cos. b &= \frac{1}{2} \cdot \sin. (a + b) + \frac{1}{2} \cdot \sin. (a - b), \\ \sin. a \cdot \sin. b &= \frac{1}{2} \cdot \cos. (a - b) - \frac{1}{2} \cdot \cos. (a + b), \\ \cos. a \cdot \cos. b &= \frac{1}{2} \cdot \cos. (a + b) + \frac{1}{2} \cdot \cos. (a - b), \\ \sin. (\zeta + \alpha) &= \sin. \zeta + \alpha \cdot \cos. \zeta - \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \sin. \zeta - \&c. \\ \cos. (\zeta + \alpha) &= \cos. \zeta - \alpha \cdot \sin. \zeta - \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \cos. \zeta + \&c. \end{aligned}$$

on trouvera, cela posé, en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , & ne conservant parmi les termes de cet ordre, que ceux d'où peut résulter une équation séculaire dans le moyen mouvement de la Planète  $P$ .

$$\frac{arr^2}{[r^4 + (r')^2 + (r's^2 - rs)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{i}{(1 + ii)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{\alpha e \cdot (ii - 2)}{1 + ii} \cdot \cos. (nt + \theta) \\ &- \frac{\alpha^2 e e'}{2} \cdot \frac{(2 - 11 \cdot i^2 + 2 \cdot i^4)}{(1 + ii)^2} \cdot \cos. (n't - nt + \theta' - \theta) \\ &+ \frac{\alpha^2 e^2 \cdot (1 - 2 ii)}{1 + ii} \cdot \cos. (n't + \theta') \\ &+ \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha^2 i \gamma \gamma^2}{1 + ii} \cdot \cos. (n't - nt + \varpi' - \varpi); \end{aligned} \right.$$

$$\text{on aura ensuite, } h = \frac{2i}{1 + ii},$$



$$ah' = \frac{2i}{1+ii} \cdot \left\{ \begin{aligned} &ae \cdot \frac{(ii-1)}{1+ii} \cdot \text{cof.}(nt + \theta) \\ &- \frac{1}{2} a^2 e e' \cdot \frac{(1-6, ii+i^4)}{(1+ii)^2} \cdot \text{cof.}(n't - nt + \theta' - \theta) \\ &+ ae' \cdot \frac{(1-ii)}{1+ii} \cdot \text{cof.}(n't + \theta') \\ &+ \frac{\alpha^2 \gamma \gamma' \cdot i}{1+ii} \cdot \text{cof.}(n't - nt + \varpi' - \varpi); \end{aligned} \right.$$

partant,

$$\frac{\alpha^2 (h')^2}{2} = - \frac{2 \alpha^2 e e' \cdot i^2 (1-ii)^2}{(1+ii)^4} \cdot \text{cof.}(n't - nt + \theta' - \theta);$$

De-là, on conclura, en faisant pour abrégér,

$$A' - A + \theta' - \theta = B, \quad A' - A = V, \quad \&$$

$$A' - A + \theta' - \theta - \varpi' + \varpi = U,$$

$$\begin{aligned} \frac{arr' \cdot \sin.(\varphi' - \varphi)}{v^3} &= i \cdot \left\{ \begin{aligned} &[(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \cdot \sin.(n't - nt + B) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [(b_1) - (b_2)] \cdot \sin.2(n't - nt + B) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [(b_2) - (b_2)] \cdot \sin.3(n't - nt + B) \\ &+ \&c. \end{aligned} \right. \\ &+ 2ae \cdot i \cdot \sin.(nt + \theta) \cdot \left\{ \begin{aligned} &[(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \cdot \text{cof.}(n't - nt + B) \\ &+ \frac{2}{2} \cdot [(b_1) - (b_2)] \cdot \text{cof.}2(n't - nt + B) \\ &+ \frac{3}{2} \cdot [(b_2) - (b_2)] \cdot \text{cof.}3(n't - nt + B) \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} \\ &- 2ae' \cdot i \cdot \sin.(n't + \theta') \cdot \left\{ \begin{aligned} &[(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \cdot \text{cof.}(n't - nt + B) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [(b_1) - (b_2)] \cdot \sin.2(n't - nt + B) \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} \\ &+ \frac{ae \cdot i \cdot (ii-2)}{1+ii} \cdot \text{cof.}(nt + \theta) \cdot \left\{ \begin{aligned} &[(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \cdot \sin.(n't - nt + B) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [(b_1) - (b_2)] \cdot \sin.2(n't - nt + B) \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} \\ &+ \frac{ae' \cdot i \cdot (1-2ii)}{1+ii} \cdot \text{cof.}(n't + \theta') \cdot \left\{ \begin{aligned} &[(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \cdot \sin.(n't - nt + B) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [(b_1) - (b_2)] \cdot \sin.2(n't - nt + B) \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} \\ &+ \frac{2ii \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &ae \cdot \text{cof.}(nt + \theta) \\ &- ae' \cdot \text{cof.}(n't + \theta') \end{aligned} \right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} &[(\frac{\partial b}{\partial q}) - \frac{1}{2}(\frac{\partial b_1}{\partial q})] \cdot \sin.(n't - nt + B) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [(\frac{\partial b_1}{\partial q}) - (\frac{\partial b_2}{\partial q})] \cdot \sin.2(n't - nt + B) \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} \\ &+ \frac{15 \cdot i^2}{4(1+ii)^2} \cdot \alpha^2 e e' \cdot \sin.V \cdot [(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \\ &+ \frac{3}{4} \alpha^2 \gamma \gamma' \cdot \frac{ii}{1+ii} \cdot \sin.U \cdot [(b) - \frac{1}{2}(b_2)] \\ &\quad \text{U u ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2a^2 e e' \cdot \frac{ii.(1-3i^2+i^4)}{(1+ii)^3} \cdot \sin. V. \left[ \left( \frac{\partial b}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_2}{\partial q} \right) \right] \\
& + \frac{a^2 \gamma \gamma' \cdot i^3}{(1+ii)^2} \cdot \sin. U. \left[ \left( \frac{\partial b}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_2}{\partial q} \right) \right] \\
& - \frac{a^2 e e' i^3 \cdot (1-ii)^2}{(1+ii)^4} \cdot \sin. V. \left[ \left( \frac{\partial \partial b}{\partial q^2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial \partial b_2}{\partial q^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
& \frac{15 i^3}{4(1+ii)^3} \cdot \left[ (b) - \frac{1}{2}(b_2) \right] - \frac{2ii.(1-3i^2+i^4)}{(1+ii)^4} \cdot \left[ \left( \frac{\partial b}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_2}{\partial q} \right) \right] \\
& - \frac{i^3 \cdot (1-ii)^2}{(1+ii)^4} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \partial b}{\partial q^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \partial b_2}{\partial q^2} \right) \right] = K, \\
& \frac{3ii}{4(1+ii)} \cdot \left[ (b) - \frac{1}{2}(b_2) \right] + \frac{i^3}{(1+ii)^2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial b}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial b_2}{\partial q} \right) \right] = L,
\end{aligned}$$

$$C = i \cdot \left[ (b) - \frac{1}{2}(b_2) \right]$$

$${}^1C = 2i \cdot \left[ \frac{1}{2}(b_1) - \frac{1}{2}(b_3) \right]$$

$${}^2C = 3i \cdot \left[ \frac{1}{2}(b_2) - \frac{1}{2}(b_4) \right]$$

&amp;c.

$$D = \frac{i.(ii-2)}{2.(1+ii)} \cdot \left[ (b) - \frac{1}{2}(b_2) \right] + \frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial b}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial b_2}{\partial q} \right) \right]$$

$${}^1D = \frac{i.(ii-2)}{2.(1+ii)} \cdot \left[ \frac{1}{2}(b_1) - \frac{1}{2}(b_3) \right] + \frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_1}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial b_3}{\partial q} \right) \right]$$

$${}^2D = \frac{i.(ii-2)}{2.(1+ii)} \cdot \left[ \frac{1}{2}(b_2) - \frac{1}{2}(b_4) \right] + \frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_2}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial b_4}{\partial q} \right) \right]$$

&amp;c.

$$E = \frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial b}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_2}{\partial q} \right) \right] - \frac{i.(1-2ii)}{2.(1+ii)} \cdot \left[ (b) - \frac{1}{2} \cdot (b_2) \right]$$

$${}^1E = \frac{ii.(ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_1}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_3}{\partial q} \right) \right] - \frac{i.(1-2ii)}{2.(1+ii)} \cdot \left[ \frac{1}{2}(b_1) - \frac{1}{2} \cdot (b_3) \right]$$

&amp;c.

On aura

$$\int \frac{arr' dt \cdot \sin.(\phi' - \phi)}{q^3} = \frac{1}{n-n'} \cdot \left\{ C \cdot \cos.(n't - nt + B) + \frac{1}{4} \cdot {}^1C \cdot \cos.2(n't - nt + B) \right. \\
\left. + \frac{1}{9} \cdot {}^2C \cdot \cos.3(n't - nt + B) + \&c. \right\}$$

$$- \alpha e. \left\{ \begin{aligned} & \frac{C + D}{n^2} \cdot \text{cof.} (n^1 t + B + \theta) \\ & + \frac{D - C}{n^1 - 2n} \cdot \text{cof.} (n^1 t - 2nt + B - \theta) \\ & + \frac{{}^1 D + {}^1 C}{2n^1 - n} \cdot \text{cof.} (2n^1 t - nt + 2B + \theta) \\ & + \frac{{}^1 D - {}^1 C}{2n^1 - 3n} \cdot \text{cof.} (2n^1 t - 3nt + 2B - \theta) \\ & + \frac{{}^2 D + {}^2 C}{3n^1 - 2n} \cdot \text{cof.} (3n^1 t - 2nt + 3B + \theta) \\ & + \frac{{}^2 D - {}^2 C}{3n^1 - 4n} \cdot \text{cof.} (3n^1 t - 4nt + 3B - \theta) \\ & + \&c. \end{aligned} \right.$$

$$+ \alpha e'. \left\{ \begin{aligned} & \frac{E + C}{2n^1 - n} \cdot \text{cof.} (2n^1 t - nt + B + \theta') \\ & + \frac{C - E}{n} \cdot \text{cof.} (nt - B + \theta') \\ & + \frac{{}^1 E + {}^1 C}{3n^1 - 2n} \cdot \text{cof.} (3n^1 t - 2nt + 2B + \theta') \\ & + \frac{{}^1 E - {}^1 C}{n^1 - 2n} \cdot \text{cof.} (n^1 t - 2nt + 2B - \theta') \\ & + \frac{{}^2 E + {}^2 C}{4n^1 - 3n} \cdot \text{cof.} (4n^1 t - 3nt + 3B + \theta') \\ & + \frac{{}^2 E - {}^2 C}{2n^1 - 3n} \cdot \text{cof.} (2n^1 t - 3nt + 3B - \theta') \\ & + \&c. \end{aligned} \right.$$

$$+ \alpha^2 e e'. Kt. \sin. V + \alpha^2 \gamma \gamma'. Lt. \sin. U;$$

soit encore,

$$(b) - \frac{i.(b_1)}{2} = F,$$

$$(b_1) - i. \left[ (b) + \frac{1}{2} (b_2) \right] = {}^1 F,$$

$$2(b_2) - 2i. \left[ \frac{1}{2}(b_1) + \frac{1}{2}(b_3) \right] = {}^2 F,$$

$$3(b_3) - 3i. \left[ \frac{1}{2}(b_2) + \frac{1}{2}(b_4) \right] = {}^3 F,$$

&c.

$$\frac{(ii-2)}{2(1+ii)} \cdot (b) + \frac{i \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left(\frac{\partial b}{\partial q}\right) + \frac{3i}{2(1+ii)} \cdot \left(\frac{\partial^2 b}{\partial^2}\right) - \frac{ii \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 b_1}{\partial^2 q}\right) = G,$$

$$\frac{(ii-2)}{2(1+ii)} \cdot (b_1) + \frac{i \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) + \frac{3i}{2(1+ii)} \times \cdot [(b) + \frac{1}{2}(b_2)] - \frac{ii \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left[\left(\frac{\partial b}{\partial q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b_1}{\partial^2 q}\right)\right] = {}^1G,$$

$$\frac{(ii-2)}{2(1+ii)} \cdot (b_2) + \frac{i \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right) + \frac{3i}{2(1+ii)} \times \cdot \left[\frac{1}{2}(b_1) + \frac{1}{2}(b_3)\right] - \frac{ii \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b_2}{\partial^2 q}\right)\right] = {}^2G,$$

&c.

$$\frac{3ii}{2(1+ii)} \cdot (b) + \frac{i \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left(\frac{\partial b}{\partial q}\right) + \frac{i \cdot (1-2ii)}{2 \cdot (1+ii)} \cdot \left(\frac{\partial^2 b}{\partial^2}\right) - \frac{ii \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 b_1}{\partial^2 q}\right) = H,$$

$$\frac{3ii}{2(1+ii)} \cdot (b_1) + \frac{i \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) + \frac{i \cdot (1-2ii)}{2(1+ii)} \times \cdot [(b) + \frac{1}{2}(b_2)] - \frac{ii \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left[\left(\frac{\partial b}{\partial q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b_1}{\partial^2 q}\right)\right] = {}^1H,$$

$$\frac{3ii}{2(1+ii)} \cdot (b_2) + \frac{i \cdot (ii-1)}{i \cdot (1+ii)^2} \cdot \left(\frac{\partial b_2}{\partial q}\right) + \frac{i \cdot (1-2ii)}{2(1+ii)} \times \cdot \left[\frac{1}{2}(b_1) + \frac{1}{2}(b_3)\right] - \frac{ii \cdot (ii-1)}{(1+ii)^2} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_1}{\partial q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b_2}{\partial^2 q}\right)\right] = {}^2H,$$

&c.

on trouvera

$$\frac{a^2 \cdot [r-r' \cdot \cos(\phi'-\phi)]}{2a^3} = F + {}^1F \cdot \cos(n't - nt + B) + \frac{1}{2} \cdot {}^2F \cdot \cos 2 \cdot (n't - nt + B) + \frac{1}{3} \cdot {}^3F \cdot \cos 3 \cdot (n't - nt + B) + \&c.$$

$$+ a.e. \cdot \begin{cases} 2G \cdot \cos(nt + \theta) \\ + ({}^1G + {}^1F) \cdot \cos(n't + B + \theta) \\ + ({}^1G - {}^1F) \cdot \cos(n't - 2nt + B - \theta) \\ + ({}^2G + {}^2F) \cdot \cos(2n't - nt + 2B + \theta) \\ + ({}^2G - {}^2F) \cdot \cos(2n't - 3nt + 2B - \theta) \\ + \&c. \end{cases}$$

$$-ae^2 \left\{ \begin{array}{l} 2H \cdot \text{cof.} (n^1 t + \theta^1) \\ + ({}^1H + {}^1F) \cdot \text{cof.} (2n^1 t - nt + B + \theta^1) \\ + ({}^1H - {}^1F) \cdot \text{cof.} (nt - B + \theta^1) \\ + ({}^2H + {}^2F) \cdot \text{cof.} (3n^1 t - 2nt + 2B + \theta^1) \\ + ({}^2H - {}^2F) \cdot \text{cof.} (n^1 t - 2nt + 2B - \theta^1) \\ + \&c. \end{array} \right.$$

On trouvera pareillement

$$\begin{aligned} -\int \frac{ar \delta t \cdot \sin. (\varphi^1 - \varphi)}{(r^1)^2 (1 + s^1 s^1)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{ii \cdot (n^1 - n)} \cdot \text{cof.} (n^1 t - nt + B) \\ &- ae \left[ \frac{1}{2ii(n^1 - 2n)} \cdot \text{cof.} (n^1 t - 2nt + B - \theta) \right. \\ &- \frac{3}{2ii \cdot n^1} \cdot \text{cof.} (n^1 t + B + \theta) \left. \right] \\ &- \frac{2ae^2}{ii(2n^1 - n)} \cdot \text{cof.} (2n^1 t - nt + B + \theta^1); \\ \frac{a^2 \cdot \text{cof.} (\varphi^1 - \varphi)}{(r^1)^2 (1 + s^1 s^1)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{ii} \cdot \text{cof.} (n^1 t - nt + B) \\ &- \frac{ae}{ii} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{cof.} (n^1 t - 2nt + B - \theta) \\ - \text{cof.} (n^1 t + B + \theta) \end{array} \right\} \\ &- \frac{2ae^2}{ii} \cdot \text{cof.} (2n^1 t - nt + B + \theta^1). \end{aligned}$$

On aura enfin

$$\begin{aligned} a^2 \cdot [s^1 - s \cdot \text{cof.} (\varphi^1 - \varphi)] \cdot \left[ \frac{1}{(r^1)^2 (1 + s^1 s^1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r^1}{w^3} \right] \\ = \frac{ay^1 i}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{p} - 2(b) \right] \cdot \sin. (n^1 t + \omega^1) \\ - (b_1) \cdot [\sin. (2n^1 t - nt + B + \omega^1) \\ + \sin. (nt - B + \omega^1)] \\ - (b_2) \cdot [\sin. (3n^1 t - 2nt + 2B + \omega^1) \\ - \sin. (n^1 t - 2nt + 2B - \omega^1)] \\ - (b_3) \cdot [\sin. (4n^1 t - 3nt + 3B + \omega^1) \\ - \sin. (2n^1 t - 3nt + 3B - \omega^1)] \\ - \&c. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha \gamma i}{4} \left\{ \begin{aligned} & 2(b_1) \cdot \sin.(nt + \varpi) \\ & + [2(b_1) + (b_2) - \frac{2}{\beta}] \cdot [\sin.(n't + B + \varpi) \\ & \quad - \sin.(n't - 2nt + B - \varpi)] \\ & + [(b_1) + (b_3)] \cdot [\sin.(2n't - nt + 2B + \varpi) \\ & \quad - \sin.(2n't - 3nt + 2B - \varpi)] \\ & + \&c. \end{aligned} \right.$$

## X V.

L'Équation (17) de l'article XI, donne en y substituant, au lieu de  $\delta r$ ,  $a \delta \mu'$ ,  $y$ , & en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \delta y}{\partial t^2} - \frac{2c \delta c}{a^2 \delta \mu'} + y \cdot \left[ \frac{3c^2}{a^4} - \frac{2(S+P)}{a^3} \right] \\ &+ \frac{2c}{a^2} \cdot \frac{\pi n}{n' - n} \cdot \left\{ \begin{aligned} & (C - \frac{1}{ii}) \cdot \cos. (n't - nt + B) \\ & + \frac{1}{4} \cdot {}^1C \cdot \cos. 2 (n't - nt + B) \\ & + \frac{1}{9} \cdot {}^2C \cdot \cos. 3 (n't - nt + B) \\ & + \&c. \end{aligned} \right. \\ &+ nn \left\{ \begin{aligned} & F + ({}^1F + \frac{1}{ii}) \cdot \cos. (n't - nt + B) \\ & + \frac{1}{2} \cdot {}^2F \cdot \cos. 2 (n't - nt + B) \\ & + \frac{1}{3} \cdot {}^3F \cdot \cos. 3 (n't - nt + B) \\ & + \&c. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

or, on a par l'article XI, aux quantités près de l'ordre  $\alpha^2$ ,

$$\frac{c}{a^2} = n; \text{ ensuite, } nn = \frac{S+P}{a^3}; \text{ donc}$$

$$0 = \frac{\partial \delta y}{\partial t^2} - \frac{2n \delta c}{a^2 \delta \mu'} + n^2 y + nn \cdot \left\{ \begin{aligned} & [{}^1F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n' - n} \cdot (C - \frac{1}{ii})] \cdot \cos. (n't - nt + B) \\ & + [\frac{1}{2} \cdot {}^2F + \frac{2n}{n' - n} \cdot \frac{1}{4} \cdot {}^1C] \cdot \cos. 2 (n't - nt + B) \\ & + [\frac{1}{3} \cdot {}^3F + \frac{2n}{n' - n} \cdot \frac{1}{9} \cdot {}^2C] \cdot \cos. 3 (n't - nt + B) \\ & + \&c. \end{aligned} \right.$$

d'où

d'où l'on tire en intégrant,

$$y = -F + \frac{2 \delta c}{a^2 \delta \mu^2} + \frac{n n}{(n^1 - n)^2 - n n} \cdot \left[ F + \frac{1}{ii} + \frac{2 n}{n^1 - n} \cdot \left( C - \frac{1}{ii} \right) \right] \cdot \cos. (n^1 t - n t + B) \\ + \frac{n n}{(2 n^1 - 2 n)^2 - n n} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot F + \frac{2 n}{n^1 - n} \cdot \frac{1}{4} \cdot C \right] \cdot \cos. 2 (n^1 t - n t + B) \\ + \frac{n n}{(3 n^1 - 3 n)^2 - n n} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot F + \frac{2 n}{n^1 - n} \cdot \frac{1}{9} \cdot C \right] \cdot \cos. 3 (n^1 t - n t + B) \\ + \&c.$$

Il est inutile d'ajouter ici des constantes arbitraires, parce qu'elles sont déjà renfermées dans la première valeur de  $r$ , que la supposition de  $\delta \mu^1 = 0$ , nous a donnée *art. IX*.

Si l'on substitue cette valeur de  $y$ , dans l'équation (16) de l'article XI; on aura en y supposant  $\delta \phi = x$ ,  $\delta \mu^1$ , & négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha$ .

$$\frac{\delta x}{\delta t} = -\frac{3 \delta c}{a^2 \delta \mu^2} + 2 n F - \left[ \frac{n n}{n^1 - n} \cdot \left( C - \frac{1}{ii} \right) + \frac{2 n^1}{(n^1 - n)^2 - n n} \times \right. \\ \left. \left[ F + \frac{1}{ii} + \frac{2 n}{n^1 - n} \cdot \left( C - \frac{1}{ii} \right) \right] \right] \cdot \cos. (n^1 t - n t + B) \\ - \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{n n}{n^1 - n} \cdot C + \frac{2 n^1}{(2 n^1 - 2 n)^2 - n n} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot F + \frac{2 n}{n^1 - n} \cdot \frac{1}{4} \cdot C \right) \right] \cdot \cos. 2 (n^1 t - n t + B) \\ - \left[ \frac{1}{9} \cdot \frac{n n}{n^1 - n} \cdot C + \frac{2 n^1}{(3 n^1 - 3 n)^2 - n n} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot F + \frac{2 n}{n^1 - n} \cdot \frac{1}{9} \cdot C \right) \right] \cdot \cos. 3 (n^1 t - n t + B) \\ - \&c.$$

Que l'on détermine présentement  $\delta c$ , de manière que  $\frac{\delta x}{\delta t}$ , ne renferme point de terme constant, & qu'ainsi  $nt$  représente le moyen mouvement de la Planète, on aura

$$0 = -\frac{3 \delta c}{a^2 \delta \mu^2} + 2 n F; \text{ partant } \frac{\delta c}{a^2 \delta \mu^2} = \frac{2}{3} n F; \text{ donc}$$

$$y = \frac{1}{3} F + \frac{n n}{(n^1 - n)^2 - n n} \cdot \left[ F + \frac{1}{ii} + \frac{2 n}{n^1 - n} \cdot \left( C - \frac{1}{ii} \right) \right] \cdot \cos. (n^1 t - n t + B) + \&c.$$

telles sont les valeurs de  $\frac{\delta r}{a \delta \mu^2}$ , & de  $\frac{\partial \delta \phi}{\partial t}$ , aux quantités

près de l'ordre  $\alpha$ . Déterminons présentement ces valeurs aux quantités près de l'ordre  $\alpha^2$ .

## X V I.

Pour cela on substituera dans l'équation (17) de l'article XI, au lieu de  $r$ ,  $a \delta \mu^1 \cdot (y + \alpha y^1)$ ; on négligera les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , & on observera que, par la nature de  $y$ , les termes sans  $\alpha$  doivent se détruire réciproquement; de cette manière, en faisant pour abrégé,

$$I = -\frac{3nn}{(n^1-n)^2-nn} \cdot [{}^1F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n^1-n} \cdot (C - \frac{1}{ii})]$$

$$+ \frac{2n}{n^1} \cdot [C + D - \frac{3}{2ii}] - \frac{3n}{n^1-n} \cdot (C - \frac{1}{ii}) + {}^1G + {}^1F + \frac{1}{ii}$$

$${}^2I = -\frac{3nn}{(n^1-n)^2-nn} \cdot [{}^1F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n^1-n} \cdot (C - \frac{1}{ii})]$$

$$+ \frac{2n}{n^1-2n} \cdot [D - C + \frac{1}{2ii}] - \frac{3n}{n^1-n} \cdot (C - \frac{1}{ii}) + {}^1G - {}^1F - \frac{1}{ii}$$

$${}^3I = -\frac{3nn}{(2n^1-2n)^2-nn} \cdot [\frac{1}{2} \cdot {}^2F + \frac{2n}{n^1-n} \cdot \frac{1}{4} \cdot {}^1C]$$

$$+ \frac{2n}{2n^1-n} \cdot ({}^1D + {}^1C) - \frac{3n}{n^1-n} \cdot \frac{1}{4} \cdot {}^1C + {}^2G + {}^2F$$

$${}^3I = -\frac{3nn}{(2n^1-2n)^2-nn} \cdot [\frac{1}{2} \cdot {}^2F + \frac{2n}{n^1-n} \cdot \frac{1}{4} \cdot {}^1C]$$

$$+ \frac{2n}{2n^1-3n} \cdot ({}^1D - {}^1C) - \frac{3n}{n^1-n} \cdot \frac{1}{4} \cdot {}^1C + {}^2G - {}^2F$$

$${}^4I = -\frac{3nn}{(3n^1-3n)^2-nn} \cdot [\frac{1}{3} \cdot {}^3F + \frac{2n}{n^1-n} \cdot \frac{1}{9} \cdot {}^2C]$$

$$+ \frac{2n}{3n^1-2n} \cdot ({}^2D + {}^2C) - \frac{3n}{n^1-n} \cdot \frac{1}{9} \cdot {}^2C + {}^3G + {}^3F$$

$${}^4I = -\frac{3nn}{(3n^1-3n)^2-nn} \cdot [\frac{1}{3} \cdot {}^3F + \frac{2n}{n^1-n} \cdot \frac{1}{9} \cdot {}^2C]$$

$$+ \frac{2n}{3n^1-4n} \cdot ({}^2D - {}^2C) - \frac{3n}{n^1-n} \cdot \frac{1}{9} \cdot {}^2C + {}^3G - {}^3F$$

&c.

$${}^1L = \frac{2n}{2n^1-n} \cdot [E + C - \frac{2}{ii}] + {}^1H + {}^1F + \frac{2}{ii}$$

$${}^2L = 2 \cdot (C - E) + {}^1H - {}^1F$$

$${}^3L = \frac{2n}{3n^1-2n} \cdot [{}^1E + {}^1C] + {}^2H + {}^2F$$

$${}^4L = \frac{2n}{n^1-2n} \cdot [{}^1E - {}^1C] + {}^2H - {}^2F$$

&c.



on aura l'équation suivante

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{\partial \partial y^1}{\partial t^2} + nny^1 + 2n^2e.(F + G). \cos. (nt + \theta) \\
 & - n^2. {}^2L e^1. \cos. (nt - B + \theta') \\
 & + nne. I. \cos. (n't + B + \theta) \\
 & + nne. {}^1I. \cos. (n't - 2nt + B - \theta) \\
 & + nne. {}^2I. \cos. (2n't - nt + 2B + \theta) \\
 & + nne. {}^3I. \cos. (2n't - 3nt + 2B - \theta) \\
 & + nne. {}^4I. \cos. (3n't - 2nt + 3B + \theta) \\
 & + nne. {}^5I. \cos. (3n't - 4nt + 3B - \theta) \\
 & + \&c. \\
 & - 2nne^1. H. \cos. (n't + \theta') \\
 & - nne^1. {}^1L. \cos. (2n't - nt + B + \theta') \\
 & - nne^1. {}^3L. \cos. (3n't - 2nt + 2B + \theta') \\
 & - nne^1. {}^4L. \cos. (n't - 2nt + 2B - \theta') \\
 & - \&c.
 \end{aligned}$$

d'où en intégrant, on aura

$$\begin{aligned}
 y^1 = & - (F + G). \sin. (nt + \theta) \\
 & + \frac{1}{2}. {}^2L e^1. nt. \sin. (nt - B + \theta') \\
 & + \frac{nne. I}{(n')^2 - nn}. \cos. (n't + B + \theta) \\
 & + \frac{nne. {}^1I}{(n^2 - 2n)^2 - nn}. \cos. (n't - 2nt + B - \theta) \\
 & + \frac{nne. {}^2I}{(2n^2 - n)^2 - nn}. \cos. (2n't - nt + 2B + \theta) \\
 & + \frac{nne. {}^3I}{(2n^2 - 3n)^2 - nn}. \cos. (2n't - 3nt + 2B - \theta) \\
 & + \&c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2nn \cdot e^1 \cdot H}{(n^1)^2 - nn} \cdot \cos. (n^1 t + \theta^1) \\
& - \frac{nn e^1 \cdot {}^1 L}{(2n^1 - n)^2 - nn} \cdot \cos. (2n^1 t - nt + B + \theta^1) \\
& - \frac{nn e^1 \cdot {}^3 L}{(3n^1 - 2n)^2 - nn} \cdot \cos. (3n^1 t - 2nt + 2B + \theta^1) \\
& - \frac{nn e^1 \cdot {}^4 L}{(n^1 - 2n)^2 - nn} \cdot \cos. (n^1 t - 2nt + 2B - \theta^1) \\
& - \&c.
\end{aligned}$$

Maintenant, si l'on substitue au lieu de  $\delta \phi$ ,  $\delta \mu^1 \cdot (x + \alpha x')$ , dans l'équation (16) de l'article XI; que l'on néglige les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , &c que l'on considère que par la nature de  $x$ , tous les termes sans  $\alpha$  disparaissent d'eux-mêmes, on aura, en faisant pour abrégér,

$$\begin{aligned}
M &= \frac{3nn}{(n^1 - n)^2 - nn} \cdot [ {}^1 F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n^1 - n} \cdot (C - \frac{1}{ii}) ] - \frac{2nn \cdot I}{(n^1)^2 - n^2} \\
& - \frac{n}{n^1} \cdot (C + D - \frac{3}{2ii}) + \frac{n}{n^1 - n} \cdot (C - \frac{1}{ii}) \\
{}^1 M &= \frac{3nn}{(n^1 - n)^2 - nn} \cdot [ {}^1 F + \frac{1}{ii} + \frac{2n}{n^1 - n} \cdot (C - \frac{1}{ii}) ] - \frac{2nn \cdot {}^1 I}{(n^1 - 2n)^2 - nn} \\
& - \frac{n}{n^1 - 2n} \cdot (D - C + \frac{1}{2ii}) + \frac{n}{n^1 - n} \cdot (C - \frac{1}{ii}) \\
{}^2 M &= \frac{3nn}{(2n^1 - 2n)^2 - nn} \cdot [ \frac{1}{2} \cdot {}^2 F + \frac{2n}{n^1 - n} \cdot \frac{1}{4} \cdot {}^1 C ] - \frac{2nn \cdot {}^2 I}{(2n^1 - n)^2 - nn} \\
& - \frac{n}{2n^1 - n} \cdot ({}^1 D + {}^1 C) + \frac{n}{n^1 - n} \cdot \frac{1}{4} \cdot {}^1 C \\
{}^3 M &= \frac{3nn}{(2n^1 - 2n)^2 - nn} \cdot [ \frac{1}{2} \cdot {}^2 F + \frac{2n}{n^1 - n} \cdot \frac{1}{4} \cdot {}^1 C ] - \frac{2nn \cdot {}^3 I}{(2n^1 - 3n)^2 - nn} \\
& - \frac{n}{2n^1 - 3n} \cdot ({}^1 D - {}^1 C) + \frac{n}{n^1 - n} \cdot \frac{1}{4} \cdot {}^1 C \\
& \&c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N &= \frac{2nn \cdot {}^1 L}{(2n^1 - n)^2 - nn} + \frac{n}{2n^1 - n} \cdot (E + C - \frac{2}{ii}) \\
{}^1 N &= C - E \\
{}^2 N &= \frac{2nn \cdot {}^3 L}{(3n^1 - 2n)^2 - nn} + \frac{n}{3n^1 - 2n} \cdot ({}^1 E + {}^1 C) \\
{}^3 N &= \frac{2nn \cdot {}^4 L}{(n^1 - 2n)^2 - nn} + \frac{n}{n^1 - 2n} \cdot ({}^1 E - {}^1 C) \\
& \&c.
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial t} = & \frac{2}{3} n Fe. \cos. (nt + \theta) + 2 ne. (F + G). nt. \sin. (nt + \theta) \\ & - {}^2 L e' n nt. \sin. (nt - B + \theta') + \frac{4 n^3 \cdot H}{(n^1)^2 - n^2} \cos. (n^1 t + \theta') \\ & + en. M. \cos. (n^1 t + B + \theta) \\ & + en. {}^1 M. \cos. (n^1 t - 2 nt + B - \theta) \\ & + en. {}^2 M. \cos. (2 n^1 t - nt + 2 B + \theta) \\ & + en. {}^3 M. \cos. (2 n^1 t - 3 nt + 2 B - \theta) \\ & + \&c. \\ & + e' n. N. \cos. (2 n^1 t - nt + B + \theta') \\ & + e' n. {}^1 N. \cos. (n^1 t + \theta' - B) \\ & + e' n. {}^2 N. \cos. (3 n^1 t - 2 nt + 2 B + \theta') \\ & + e' n. {}^3 N. \cos. (n^1 t - 2 nt + 2 B - \theta') \\ & + \&c. \end{aligned}$$

Enfin, si dans l'équation (18) de l'article *XI*, on substitue, au lieu de  $\partial s$ ,  $\alpha z \partial \mu'$ , que l'on néglige les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , & que l'on fasse pour abrégé,

$$\begin{aligned} {}^1 P = & - \frac{n \cdot (n^1 + n)}{(n^1 - n)^2 - nn} \cdot [ {}^1 F + \frac{i}{ii} + \frac{2n}{n^1 - n} \cdot (C - \frac{i}{ii}) ] \\ & - \frac{n}{n^1 - n} \cdot (C - \frac{i}{ii}) + \frac{i}{4} \cdot [ 2 (b) + (b_2) - \frac{2}{\beta} ]; \\ {}^2 P = & \frac{n \cdot (3n - n^1)}{(n^1 - n)^2 - nn} \cdot [ {}^1 F + \frac{i}{ii} + \frac{2n}{n^1 - n} \cdot (C - \frac{i}{ii}) ] \\ & + \frac{n}{n^1 - n} \cdot (C - \frac{i}{ii}) - \frac{i}{4} \cdot [ 2 (b) + (b_2) - \frac{2}{\beta} ]; \\ {}^3 P = & - \frac{2nn^1}{(2n^1 - 2n)^2 - nn} \cdot [ \frac{i}{2} \cdot {}^1 F + \frac{2n}{n^1 - n} \cdot \frac{i}{4} \cdot {}^1 C ] \\ & - \frac{n}{n^1 - n} \cdot \frac{i}{4} \cdot {}^1 C + \frac{i}{4} [ (b_1) + (b_3) ]; \\ {}^4 P = & \frac{n(4n - 2n^1)}{(2n^1 - 2n)^2 - nn} \cdot [ \frac{i}{2} \cdot {}^2 F + \frac{2n}{n^1 - n} \cdot \frac{i}{4} \cdot {}^1 C ] \\ & + \frac{n}{n^1 - n} \cdot \frac{i}{4} \cdot {}^1 C - \frac{i}{4} [ (b_1) + (b_3) ], \\ & \&c. \end{aligned}$$

On trouvera, cela posé,

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + n^2 z + nn\gamma \cdot {}^1P. \sin. (n't + B + \omega) \\
 & + nn\gamma \cdot {}^2P. \sin. (n't - 2nt + B - \omega) \\
 & + nn\gamma \cdot {}^3P. \sin. (2n't - nt + 2B + \omega) \\
 & + nn\gamma \cdot {}^4P. \sin. (2n't - 3nt + 2B - \omega) \\
 & + \&c. \\
 & + \frac{nn\gamma^2 \cdot i}{2} \cdot (b_1) \cdot \sin. (nt + \omega) \\
 & + \frac{1}{2} nn\gamma^2 \cdot i \cdot \left[ \frac{2}{\beta} - 2(b) \right] \cdot \sin. (n't + \omega) \\
 & - \frac{nni\gamma^3}{2} \cdot (b_1) \cdot \sin. (nt - B + \omega') \\
 & - \frac{nn\gamma^3 \cdot i}{2} \cdot (b_1) \cdot \sin. (2n't - nt + B + \omega') \\
 & - \frac{nni\gamma^3 (b_1)}{2} \cdot [\sin. (3n't - 2nt + 2B + \omega') \\
 & \quad - \sin. (n't - 2nt + 2B - \omega')] \\
 & - \frac{nni\gamma^3 (b_1)}{2} \cdot [\sin. (4n't - 3nt + 2B + \omega') \\
 & \quad - \sin. (2n't - 3nt + 3B - \omega')] \\
 & - \&c.
 \end{aligned}$$

d'où en intégrant, on aura

$$\begin{aligned}
 z = & \frac{\gamma i \cdot (b_1)}{4} \cdot nt \cdot \cos. (nt + \omega) \\
 & - \frac{i\gamma^3}{4} (b_1) \cdot nt \cdot \cos. (nt - B + \omega') \\
 & + \frac{nn}{(n')^2 - n^2} \cdot \gamma \cdot {}^1P. \sin. (n't + B + \omega) \\
 & + \frac{nn}{(n' - 2n)^2 - nn} \cdot \gamma \cdot {}^2P. \sin. (n't - 2nt + B - \omega) \\
 & + \&c.
 \end{aligned}$$

## X V I I.

Ayant ainsi les valeurs de  $\delta r$ ,  $\frac{\partial \cdot \delta \phi}{\partial t}$ , &c.  $\delta s$ , aux quantités près de l'ordre  $\alpha^2$ , il nous reste à déterminer les

termes de l'ordre  $\alpha^2$ , & proportionnels à  $t$ , dans les expressions de  $\frac{\partial \partial \phi}{\partial t}$ , &  $\partial r$ , parce que de-là dépend, comme nous l'avons déjà observé, l'équation séculaire du moyen mouvement de la Planète; or, si dans l'équation (17) de l'*art. XI*, on substitue au lieu de  $\partial r$ ,  $\alpha \partial \mu^i \cdot (\gamma + \alpha \gamma^i + \alpha^2 \cdot \lambda n t)$ , au lieu de  $\partial s$ , la valeur trouvée dans l'article précédent, & que l'on ne conserve que les termes de l'ordre  $\alpha^2$ , proportionnels à  $t$ ; il est clair d'abord que les termes sans  $\alpha$ , & ceux de l'ordre  $\alpha$  disparaîtront d'eux-mêmes en vertu des valeurs précédentes de  $\gamma$ , & de  $\gamma^i$ ; de plus, on trouvera par un calcul fort simple,

$$\lambda = e e^i \cdot \sin. V \cdot [2 K - \frac{3}{2} \cdot {}^2 L] \\ + \gamma \gamma^i \cdot \sin. U \cdot [2 L - \frac{3}{8} \cdot i \cdot (b_i)] ;$$

ensuite l'équation (16) de l'*art. XI*, donne en y substituant au lieu de  $\partial \phi$ ,  $\partial \mu^i \cdot (x + \alpha x^i + \alpha^2 \mathcal{C} \cdot n n t t)$ , & ne conservant parmi les termes de l'ordre  $\alpha^2$ , que ceux qui sont proportionnels à  $t$ ,

$$\mathcal{C} = e e^i \cdot \sin. V \cdot [\frac{3}{4} \cdot {}^2 L - \frac{3}{2} K] \\ + \gamma \gamma^i \cdot \sin. U \cdot [\frac{3}{8} \cdot i (b_i) - \frac{3}{2} \cdot L] ;$$

il est visible que le terme  $\alpha^2 \partial \mu^i \cdot \mathcal{C} n n t t$ , donne l'équation séculaire du moyen mouvement de la Planète, & comme cette inégalité est la plus essentielle à déterminer, il ne sera pas inutile de chercher à la mettre sous la forme la plus simple dont elle est susceptible.

Pour cela, j'observe que l'on a par l'*art. XIV*,

$$L = \frac{3 i i}{4(1+i i)} \cdot [(b) - \frac{1}{2}(b_2)] + \frac{i^3}{(1+i i)^2} \cdot [(\frac{\partial b}{\partial q}) - \frac{1}{2} \cdot (\frac{\partial b_2}{\partial q})] ;$$

or, si l'on substitue au lieu de  $(b_2)$ ,  $(\frac{\partial b}{\partial q})$ ,  $(\frac{\partial b_2}{\partial q})$ , leurs valeurs en  $(b)$  &  $(b_i)$ , trouvées dans l'*art. XIII*, on aura  $L = \frac{1}{4} i \cdot (b_i)$ ; partant  $\frac{3}{8} i \cdot (b_i) - \frac{3}{2} \cdot L = 0$ ; ce qui réduit déjà l'expression de  $\mathcal{C}$  à celle-ci,

$$\mathcal{C} = e e^i \cdot \sin. V \cdot (\frac{3}{4} \cdot {}^2 L - \frac{3}{2} \cdot K) ;$$

de plus on a

$${}^2 L = 2 C - 2 E + H - F ;$$

& en substituant, au lieu de  $C$ ,  $E$ ,  ${}^1H$ , &  ${}^1F$ , leurs valeurs en  $(b)$  &  $(b_1)$ , que l'on tirera facilement des *articles XIII* & *XIV*, on trouvera

$${}^2L = 3i(b) - (b_1) \cdot (1 + ii);$$

on trouvera de la même manière,

$$K = \frac{3}{2}i(b) - \frac{1}{2}(b_1) (1 + ii);$$

d'où l'on tire  $\mathcal{C} = 0$ , c'est-à-dire, que l'équation séculaire du moyen mouvement de la Planète est nulle, au moins en ne poussant l'approximation que jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^3 \delta \mu^1$ . Nous verrons ci-après, qu'elle seroit encore nulle, en ayant égard aux termes de l'ordre  $\alpha^3 \delta \mu^1$ ; & comme les quantités des ordres  $\alpha^2 \delta \mu^1$  &  $\alpha^3 \delta \mu^1$  sont déjà excessivement petites, on peut en conclure que *l'action réciproque des Planètes, les unes sur les autres, n'a pu sensiblement altérer leurs moyens mouvemens, depuis le temps au moins, auquel on a commencé à cultiver l'Astronomie, jusqu'à nos jours; résultat analogue à celui que j'ai trouvé par une autre méthode dans les Savans étrangers, année 1773, page 218.*

## X V I I I.

Reprenons maintenant les valeurs de  $\delta r$  & de  $\delta s$ ; en y ajoutant les valeurs de  $r$  & de  $s$ , trouvées ci-dessus dans la supposition de  $\delta \mu^1 = 0$ , on aura

$$r = a \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} - \frac{\alpha^2 \gamma^2}{4} + \alpha e \cdot \cos. (nt + \theta) \\ - \alpha e \cdot (F + G) \cdot \delta \mu^1 \cdot \cos. (nt + \theta) \\ + \alpha^2 \delta \mu^1 \cdot \lambda nt \\ + \frac{\alpha \cdot {}^2L}{2} \cdot \cos. \delta \mu^1 \cdot \sin. (nt - B + \theta^1) + Y; \end{array} \right.$$

&

$$\begin{aligned} s = a \gamma \cdot \sin. (nt + \varpi) \\ + \frac{\alpha \gamma \cdot (b_1) i}{4} \cdot \delta \mu^1 \cdot nt \cdot \cos. (nt + \varpi) \\ - \frac{\alpha \gamma^1 (b_1) i}{4} \cdot \delta \mu^1 \cdot nt \cdot \cos. (nt - B + \varpi^1) + Z; \\ Y \text{ \& } Z, \end{aligned}$$

$Y$  &  $Z$ , étant des quantités périodiques qui ne renferment point d'arcs de cercle : or on a,

$$\begin{aligned} \sin. (nt - B + \theta') &= \sin. (nt + \theta + \theta' - \theta - B) \\ &= \sin. (nt + \theta - V) = \cos. V. \sin. (nt + \theta) \\ &\quad - \sin. V. \cos. (nt + \theta), \end{aligned}$$

parce que  $V = B - \theta' + \theta$  (*art. XIV*) ; de plus, on trouvera facilement  $F + G = -\frac{1}{4}i.(b_1)$  ; on pourra donc ainsi mettre l'expression de  $r$  sous cette forme,

$$r = a. \left\{ \begin{aligned} &1 + \alpha. \left\{ e + \frac{1}{2}e'.nt. \delta\mu'. \sin. V. [(b_1)(1 + ii) - 3i(b)] \times \right. \\ &\quad \left. \cos. \left\{ \theta + nt. \left\{ 1 - \frac{i}{4}(b_1) \delta\mu'^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2}. \frac{e^2}{e}. \cos. V. \delta\mu'. [(b_1)(1 + ii) - 3i(b)] \right\} \right\} \right\} (F); \\ &+ \frac{a^2.e^2}{2} - \frac{a^2.\gamma^2}{4} - \frac{a^2}{2} \delta\mu'.nt. ee'. \sin. V. [\frac{1}{2}.i(b) - \frac{1}{2}.(b_1).(1 + ii)] \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \delta\mu'.nt. \gamma\gamma'. \sin. U. \frac{1}{8}.i(b_1) \quad + Y \end{aligned} \right\}$$

on aura pareillement en considérant que

$$B - \varpi' + \varpi = U \text{ (art. XIV),}$$

$$\begin{aligned} s &= a. [\gamma - \frac{\gamma^2}{4}.i.(b_1) \delta\mu'.nt. \sin. U] \times \\ &\quad \sin. [\varpi + nt(1 + \frac{i(b_1)}{4} \delta\mu' - \frac{\gamma^2}{\gamma}.i.(b_1) \delta\mu'. \cos. U)] + Z. \end{aligned}$$

En considérant les masses des Planètes, comme étant extrêmement petites par rapport à celle du Soleil, il est visible que chacune d'elles décrirait très-sensiblement une orbite elliptique à chaque révolution, & qu'ainsi leur action réciproque ne pourroit être sensible, qu'autant qu'elle altérerait à la longue les élémens de ces ellipses, c'est-à-dire, la moyenne distance de la Planète au Soleil, la position de son aphélie & de ses nœuds, son excentricité & son inclinaison ; or il est visible que l'augmentation de l'excentricité après le temps  $t$ , fera

$$\frac{1}{2}. \alpha e'.nt. \delta\mu'. \sin. V. [(b_1)(1 + ii) - 3i(b)],$$

Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.

Y y

de sorte qu'après le nombre  $c$  de révolutions, l'augmentation de l'équation du centre qui pour les Planètes est à très-peu près le double de l'excentricité, sera

$$ae' \cdot c \cdot 360^d \cdot \delta\mu' \cdot \sin. V. [(b_1) (1 + ii) - 3i \cdot (b)];$$

il est aisé de voir pareillement que le mouvement direct de l'aphélie fera

$$c \cdot 360^d \cdot \delta\mu' \cdot \left\{ \frac{i}{4} \cdot (b_1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{ae'}{ae} \cdot \cos. V. [(b_1) (1 + ii) - 3i \cdot (b)] \right\}$$

que la diminution de l'inclinaison de l'orbite fera

$$\frac{\alpha \cdot \gamma^i i (b_1) \delta\mu^i}{4} \cdot c \cdot 360^d \cdot \sin. U,$$

& que le mouvement rétrograde des nœuds fera

$$c \cdot 360^d \cdot \delta\mu' \cdot \left[ \frac{i(b_1)}{4} - \frac{\alpha\gamma^i}{\alpha\gamma} i \cdot \left( \frac{b_1}{4} \right) \cdot \cos. U \right].$$

Pour ce qui regarde la variation du grand axe, on peut déjà conclure qu'elle est nulle, de ce que le moyen mouvement de la Planète reste constamment le même; car nous avons démontré précédemment que les quarrés des temps des révolutions périodiques sont comme les cubes des grands axes; par conséquent si, après plusieurs siècles, les grands axes des orbites devenoient plus ou moins grands, les révolutions deviendroient moins ou plus rapides. Il suit de-là que les termes proportionnels au temps qui se rencontrent dans l'expression ( $F$ ) de  $r$ , ne sont dûs qu'aux variations des quantités  $\frac{\alpha^2 \cdot e^2}{2}$  &  $-\frac{\alpha^2 \cdot \gamma^2}{4}$ , qui se trouvent dans la

valeur de  $r$ , lorsqu'on suppose  $\delta\mu' = 0$ ; c'est en effet ce

que le calcul confirme; car la variation de  $\frac{\alpha^2 \cdot e^2}{2}$ , est égale

$$- \alpha^2 ee' \cdot nt \delta\mu' \cdot \sin. V. \left[ \frac{3}{2} \cdot i(b) - \frac{1}{2} (b_1) (1 + ii) \right];$$

pareillement la variation de  $-\frac{\alpha^2 \cdot \gamma^2}{4}$ , est

$$+ \frac{1}{8} \cdot \alpha^2 \gamma \gamma' \cdot i (b_1) \cdot \delta\mu' \cdot nt \cdot \sin. U;$$

or, ce sont-là les termes proportionnels au temps qui se



rencontrent dans l'expression de  $r$ ; donc la quantité  $a$ , qui exprime la moyenne distance de la Planète au Soleil dans l'orbite réelle, reste toujours constante.

## X I X.

Les articles précédens donnent les valeurs de  $r$ ,  $s$ , &  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , aux quantités près de l'ordre  $\alpha^2$ ; & de la valeur de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , on peut très-facilement conclure celle de  $\varphi$ ; mais ces expressions renferment des arcs de cercle, & ne peuvent servir conséquemment que pour un temps limité; il est donc essentiel de les faire disparaître, toutes les fois que cela est possible, & c'est ce qu'on peut faire d'une manière extrêmement simple, par la méthode exposée au commencement de ce Mémoire; mais avant que de donner ce calcul, il ne sera pas inutile de faire quelques remarques sur le degré de précision des approximations précédentes.

J'observe d'abord que si l'on vouloit obtenir de nouveaux termes proportionnels aux temps, dans les expressions de  $r$  & de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , il faudroit pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^4 \delta \mu'$ ; les Géomètres qui auront suivi l'analyse précédente, s'en assureront très-aisément à l'inspection des équations (16), (17) & (18) de l'article XI. De plus, comme Jupiter & Saturne ont des masses assez considérables, pour qu'on puisse regarder, par rapport à elles,  $\delta \mu'$  comme de l'ordre  $\alpha^2$ , il est indispensable alors d'avoir égard aux termes de l'ordre  $\delta (\mu')^2$ ; or, en considérant les équations (10), (11) & (12) de l'article X, on verra facilement que les termes de l'ordre  $\delta (\mu')^2$ , ne peuvent produire aucun terme proportionnel au temps dans la valeur de  $r$ , ni dans celle de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , & qu'il faut pour cela porter l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^2 \delta (\mu')^2$ ; d'où il suit que généralement, l'équation séculaire du moyen mouvement

Y y ij

des Planètes est nulle, au moins aux quantités près de l'ordre  $\alpha^4 \delta \mu^1$ .

J'observe ensuite que parmi les termes de l'ordre  $\alpha^2$ , il ne s'en trouve aucun dans les expressions de  $r$  & de  $s$ , de la forme  $\alpha^2 . K . t . \text{cof.} (nt + q)$ , & qu'ainsi les variations trouvées dans l'article précédent, pour l'inclinaison & l'excentricité de l'orbite, sont exactes, aux quantités près de l'ordre  $\alpha^3$ , & que celles du mouvement des nœuds & des aphélies, le sont aux quantités près de l'ordre  $\alpha^2$ , par où l'on voit qu'elles sont fort approchées.

Considérons maintenant un argument tel que

$$\text{cof. } q(n^1 . t - nt + B),$$

$q$  étant un nombre entier quelconque, on verra aisément qu'il faut porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , pour en retrouver un pareil; & si l'on considère un argument tel que  $\alpha e . \text{cof.} (n^1 . t - 2nt + B - \theta)$ , on verra qu'il faut, pour retrouver son pareil, porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre  $\alpha^3$ ; de-là, on peut conclure généralement que le même argument ne peut être reproduit que par les quantités des ordres  $\alpha^2$ ,  $\alpha^4$ ,  $\alpha^6$ , &c. S'il se trouve, pour la première fois, parmi les termes des ordres  $\alpha^0$ ,  $\alpha^2$ ,  $\alpha^4$ , &c. ou par les quantités des ordres  $\alpha^3$ ,  $\alpha^5$ ,  $\alpha^7$ , &c. s'il se trouve, pour la première fois, parmi les termes des ordres  $\alpha$ ,  $\alpha^3$ ,  $\alpha^5$ , &c.

## X X.

Je reprends maintenant les équations de l'article XVIII.

$$r = a . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{\alpha^2 . e^2}{2} - \frac{\alpha^2 . r^2}{4} + \alpha^2 . \delta \mu^1 . \lambda . nt \\ + \alpha e . \text{cof.} (nt + \theta) - \alpha e . (F + G) \delta \mu^1 \times \\ \phantom{+} e n t . \text{fin.} (nt + \theta) + \frac{\alpha e^2 . L}{2} . nt . \delta \mu^1 \times \\ \phantom{+} \text{fin.} (nt - B + \theta') + Y. \end{array} \right.$$

$$s = \alpha \gamma . \text{fin.} (nt + \varpi) \\ + \frac{\alpha \gamma . i(b_1)}{4} . \delta \mu^1 . nt . \text{cof.} (nt + \varpi) \\ = \frac{\alpha \gamma^1 . i(b_1)}{4} . \delta \mu^1 . nt . \text{cof.} (nt - B + \varpi') + Z;$$

& j'observe que l'on a pour  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , une équation de cette forme,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & n - 2\alpha en \cdot \cos.(nt + \theta) \\ & + 2\alpha en \cdot (F' + G) \cdot nt \cdot \sin.(nt + \theta) \\ & - {}^2L \cdot \alpha e' \cdot nnt \cdot \sin.(nt - B + \theta') + X; \end{aligned}$$

$X, Y$  &  $Z$ , étant des quantités périodiques, ou qui ne renferment point d'arcs de cercle; or si l'on nomme  $\epsilon$ , la distance réelle de la Planète  $P$ , à son aphélie;  $B_1, B_1',$  &c. les angles compris à l'origine du mouvement entre les projections des Planètes  $P, P',$  &c. & la ligne fixe d'où l'on commence à compter les longitudes; on aura, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ,  $B_1 = A + \epsilon$ ; de plus, on a par l'*art. XIII*,  $\theta = \epsilon + 2\alpha e \cdot \sin. \epsilon$ ; donc,

$$\theta = B_1 - A + 2\alpha e \cdot \sin.(B_1 - A);$$

or on a (*art. XIV*),  $B = A' - A + \theta' - \theta$ ; donc,

$$B = B_1' - B_1 + 2\alpha e' \cdot \sin.(B_1' - A') - 2\alpha e \cdot \sin.(B_1 - A);$$

on aura ainsi,

$$\begin{aligned} \cos. q(n't - nt + B) = & \cos. q(n't - nt + B_1' - B_1) \\ & + \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha e q \cdot \sin.(B_1 - A) \\ - 2\alpha e' q \cdot \sin.(B_1' - A') \end{array} \right\} \cdot \sin.(n't - nt + B_1' - B_1); \end{aligned}$$

on a de plus, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \cos.(nt + \theta) &= \cos.(nt + B_1 - A) = \cos. A \cdot \cos.(nt + B_1) \\ &\quad + \sin. A \cdot \sin.(nt + B_1) \\ \sin.(nt + \theta) &= \sin.(nt + B_1 - A) = \cos. A \cdot \sin.(nt + B_1) \\ &\quad - \sin. A \cdot \cos.(nt + B_1) \\ \sin.(nt - B + \theta') &= \sin.(nt + B_1 - A') = \cos. A' \cdot \sin.(nt + B_1) \\ &\quad - \sin. A' \cdot \cos.(nt + B_1) \\ \sin. V &= \sin.(A' - A) = \sin. A' \cdot \cos. A - \sin. A \cdot \cos. A'. \end{aligned}$$

Nommons ensuite  $C_1$ ,  $C_1'$ , &c. les distances des nœuds de  $P$ ,  $P'$ , &c. à la ligne fixe, à l'origine du mouvement, & nous aurons, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha$ ,

$$B_1 - \varpi = C_1,$$

&c

$$\sin.(nt + \varpi) = \sin.(nt + B_1 - C_1) = \cos.C_1 \cdot \sin.(nt + B_1) \\ - \sin.C_1 \cdot \cos.(nt + B_1)$$

$$\cos.(nt + \varpi) = \cos.(nt + B_1 - C_1) = \cos.C_1 \cdot \cos.(nt + B_1) \\ + \sin.C_1 \cdot \sin.(nt + B_1)$$

$$\cos.(nt - B + \varpi') = \cos.(nt + B_1 - C_1') = \cos.C_1' \cdot \cos.(nt + B_1) \\ + \sin.C_1' \cdot \sin.(nt + B_1)$$

$$\sin.U = (\text{art. XIV}), \sin.(A' - A + \theta' - \theta - \varpi' + \varpi) \\ = \sin.(B_1' - \varpi' - B_1 + \varpi) = \sin.(C_1' - C_1)$$

$$= \sin.C_1' \cdot \cos.C_1 - \sin.C_1 \cdot C_1';$$

cela posé, on verra facilement que les expressions précédentes de  $r$ ,  $s$ , &  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , peuvent être mises sous cette forme,

$$r = \alpha \cdot \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} - \frac{\alpha^2 \gamma^2}{4} + \cos.(nt + B_1) \cdot \left\{ \begin{aligned} &\alpha e \cdot \cos.A + \alpha e \cdot \sin.A(F + G) \cdot \delta \mu^1 \cdot nt \\ &- \alpha e^2 \cdot \sin.A^2 \cdot \frac{2L}{2} \cdot nt \cdot \delta \mu^2 \end{aligned} \right\} \\ &+ \sin.(nt + B_1) \cdot \left\{ \begin{aligned} &\alpha e \cdot \sin.A - \alpha e \cdot \cos.A(F + G) \cdot \delta \mu^1 \cdot nt \\ &- \alpha e^2 \cdot \cos.A^2 \cdot \frac{2L}{2} \cdot \delta \mu^2 \cdot nt \end{aligned} \right\} \\ &- \alpha^2 \cdot \delta \mu^1 \cdot nt \cdot e e^2 \cdot [\sin.A^2 \cdot \cos.A - \sin.A \cdot \cos.A^2] \cdot [\frac{3}{2}i(b_1) - \frac{1}{2}(b)(1 + ii)] \\ &+ \alpha^2 \cdot \delta \mu^1 \cdot nt \cdot \gamma \gamma^2 \cdot \frac{3}{8}i \cdot (b_1) [\sin.C_1^2 \cdot \cos.C_1 - \sin.C_1 \cdot \cos.C_1^2] \\ &+ \&c. \\ &+ Q + \alpha e \cdot \sin.A \cdot \delta \mu^1 \cdot R + \alpha e \cdot \cos.A \cdot \delta \mu^2 \cdot R \\ &+ \alpha e^2 \cdot \sin.A^2 \cdot \delta \mu^2 \cdot R + \alpha e^2 \cdot \cos.A^2 \cdot \delta \mu^3 \cdot R \end{aligned} \right.$$

$$s = \sin.(nt + B_1) \cdot [\alpha \gamma \cdot \cos.C_1 + \alpha \gamma \cdot \sin.C_1 \cdot \frac{i \cdot (b_1) \delta \mu^2}{4} \cdot nt \\ - \alpha \gamma \cdot \sin.C_1^2 \cdot \frac{i \cdot (b_1) \delta \mu^2}{4} \cdot nt] \\ - \cos.(nt + B_1) \cdot [\alpha \gamma \cdot \sin.C_1 - \alpha \gamma \cdot \cos.C_1 \cdot \frac{i \cdot (b_1) \delta \mu^2}{4} \cdot nt \\ + \alpha \gamma^2 \cdot \cos.C_1^2 \cdot \frac{i \cdot (b_1) \delta \mu^3}{4} \cdot nt]$$

$$+ \alpha \gamma \cdot \sin. C_1 \cdot {}^1S + \alpha \gamma \cdot \cos. C_1 \cdot {}^2S \\ + \alpha \gamma' \cdot \sin. C_1' \cdot {}^3S + \alpha \gamma' \cdot \cos. C_1' \cdot {}^4S$$

$$\frac{2\varphi}{2t} = n - 2n \cdot \cos. (nt + B_1) \cdot [\alpha e \cdot \cos. A + \alpha e \cdot \sin. A \cdot (F + G) \cdot \delta \mu' \cdot nt \\ - \alpha e' \cdot \sin. A' \cdot \frac{{}^2L}{2} \cdot \delta \mu' \cdot nt] \\ - 2n \cdot \sin. (nt + B_1) \cdot [\alpha e \cdot \sin. A - \alpha e \cdot \cos. A \cdot (F + G) \cdot \delta \mu' \cdot nt \\ + \alpha e' \cdot \cos. A' \cdot \frac{{}^2L}{2} \cdot \delta \mu' \cdot nt] \\ + {}^1X + \alpha e \cdot \sin. A \cdot {}^2X + \alpha e \cdot \cos. A \cdot {}^3X \\ + \alpha e' \cdot \sin. A' \cdot {}^4X + \alpha e' \cdot \cos. A' \cdot {}^5X$$

$Q, R, {}^1R, \&c. {}^1S, {}^2S, \&c. {}^1X, {}^2X, \&c.$  étant des quantités périodiques qui ne renferment point les constantes  $e, e', \&c.$   $A, A', \&c. C_1, C_1', \&c.$  on peut observer que  $A, A', \&c.$  peuvent être ici considérées comme exprimant les distances des projections des aphélies de  $P, P', \&c.$  à la ligne fixe, &  $C_1, C_1', \&c.$  comme exprimant les distances de leurs nœuds à la même ligne.

Présentement, si l'on nomme  $u$  le moyen mouvement durant le temps  $t$  d'une Planète qui circuleroit autour du Soleil, à une distance que je prends pour l'unité, & que l'on fasse

$$\frac{1}{2} \cdot i \cdot (b_1) \delta \mu' \cdot nt = (0, 1) \cdot u;$$

$$\frac{1}{2} \cdot [(b_1) (1 + ii) - 3i \cdot (b)] \delta \mu' \cdot nt = (\overline{0, 1}) \cdot u;$$

que l'on représente par  $(0, 2) \cdot u, (\overline{0, 2}) \cdot u; (0, 3) \cdot u,$

$(\overline{0, 3}) \cdot u; \&c.$  les mêmes quantités relativement aux Planètes  $P'', P''', \&c.$  soit de plus,

$$\alpha e \cdot \sin. A = p; \quad \alpha e \cdot \cos. A = q;$$

$$\alpha e' \cdot \sin. A' = p'; \quad \alpha e' \cdot \cos. A' = q';$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

$$\alpha \gamma \cdot \sin. C_1 = h; \quad \alpha \gamma \cdot \cos. C_1 = l;$$

$$\alpha \gamma' \cdot \sin. C_1' = h'; \quad \alpha \gamma' \cdot \cos. C_1' = l';$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

on aura  $\alpha^2 e^2 = p^2 + q^2$ ,  $\alpha^2 \gamma^2 = h^2 + l^2$ , & les trois équations précédentes deviendront,

$$r = a \cdot \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} (p^2 + q^2) - \frac{1}{4} \cdot (h^2 + l^2) \\ + \sin. (nt + B_1) [p + (0, 1) \cdot qu - (\overline{0, 1}) \cdot q'u] \\ + \cos. (nt + B_1) [q - (0, 1) \cdot pu + (\overline{0, 1}) \cdot p'u] \\ + (\overline{0, 1}) \cdot u \cdot [p'q - pq'] + \frac{1}{2} (0, 1) u \cdot [h'l - hl'] \\ + Q + p \cdot \delta \mu^1 \cdot R + q \cdot \delta \mu^1 \cdot R \\ + p' \cdot \delta \mu^1 \cdot R + q' \cdot \delta \mu^1 \cdot R; \end{cases}$$

$$s = \begin{aligned} & \sin. (nt + B_1) \cdot [l + (0, 1) \cdot hu - (\overline{0, 1}) \cdot h'u] \\ & + h \cdot \delta \mu^1 \cdot S + l \cdot \delta \mu^1 \cdot S \\ & - \cos. (nt + B_1) \cdot [h - (0, 1) \cdot lu + (\overline{0, 1}) \cdot l'u] \\ & + h' \cdot \delta \mu^1 \cdot S + l' \cdot \delta \mu^1 \cdot S; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = n - 2n \cdot \sin. (nt + B_1) \cdot [p + (0, 1) \cdot qu - (\overline{0, 1}) \cdot q'u] \\ + X + p \cdot \delta \mu^1 \cdot X + q \cdot \delta \mu^1 \cdot X \\ - 2n \cdot \cos. (nt + B_1) \cdot [q - (0, 1) \cdot pu + (\overline{0, 1}) \cdot p'u] \\ + p' \cdot \delta \mu^1 \cdot X + q' \cdot \delta \mu^1 \cdot X;$$

Pour faire disparaître les arcs de cercle de l'expression de  $r$ , je fais, en suivant l'esprit de la méthode exposée au commencement de ce Mémoire,

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{\partial p}{\partial u} &= (0, 1) \cdot q - (\overline{0, 1}) \cdot q' \\ \text{II. } \frac{\partial q}{\partial u} &= - (0, 1) \cdot p + (\overline{0, 1}) \cdot p' \\ \text{III. } \frac{\partial \alpha}{\partial u} + a \cdot [p \cdot \frac{\partial p}{\partial u} + q \cdot \frac{\partial q}{\partial u} - \frac{1}{2} h \cdot \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{1}{2} l \cdot \frac{\partial l}{\partial u}] \\ &= a \cdot \left\{ \begin{aligned} & (\overline{0, 1}) \cdot (p'q - q'p) \\ & + \frac{1}{2} (0, 1) \cdot (h'l - hl') \end{aligned} \right\}; \end{aligned}$$

ensuite, pour faire disparaître les arcs de cercle de la valeur de  $s$ , je fais

IV,

$$\text{IV. } \frac{\partial l}{\partial u} = (0,1) h - (\overline{0,1}) h'$$

$$\text{V. } \frac{\partial h}{\partial u} = (0,1) l' - (\overline{0,1}) l;$$

enfin, pour faire disparaître les arcs-de-cercle de la valeur de  $\frac{\partial p}{\partial t}$ , je fais

$$\frac{\partial p}{\partial u} = (0,1) q - (\overline{0,1}) q'$$

$$\frac{\partial q}{\partial u} = - (0,1) p + (\overline{0,1}) p',$$

équations qui rentrent dans les deux premières.

L'équation III donne, en y substituant au lieu de  $\frac{\partial p}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial l}{\partial u}$ , leurs valeurs tirées des équations I, II, IV, & V,  $\frac{\partial a}{\partial u} = 0$ , ce qui indique que la variation de la moyenne distance est nulle, comme nous l'avons déjà observé; on aura donc les quatre équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} = & q \cdot [(0,1) + (0,2) + (0,3) + \&c.] \\ & - (\overline{0,1}) \cdot q' - (\overline{0,2}) \cdot q'' - (\overline{0,3}) q''' - \&c.; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial u} = & - p \cdot [(0,1) + (0,2) + (0,3) + \&c.] \\ & + (\overline{0,1}) \cdot p' + (\overline{0,2}) \cdot p'' + (\overline{0,3}) \cdot p''' + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u} = & - l \cdot [(0,1) + (0,2) + \&c.] \\ & + (0,1) \cdot l' + (0,2) \cdot l'' + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} = & h \cdot [(0,1) + (0,2) + \&c.] \\ & - (0,1) \cdot h' - (0,2) \cdot h'' - \&c. \end{aligned}$$

Maintenant si l'on regarde successivement les Planètes  $P'$ ,  $P''$ , &c. comme troublées par l'action des autres, & que l'on nomme  $(1,0)$ ,  $(\overline{1,0})$ ,  $(1,2)$ ,  $(\overline{1,2})$ , &c. pour  $P'$ ;  $(2,0)$ ,  $(\overline{2,0})$ ,

(2, 1),  $\overline{(2, 1)}$ , &c. pour  $P''$ , &c. des quantités analogues à celles que nous avons nommées,  $(0, 1)$ ,  $\overline{(0, 1)}$ ,  $(0, 2)$ ,  $\overline{(0, 2)}$ , &c. pour  $P$ , on aura les équations

$$\frac{\partial p'}{\partial u} = q' \cdot [(1, 0) + (1, 2) + \&c.] - \overline{(1, 0)} \cdot q - (1, 2) \cdot q' - \&c.$$

$$\frac{\partial q'}{\partial u} = -p' \cdot [(1, 0) + (1, 2) + \&c.] + (1, 0) \cdot p + (1, 2) \cdot p'' + \&c.$$

$$\frac{\partial h'}{\partial u} = -l' \cdot [(1, 0) + \&c.] + (1, 0) \cdot l + \&c.$$

$$\frac{\partial l'}{\partial u} = h' \cdot [(1, 0) + \&c.] - \&c.$$

&c.

En intégrant ces équations, on aura les valeurs de  $p$ ,  $q$ ,  $h$ ,  $l$ ,  $p'$ ,  $q'$ , &c. & en les substituant dans les expressions de  $r$ ,  $s$  &  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , on effacera les arcs-de-cercle qui se rencontrent dans ces expressions.

Il est visible que les équations précédentes sont renfermées dans celles dont nous avons donné l'intégrale (*art. III*), en sorte qu'il ne peut y avoir aucune difficulté sur cet objet; mais il ne sera pas inutile de faire la remarque suivante.

Pour intégrer les équations précédentes, on y substituera, suivant la méthode de l'*art. III*, au lieu de  $p$ ,  $p'$ , &c.

$$b \cdot \sin. (fx + \varpi), \quad b' \cdot \sin. (fx + \varpi), \quad \&c.$$

& au lieu de  $q$ ,  $q'$ , &c.

$$b \cdot \cos. (fx + \varpi), \quad b' \cdot \cos. (fx + \varpi), \quad \&c.$$

& l'on aura les équations,

$$fb = b \cdot [(0, 1) + (0, 2) + \&c.] - (0, 1) b' - (0, 2) b'' - \&c.$$

$$fb' = b' \cdot [(1, 0) + (1, 2) + \&c.] - (1, 0) b - (1, 2) b'' - \&c.$$

$$fb'' = b'' \cdot [(2, 0) + (2, 1) + \&c.] - (2, 0) b - (2, 0) b' - \&c.$$

&c.

Il suffit ici de considérer les équations relatives à  $p$ ,  $p'$ , &c.  $q$ ,  $q'$ , &c. puisque les valeurs de  $h$ ,  $h'$ , &c.  $l$ ,  $l'$ , &c. s'en



déduisent en changeant dans  $q, q', \&c. p, p', \&c.$  les quantités  $(0,1), (0,2), \&c. (1,0), \&c.$  en  $(0,1), (0,2), \&c. (1,0), \&c.$

Les équations précédentes en donnent une en  $f$ , du degré  $n$ , s'il y a  $n$  Planètes; or si cette équation renferme des racines imaginaires, il entre nécessairement des quantités exponentielles dans les valeurs de  $p, q, \&c.$  & comme ces quantités peuvent aller croissantes à l'infini, la solution précédente ne peut avoir lieu que pour un temps limité: il seroit donc très-important de s'assurer si l'équation en  $f$ , peut renfermer des racines imaginaires, & en quel nombre elles peuvent y exister. Cette discussion me paroît digne de toute l'attention des Géomètres; je me contenterai ici d'observer que, lorsqu'on ne considère que deux Planètes, comme on l'a fait jusqu'à présent dans la théorie de Jupiter & de Saturne, l'équation en  $f$  a toujours deux racines réelles; car on a alors,

$$fb = (0,1) b - \overline{(0,1)} \cdot b'$$

$$fb' = (1,0) b' - \overline{(1,0)} \cdot b,$$

d'où l'on tire

$$ff - [(1,0) + (0,1)]f = \overline{(1,0)} \cdot \overline{(0,1)} - (1,0) \cdot (0,1),$$

équation dont il est visible que les deux racines sont toujours réelles.

## XXI.

### *Détermination des Inégalités séculaires du Mouvement des Aphélies & des Excentricités de Jupiter & de Saturne.*

Il nous resteroit présentement à appliquer la théorie précédente aux différentes Planètes; mais la longueur déjà trop grande de ce Mémoire m'oblige de renvoyer ces applications à un autre temps; je me bornerai donc ici à déterminer les inégalités séculaires de Jupiter & de Saturne, & parmi ces inégalités, je ne considérerai que celles du mouvement des aphélies & des excentricités, M. de la Grange ayant traité

dans le plus grand détail, celles qui sont relatives au mouvement des nœuds & à l'inclinaison de leurs orbites : les masses de ces deux corps sont tellement grandes par rapport à celles des autres Planètes, & leur position dans le système solaire est telle qu'on peut, sans craindre aucune erreur sensible, considérer à part leur action réciproque.

Je reprends l'équation

$$ff - [(1,0) + (0,1)]f = \overline{(1,0)} \cdot \overline{(0,1)} - (1,0) \cdot (0,1).$$

Pour en avoir les racines, il faut connoître  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $\overline{(0,1)}$  &  $\overline{(1,0)}$ ; or soit  $P$  Jupiter, &  $P'$  Saturne; que l'on désigne par  $mt$  le moyen mouvement du Soleil, & que l'on fasse

$$u = \frac{1}{1000000} \cdot mt, \text{ on aura (art. XX),}$$

$$(0,1) = \frac{1000000}{4} \cdot \frac{a^1}{a} \cdot (b_1) \delta \mu^1 \cdot \frac{n}{m}$$

$$\overline{(0,1)} = \frac{1000000}{2} \cdot \left[ \left( \frac{a^2 + (a^1)^2}{a^2} \right) \cdot (b_1) - \frac{3a^1}{a} \cdot (b) \right] \cdot \delta \mu^1 \cdot \frac{n}{m}$$

$$(1,0) = \frac{1000000}{4} \cdot \frac{a}{a^1} \cdot (b_1^1) \delta \mu \cdot \frac{n}{m}$$

$$\overline{(1,0)} = \frac{1000000}{2} \cdot \left[ \left( \frac{a^2 + (a^1)^2}{(a^1)^2} \right) \cdot (b_1^1) - \frac{3a}{a^1} \cdot (b^1) \right] \cdot \delta \mu \cdot \frac{n}{m};$$

$(b)$  &  $(b_1^1)$  étant ce que deviennent  $(b)$  &  $(b_1)$ , lorsqu'on y change  $a$  en  $a^1$ , & réciproquement; or on trouvera facilement par l'art. XIII,

$$(b^1) = \frac{(a^1)^1}{a^3} \cdot (b), \text{ \& } (b_1^1) = \frac{(a^1)^1}{a^3} \cdot (b_1);$$

donc

$$(1,0) = \frac{a^1}{a} \cdot \frac{\delta \mu}{\delta \mu^1} \cdot \frac{n}{n^1} \cdot (0,1) = \left( \frac{n^1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\delta \mu}{\delta \mu^1} \cdot (0,1),$$

à cause de  $\frac{a^1}{a} = \left( \frac{n^1}{n} \right)^{\frac{2}{3}}$ ; on aura semblablement,

$$\overline{(1,0)} = \left( \frac{n^1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\delta \mu}{\delta \mu^1} \cdot \overline{(0,1)};$$

de sorte qu'ayant une fois  $(0,1)$  &  $\overline{(0,1)}$ , on en conclura facilement  $(1,0)$  &  $\overline{(1,0)}$ .

Suivant les Tables de Halley, le mouvement séculaire de Jupiter est de 10926257 secondes, & celui de Saturne est de 4398126 secondes; d'où l'on tire  $\frac{n'}{n} = 0,402528$ ;

partant,  $\log. \frac{a'}{a} = \log. \left( \frac{n'}{n} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,263469$ ; ensuite on a (*Voyez les Savans étrangers, année 1773, page 212*),

$$(b) = 0,35292, \quad (b_1) = 0,51578;$$

de plus,  $\delta\mu' = \frac{1}{3021}$ ; de-là je conclus,

$$(0,1) = 6,6007,$$

$$(\overline{0,1}) = 4,3129;$$

ensuite,  $\delta\mu = \frac{1}{1067}$ ; partant,

$$(1,0) = 13,7988,$$

$$(\overline{1,0}) = 9,0162;$$

on a donc l'équation

$$ff - 20,3995 \cdot f = - 52,1258,$$

dont les deux racines sont

$$f = 17,3998,$$

$$f = 2,9998;$$

maintenant, si l'on néglige, comme cela est ici permis, les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , & que l'on prenne pour plan fixe, celui de l'écliptique, au commencement de 1750, & pour point fixe d'où l'on commence à compter les longitudes, la position de l'équinoxe du printemps à cette époque, l'angle  $A$  exprimera la longitude de la projection de l'aphélie de Jupiter, & l'angle  $A'$ , celle de la projection de l'aphélie de Saturne; or on a suivant les Tables de Halley, pour le commencement de 1750,

$$A = 6^{\text{f}} 10^{\text{d}} 33' 46'',$$

$$ae = 0,048218,$$

$$A' = 8^{\text{f}} 29^{\text{d}} 39' 58'',$$

$$ae' = 0,057003.$$

Soient  $H$  &  $H'$  les valeurs de  $p$  & de  $p'$ ;  $L$  &  $L'$ , celles de  $q$  & de  $q'$  à cette époque, on aura

$$H = ae \cdot \sin. A = - 0,008842,$$

$$H' = ae' \cdot \sin. A' = - 0,057002,$$

$$L = ae \cdot \cos. A = - 0,047400,$$

$$L' = ae' \cdot \cos. A' = - 0,000663.$$

Mais on a les quatre équations

$$H = b \cdot \sin. \varpi + b \cdot \sin. ' \varpi,$$

$$H' = b' \cdot \sin. \varpi + 'b' \cdot \sin. ' \varpi,$$

$$L = b \cdot \cos. \varpi + 'b' \cdot \cos. ' \varpi,$$

$$L' = b' \cdot \cos. \varpi + 'b' \cdot \cos. ' \varpi;$$

ensuite on a

$$f \cdot b = (0,1) \cdot b - \overline{(0,1)} \cdot b',$$

$$'f \cdot b' = (0,1) \cdot b' - \overline{(0,1)} \cdot b;$$

donc si l'on fait

$$H_1 = (0,1) \cdot H - \overline{(0,1)} \cdot H',$$

$$L_1 = (0,1) \cdot L - \overline{(0,1)} \cdot L';$$

on aura

$$H_1 = fb \cdot \sin. \varpi + 'f \cdot b' \cdot \sin. ' \varpi,$$

$$L_1 = fb \cdot \cos. \varpi + 'f \cdot b' \cdot \cos. ' \varpi;$$

or on trouve

$$H_1 = 0,18748, \quad L_1 = - 0,31001.$$

De-là on formera les quatre équations

$$-0,008842 = b \cdot \sin. \varpi + 'b \cdot \sin. ' \varpi,$$

$$0,18748 = 17,3998 \cdot b \cdot \sin. \varpi + 2,9998 \cdot 'b \cdot \sin. ' \varpi,$$

$$-0,047400 = b \cdot \cos. \varpi + 'b \cdot \cos. ' \varpi,$$

$$-0,31001 = 17,3998 \cdot b \cdot \cos. \varpi + 2,9998 \cdot 'b \cdot \cos. ' \varpi;$$

ce qui donne

$$b \cdot \sin. \varpi = 0,014861, \quad b \cdot \cos. \varpi = -0,011654,$$

$$'b \cdot \sin. ' \varpi = -0,023703, \quad 'b \cdot \cos. ' \varpi = -0,035746.$$

Des deux valeurs de  $b \cdot \sin. \varpi$  & de  $b \cdot \cos. \varpi$ , je conclus  $\varpi = 128^d 6'$  &  $b = 0,018885$ ; ensuite des deux valeurs de  $'b \cdot \sin. ' \varpi$ , & de  $'b \cdot \cos. ' \varpi$ , je conclus  $' \varpi = 33^d 33'$ , &  $'b = -0,042891$ ; enfin les équations

$$fb = (0,1) \cdot b - \overline{(0,1)} \cdot 'b; \quad 'fb = (0,1) \cdot 'b - \overline{(0,1)} \cdot b;$$

donnent

$$b' = -0,047286, \quad 'b' = -0,035808.$$

Si l'on nomme présentement  $x$  le nombre entier ou fractionnaire d'années écoulées depuis l'origine du mouvement que je fixe au commencement de 1750; on aura

$$fu = 22'',550 \cdot x, \quad 'fu = 3'',888 \cdot x;$$

donc

$$p = 0,018885 \cdot \sin. [22'',550 \cdot x + 128^d 6']$$

$$-0,042891 \cdot \sin. [3'',888 \cdot x + 33^d 33'],$$

$$q = 0,018885 \cdot \cos. [22'',550 \cdot x + 128^d 6']$$

$$-0,042891 \cdot \cos. [3'',888 \cdot x + 33^d 33'],$$

$$p' = -0,047286 \cdot \sin. [22'',550 \cdot x + 128^d 6']$$

$$-0,035808 \cdot \sin. [3'',888 \cdot x + 33^d 33'],$$

$$q' = -0,047286 \cdot \cos. [22'',550 \cdot x + 128^d 6']$$

$$-0,035808 \cdot \cos. [3'',888 \cdot x + 33^d 33'];$$

$$\text{maintenant on a } \alpha^2 e^2 = p^2 + q^2 \text{ \& } \alpha e = \sqrt{(p^2 + q^2)};$$

d'où l'on conclura

$$\alpha e = \sqrt{[(0,018885)^2 + (0,042891)^2 - 2 \cdot (0,018885) \times (0,042891) \cdot \cos. (18'',662 \cdot x + 94^d 33')]};$$

on aura pareillement

$$ae' = \sqrt{[(0,047286)^2 + (0,035808)^2 + 2 \cdot (0,47286) \cdot (0,035808) \cdot \cos.(18'',662 \cdot x + 94^d 33')]};$$

partant la plus grande excentricité de Jupiter sera

$$= 0,018885 + 0,042891 = 0,061776;$$

& la plus petite sera  $= 0,024006$ ; de même la plus grande excentricité de Saturne sera  $0,083094$ , & la plus petite sera  $0,011478$ ; la période de cette variation est déterminée par l'équation  $18'',662 \cdot x = 180^d$ , ce qui donne  $x = 34723$ ; partant elle est de  $34723$  années.

Quant au mouvement des aphélies, on se rappellera que  $A$  exprime la longitude de la projection de l'aphélie de Jupiter, & que l'on a

$$\text{tang. } A = \frac{p}{q} = \frac{b \sin. (fu + \varpi) + 'b. \sin. ('fu + '\varpi)}{b \cos. (fu + \varpi) + 'b. \cos. ('fu + '\varpi)};$$

d'où l'on tirera à cause de  $'b > b$ ,

$$\begin{aligned} A = m \cdot 180^d + 'fu + '\varpi + \frac{b}{'b} \cdot \sin. [ (f - 'f)u + '\varpi - \varpi ] \\ - \frac{b^3}{2 \cdot 'b^2} \cdot \sin. [ 2(f - 'f)u - 2\varpi - 2'\varpi ] \\ + \frac{b^5}{3 \cdot 'b^3} \cdot \sin. [ 3(f - 'f)u + 3\varpi - 3'\varpi ] \\ - \&c. \end{aligned}$$

$m$ . étant un nombre entier quelconque. (*Voyez pour la démonstration de cette suite, l'excellente pièce de M. de la Grange, sur le mouvement des nœuds*); on aura donc

$$\begin{aligned} A = m \cdot 180^d + 33^d 33' - \frac{18885}{42891} \cdot \sin. [18'',662 \cdot x + 94^d 33'] \\ + 3'',888 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{18885}{42891}\right)^2 \cdot \sin. 2 [18'',662 \cdot x + 94^d 33'] \\ - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{18885}{42891}\right)^3 \cdot \sin. 3 [18'',662 \cdot x + 94^d 33'] \\ - \&c. \end{aligned}$$

Pour déterminer  $m$ , j'observe que l'on a, lorsque  $x = 0$ ,  
 $A =$

$A = 6^{\text{h}} 10^{\text{d}} 33' 46''$ ; d'où il est aisé de voir que  $m = 1$ ; partant,

$$A = 213^{\text{d}} 33' - \frac{18885}{42981} \cdot \sin. [18'', 662 \cdot x + 84^{\text{d}} 33'] \\ + 3'', 888 \cdot x - \&c.$$

On trouvera pareillement

$$A' = m \cdot 180^{\text{d}} + 128^{\text{d}} 6' - \frac{35808}{47286} \cdot \sin. [18'', 662 \cdot x + 94^{\text{d}} 33'] \\ + 22'', 550 \cdot x + \&c.$$

Or,  $x$  étant zéro, on a  $A' = 8^{\text{h}} 29^{\text{d}} 39' 58''$ ; on aura donc  $m = 1$ ; partant

$$A' = 308^{\text{d}} 6' + 22'', 550 \cdot x - \frac{35808}{47286} \cdot \sin. [18'', 662 \cdot x + 94^{\text{d}} 33'] - \&c.$$

De-là il suit que le moyen mouvement de l'aphélie de Jupiter est  $3'', 888 \cdot x$ , & que celui de Saturne est  $22'', 550 \cdot x$ .

On pourroit réduire en degrés, minutes & secondes, les coefficients de sinus des valeurs de  $A$  & de  $A'$ , & déterminer par ce moyen ces quantités; mais il paroît beaucoup plus simple de faire usage pour cela des équations,  $\text{tang. } A = \frac{p}{q}$ , &  $\text{tang. } A' = \frac{p'}{q'}$ ; ainsi, nous croyons pouvoir nous dispenser d'entrer dans aucun détail à ce sujet.

## XXII.

### *Du mouvement des Planètes dans un milieu résistant.*

Cette matière a déjà été savamment discutée par plusieurs Géomètres, mais ils ont tous supposé les variations produites par la résistance du milieu extrêmement petites; & aucun d'eux n'a recherché ce que deviendroient les orbites des Planètes après un temps quelconque extrêmement grand. Comme la méthode exposée au commencement de ce

Mémoire, donne une solution fort simple de ce Problème, je vais la présenter ici en peu de mots.

Je négligerai l'action des Planètes les unes sur les autres, & je considérerai le Soleil comme immobile, ou tel au moins que l'éther qui l'environne, se meuve avec lui; or il est démontré que cet éther, s'il existe, ne peut être qu'un fluide extrêmement rare, en sorte que la résistance est insensible dans l'intervalle d'un petit nombre de révolutions. Les Planètes décriroient conséquemment à chacune de leurs révolutions, à très-peu-près, une ellipse; après un temps quelconque, elles décriroient encore très-sensiblement une orbite elliptique. Si l'effet de la résistance de la matière éthérée est remarquable, ce ne peut donc être que parce qu'elle doit altérer à la longue les élémens de cette ellipse, c'est-à-dire, la moyenne distance de la Planète au Soleil, son moyen mouvement, son excentricité & la position de son aphélie. Je vais ici déterminer ces variations quelques grandes qu'elles soient.

Pour cela je supposerai, conformément à ce qui existe dans la Nature, 1.<sup>o</sup> que la force centrale est en raison réciproque du quarré de la distance; 2.<sup>o</sup> que la résistance de l'éther est proportionnelle à sa densité, multipliée par le quarré de la vitesse de la Planète. Cela posé, soit, comme précédemment,  $r$  le rayon vecteur de la Planète,  $\phi$  l'angle que forme ce rayon vecteur, avec une droite invariable prise sur le plan de l'orbite;  $S + P$  la somme des masses du Soleil & de la Planète; soit de plus,  $ds$  l'élément de la courbe;  $\partial t$  l'élément du temps;  $\frac{\partial s}{\partial t}$  sera la vitesse de la Planète. Représentons par  $\Gamma.(\frac{1}{r})$ ,

la loi de la densité de l'éther, aux différentes distances du Soleil;  $\delta\mu.\Gamma.(\frac{1}{r}).\frac{\partial s^2}{\partial t^2}$ , exprimera la résistance que la planète éprouve,  $\delta\mu$  étant ici un coefficient constant & extrêmement petit, dépendant du volume de la planète & de la densité de la matière éthérée, à une distance donnée. Si l'on décompose maintenant cette résistance en deux, l'une suivant le rayon vecteur, & l'autre perpendiculairement à ce rayon,



on aura, pour la première, —  $\delta\mu \cdot \Gamma\left(\frac{r}{r}\right) \cdot \frac{\partial s \partial r}{\partial t^2}$ ; & pour la seconde, —  $\delta\mu \cdot \Gamma\left(\frac{r}{r}\right) \cdot \frac{r \partial s \partial \phi}{\partial t^2}$ ; de cette manière, les quantités que nous avons nommées  $\psi$  &  $\psi^1$ , dans l'article VIII, deviendront, en faisant  $\frac{r}{r} = u$ ,

$$\psi = - (S + P) \cdot u^2 + \delta\mu \cdot \Gamma(u) \cdot \frac{\partial s \partial u}{u^2 \partial t^2},$$

$$\psi^1 = - \delta\mu \cdot \Gamma(u) \cdot \frac{\partial s \partial \phi}{u \partial t^2};$$

mais on peut, en négligeant les quantités de l'ordre  $\delta\mu^2$ , mettre dans les termes multipliés par  $\delta\mu$ , au lieu de  $\partial t$ ,  $\frac{r^2 \cdot \partial \phi}{h}$ ,

ou  $\frac{\partial \phi}{h u^2}$  (art. IX), & l'on aura

$$\psi = - (S + P) \cdot u^2 + \delta\mu \cdot \Gamma(u) \cdot h^2 \cdot u^2 \cdot \frac{\partial s \partial u}{\partial \phi},$$

$$\psi^1 = - \delta\mu \cdot \Gamma(u) \cdot h^2 \cdot u^3 \cdot \frac{\partial s}{\partial \phi}.$$

$$\text{l'équation } \frac{\partial \psi}{\partial \phi^2} + u + \frac{\left[ \frac{\psi}{u^2} + \frac{1}{u^3} \cdot \psi^1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi} \right]}{h^2 + 2 \int \psi^1 \cdot \frac{\partial \phi}{u^3}} = 0,$$

trouvée dans l'article VIII, deviendra donc, en négligeant les quantités de l'ordre  $\delta\mu^2$ ,

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial \phi^2} + u - \frac{S + P}{h^2} - \frac{2(S + P)}{h^2} \cdot \delta\mu \cdot \int \partial s \cdot \Gamma(u); (h),$$

$\partial \phi$  étant constant, &  $h$  étant, par l'article IX, égal à  $\sqrt{[(S + P) \cdot a(1 - \alpha^2 \cdot e^2)]}$ ,  $a$  étant le demi-grand axe, &  $\alpha e$ , l'excentricité de l'ellipse que la Planète décrirait dans l'hypothèse de  $\delta\mu = 0$ ; l'intégrale de l'équation (h) est, par le même article, lorsque  $\delta\mu = 0$ ,

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 - \alpha e \cdot \cos(\phi + \epsilon)}{a(1 - \alpha^2 \cdot e^2)};$$

mais si l'on suppose que  $\delta\mu$  n'est pas nul, il faut différentier

A a a ij

l'équation  $0 = \frac{\partial \partial u}{\partial \varphi^2} + u - \frac{S+P}{h^2}$ , par rapport à  $\delta$ ,

& y ajouter le terme  $-\frac{2.(S+P)}{h^2} . \delta \mu . \int \partial s . \Gamma . (u)$ ; ce qui donne,

$$0 = \frac{\partial \partial . \delta u}{\partial \varphi^2} + \delta u - 2 . \frac{S+P}{h^2} . \delta \mu . \int \partial s . \Gamma (u);$$

or

$$\partial s = \sqrt{r^2 \partial \varphi^2 + \partial r^2}, \text{ \& } \Gamma (u) = \Gamma . \left[ \frac{1 - \alpha e . \text{cof.} (\varphi + \epsilon)}{a(1 - \alpha^2 . e^2)} \right];$$

de-là on aura, en réduisant en séries,

$$-\frac{2.(S+P)}{h^2} . \delta \mu . \int \partial s . \Gamma (u) = -\delta \mu \times$$

$$[A\varphi + B . \text{fin.} (\varphi + \epsilon) + C . \text{fin.} 2 (\varphi + \epsilon) + \&c.];$$

cette série sera d'autant plus convergente que  $\alpha e$  sera plus petit; mais  $\alpha e$  étant toujours moindre que l'unité, elle convergera dans tous les cas, sur-tout après les intégrations; on aura donc

$$0 = \frac{\partial \partial . \delta u}{\partial \varphi^2} + \delta u - \delta \mu . [A\varphi + B . \text{fin.} (\varphi + \epsilon) \\ + C . \text{fin.} 2 (\varphi + \epsilon) + \&c.];$$

partant

$$\delta u = \delta \mu . [A\varphi - \frac{B}{2} . \varphi . \text{cof.} (\varphi + \epsilon) \\ - \frac{C}{3} . \text{fin.} 2 (\varphi + \epsilon) - \&c.];$$

&c

$$u = \frac{1}{a(1 - \alpha^2 . e^2)} + \delta \mu . A\varphi - \left[ \frac{\alpha e}{a(1 - \alpha^2 . e^2)} + \delta \mu . \frac{B\varphi}{2} \right] \times \\ \text{cof.} (\varphi + \epsilon) - \frac{\delta \mu . C}{3} . \text{fin.} 2 (\varphi + \epsilon) - \&c.$$

d'où il est aisé de conclure que l'aphélie de la Planète est immobile, mais que son grand axe & son excentricité sont

assujettis à des inégalités proportionnelles au temps, durant un grand nombre de révolutions.

Pour faire disparaître les arcs de cercle de l'expression de  $u$ , soit  $\delta\mu.\varphi = z$ , & l'on aura, suivant notre méthode, les deux équations

$$\partial. \frac{1}{a(1-\alpha^2 e^2)} = A.\partial z$$

$$\partial. \frac{\alpha e}{a(1-\alpha^2 e^2)} = \frac{B}{2}.\partial z$$

$A$  &  $B$  sont fonctions de  $a$ , & de  $\alpha e$ ; ainsi en intégrant les deux équations précédentes, on aura  $a$  &  $e$ , en fonction de  $z$ .

Je suppose que l'on veuille avoir ces quantités en fonction de  $t$ , on substituera dans  $z$ , au lieu de  $\varphi$ , la valeur,

$$nt - 2\alpha e.\sin.(nt + \theta) - \&c.$$

trouvée *article IX*; on pourra même négliger les quantités périodiques, & l'on aura  $\partial z = \delta\mu.n\partial t$ ; de plus, on a par le même article,  $n = \frac{\sqrt{(S+P)}}{a^{\frac{1}{2}}}$ ; soit donc

$\delta\mu.t.\sqrt{(S+P)} = x$ , & l'on aura

$$\partial. \left[ \frac{1}{a(1-\alpha^2 e^2)} \right]_{\partial x} = \frac{A}{a^{\frac{1}{2}}},$$

$$\partial. \left[ \frac{\alpha e}{a(1-\alpha^2 e^2)} \right]_{\partial x} = \frac{B}{2a^{\frac{1}{2}}},$$

toute la difficulté se réduit donc à déterminer  $A$  &  $B$ ; or, cela paroît très-difficile en général, ainsi nous nous bornerons au cas dans lequel l'excentricité est fort petite, & nous négligerons son carré & ses puissances supérieures; dans ce cas on aura

$$\int \partial s . \Gamma(u) = \int r \partial \phi . \Gamma(u); \text{ or, } \Gamma(u) = \Gamma. \left[ \frac{1 - \alpha e . \cos.(\phi + \epsilon)}{a} \right]$$

$$= \Gamma. \left( \frac{1}{a} \right) - \frac{\alpha e}{a} . \cos.(\phi + \epsilon) . \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right)$$

en exprimant  $\frac{\partial \Gamma(u)}{\partial u}$  par  $\Gamma'(u)$ ; donc

$$\int \partial s . \Gamma(u) = a . \Gamma. \left( \frac{1}{a} \right) . \phi + \sin.(\phi + \epsilon) \left\{ \begin{array}{l} \alpha e a . \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right) \\ - \alpha e . \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right) \end{array} \right.$$

donc

$$A = \frac{2.(S+P)}{h^2} a \Gamma. \left( \frac{1}{a} \right);$$

$$B = \frac{2.(S+P)}{h^2} \alpha e . [a \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right) - \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right)].$$

mais on a (article IX).  $\frac{S+P}{h^2} = \frac{1}{a}$ ; partant

$$A = 2 . \Gamma \left( \frac{1}{a} \right); B = \frac{2 \alpha e}{a} . [a \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right) - \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right)]$$

on aura donc les deux équations

$$\partial. \left( \frac{1}{a} \right) = \frac{2 . \Gamma \left( \frac{1}{a} \right)}{a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\partial. \left( \frac{\alpha e}{a} \right) = \frac{\alpha e}{a^{\frac{1}{2}}} . [a \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right) - \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right)]$$

partant

$$\frac{\partial a}{\partial x . \gamma a} = - 2 \Gamma. \left( \frac{1}{a} \right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = - \frac{e}{a^{\frac{1}{2}}} . [a . \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right) + \Gamma' \left( \frac{1}{a} \right)].$$

Puisque nous supposons  $e$  très-petit, il faut que la valeur de  $e$  soit telle, qu'elle reste toujours fort petite, sans quoi la solution précédente cesseroit d'avoir lieu après un certain temps; mais elle sera exacte dans tous les cas où l'excentricité va en

décroissant: or, je dis que ces cas sont ceux de la Nature; car s'il existe autour du Soleil, un fluide extrêmement rare, sa densité doit diminuer à mesure qu'on s'éloigne de cet astre; ainsi la fonction  $\Gamma(u)$  doit être telle qu'elle augmente avec  $u$ ; partant  $\partial u \Gamma'(u)$  est toujours du même signe que  $\partial u$ ; c'est-à-dire que  $\Gamma'(u)$  est une quantité positive; ainsi la valeur de  $\frac{\partial e}{\partial x}$  est négative.

Je suppose la densité de l'éther proportionnelle à  $\frac{1}{r^m}$ ; on aura  $\Gamma(u) = u^m$ ; donc  $\Gamma'(\frac{1}{a}) = \frac{m}{a^{m+1}}$ ; on aura ainsi  $\partial a \cdot a^{m-\frac{1}{2}} = -2 \partial x$ ; partant.....

$a = [f - (2m + 1) \cdot x]^{\frac{2}{2m+1}}$ ,  $f$  étant une constante arbitraire; de-là je conclus  $\frac{\partial e}{e} = -\frac{\partial x \cdot (m+1)}{f - (2m+1)x}$ ;

d'où je tire en intégrant,  $e = h \cdot [f - (2m + 1) \cdot x]^{\frac{m+1}{2m+1}}$ ;  $h$  étant une seconde arbitraire; on déterminera  $f$  &  $h$  au moyen des valeurs de  $a$  & de  $ae$  lorsque  $x = 0$ .

Pour déterminer le moyen mouvement de la Planète, depuis une époque donnée, j'observe qu'en nommant  $y$  ce moyen mouvement, on auroit

$$y = A + nt = A + \frac{\sqrt{(S+P)}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot t = A + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}} \cdot \delta \mu},$$

si  $a$  étoit constant;  $A$  est une constante arbitraire qui exprime la valeur de  $y$ , lorsque  $x = 0$ ; maintenant on aura, par la méthode de l'article VII, en faisant varier  $a$ ,

$$0 = \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\frac{3}{2} x \frac{\partial a}{\partial x}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot \delta \mu};$$

en intégrant,

$$0 = A - H + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}} \cdot d\mu} - \int \frac{dx}{a^{\frac{1}{2}} \cdot d\mu} = A - H + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}} \cdot d\mu} \\ + \frac{1}{(2m-2) \cdot d\mu} \cdot [f - (2m+1)x]^{\frac{2m-2}{2m+1}};$$

& si l'on substitue au lieu de  $A$  la valeur tirée de cette dernière équation, dans celle-ci  $y = A + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}} \cdot d\mu}$ ,

on aura

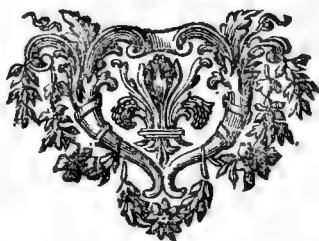
$$y = H - \frac{1}{(2m-2) \cdot d\mu} \cdot [f - (2m+1)x]^{\frac{2m-2}{2m+1}};$$

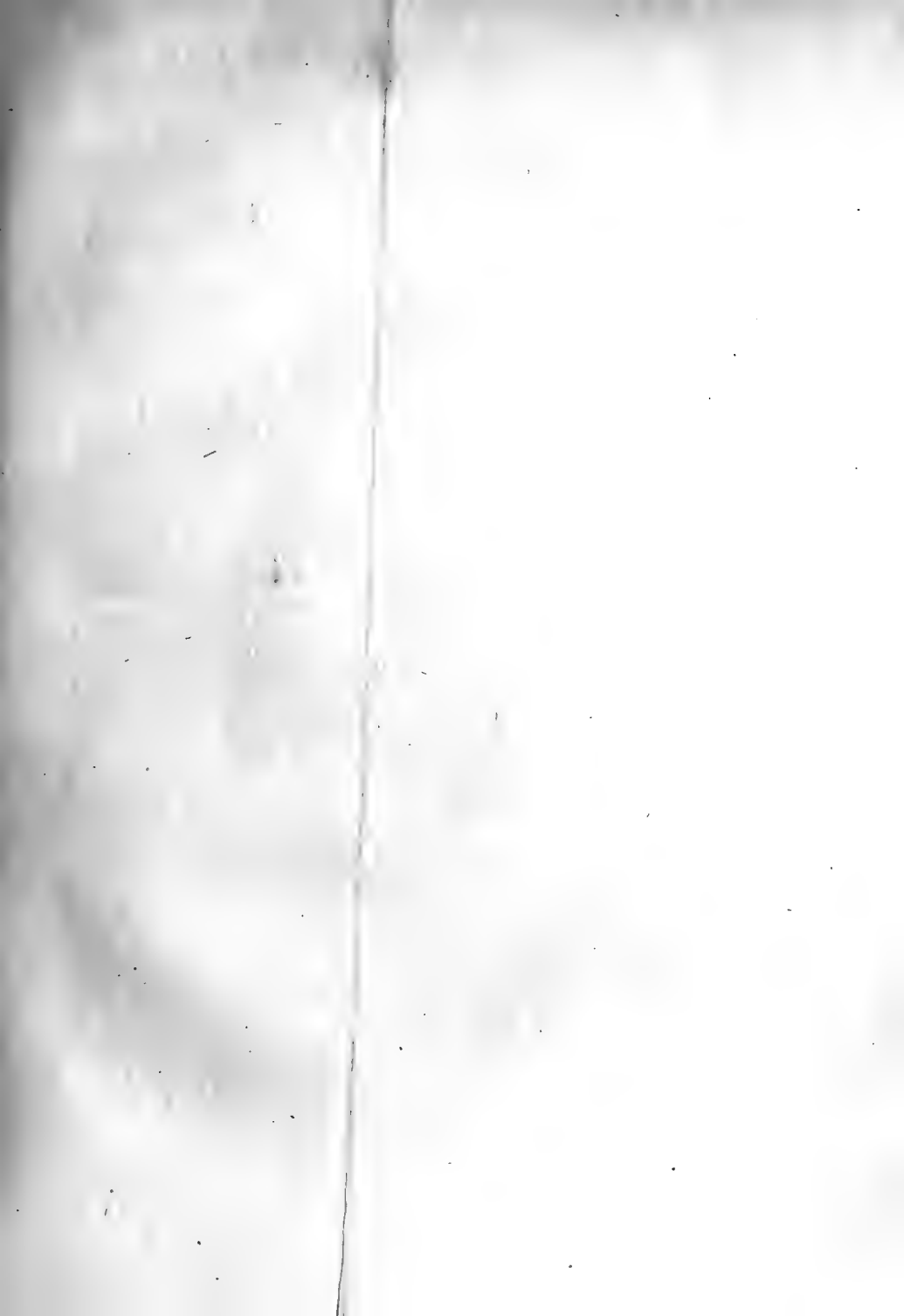
je suppose  $y = 0$ , lorsque  $x = 0$ , on aura

$$H = \frac{1}{(2m-2) \cdot d\mu} \cdot f^{\frac{2m-2}{2m+1}};$$

partant

$$y = \frac{f^{\frac{2m-2}{2m+1}}}{(2m-2) \cdot d\mu} \cdot [1 - (1 - \frac{(2m+1)}{f} \cdot x)]^{\frac{2m-2}{2m+1}}.$$









## M É M O I R E

*Dans lequel on propose une Méthode pour déterminer le nombre des racines réelles & des racines imaginaires des équations, & le signe des racines réelles, par la seule inspection des conditions entre les coëfficiens des différens termes de ces équations.*

Par M. DIONIS DU SÉJOUR.

(1.) LE but que je me propose dans ce Mémoire, est d'exposer une méthode au moyen de laquelle on puisse déterminer le nombre des racines réelles & des racines imaginaires des équations, par la seule inspection des conditions entre les coëfficiens des différens termes de ces équations. Plusieurs Géomètres du premier ordre, M.<sup>rs</sup> Euler, de Gua, Fontaine, la Grange, &c. se sont proposé le même objet : je saisis avec empressement l'occasion de rendre à leurs travaux tous les hommages qui leur sont dûs. J'ai cru cependant que la route que j'ai suivie, étoit assez différente de celle qu'ils ont embrassée, pour pouvoir offrir ces recherches à l'Académie; d'ailleurs on peut regarder cette théorie, comme une suite de mon Mémoire sur le *Cas irréductible*, lû en 1766, & imprimé dans nos recueils pour l'année 1768.

(2.) Je n'ose pas me flatter de pousser ce travail aussi loin que je le desirerois; je crains d'être arrêté par des longueurs de calculs, & par la multitude des combinaisons qu'il faudra embrasser, lorsque le degré de l'équation que l'on discutera, deviendra plus élevé; mais il m'a semblé que ce que l'on démontre pour les degrés inférieurs, sert à résoudre les questions analogues pour les degrés supérieurs. Ainsi donc, quoique mes recherches ne passent pas le cinquième degré, je serois tenté de croire que la méthode est générale, ou qu'il n'y en a point à espérer sur ce sujet. On doit regarder,

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

B b b

ce me semble, ce genre de travail, comme un enchaînement d'idées telles, que les connoissances sur les degrés inférieurs servent à discuter les degrés supérieurs.

(3.) Lorsqu'on a déterminé le nombre des racines réelles d'une équation, il reste à connoître le signe de ces racines. La méthode a de l'analogie avec celle par laquelle on détermine la nature des racines de l'équation. Cette question fera partie des recherches que je me propose d'examiner dans ce Mémoire.

*Principe sur lequel la Théorie est fondée.*

(4.) *Tout facteur imaginaire d'une équation peut être représenté par  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$ .*

Dans ce facteur,  $a$  étant réel,  $b$  est essentiellement ou une quantité réelle, ou une fonction imaginaire non divisible par  $\sqrt{-1}$ .

Si  $b$  étoit une fonction imaginaire divisible par  $\sqrt{-1}$ , le facteur de l'équation seroit réel.

Ce principe est trop connu des Géomètres, pour ne pas me dispenser de le démontrer.

*Corollaires du Principe précédent, & transformations qu'il faut faire subir en conséquence à la proposée.*

(5.) Si dans l'équation générale d'un degré quelconque, l'on substitue  $a + b\sqrt{-1}$ , à  $x$  & à ses puissances, que l'on partage le résultat, en deux équations, l'une formée de tous les termes multipliés par  $\sqrt{-1}$ , & l'autre formée de tous les termes qui ne sont pas multipliés par  $\sqrt{-1}$ , on aura deux équations qui équivaldront à la proposée, & que je nommerai désormais *Résultantes de la proposée*. Je désignerai l'une de ces équations par l'équation ( $\alpha$ ), & l'autre par l'équation ( $\beta$ ).

(6.) Si l'on donne maintenant une valeur arbitraire à  $a$ , positive ou négative, pourvu toutefois qu'elle soit réelle, que l'on substitue cette valeur arbitraire de  $a$ , dans une des deux résultantes, par exemple, dans la résultante ( $\beta$ ), on aura la valeur

de  $b$  corrélatrice à la valeur de  $a$  ; si l'on substitue ensuite ces deux valeurs dans l'autre résultante, l'on aura la relation entre les connues, propre à déterminer l'équation particulière du degré proposé, qui a pour facteur  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$  ;  $a$  &  $b$  étant les valeurs déterminées précédemment. Si  $b$  est réel, la racine de l'équation sera imaginaire. Si  $b$  est une fonction imaginaire divisible par  $\sqrt{-1}$ , le facteur  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$  sera réel. Si  $b$  est une fonction imaginaire non divisible par  $\sqrt{-1}$ , le facteur  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$  sera imaginaire. Comme les valeurs de  $b$ , ainsi que nous le ferons voir par la suite, sont toujours données par des expressions de  $b^2$  ;  $b$  est une fonction imaginaire non divisible par  $\sqrt{-1}$ , lorsque la valeur de  $b^2$  renferme elle-même une imaginaire ;  $b$  est une fonction imaginaire divisible par  $\sqrt{-1}$ , lorsque  $b^2$  ne renferme point d'imaginaire, mais est une quantité négative.

*Questions que l'on peut résoudre au moyen des transformations précédentes.*

(7.) On peut résoudre plusieurs questions au moyen des transformations précédentes. Étant donnée une valeur arbitraire de  $a$ , on peut demander la valeur corrélatrice de  $b$ , & la relation entre les connues, propre à déterminer l'équation particulière du degré proposé qui a pour facteur  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$  ;  $a$  étant la valeur arbitraire déterminée précédemment, ainsi qu'il a été énoncé dans le §. 6.

(8.) On peut aussi demander la relation entre les connues, propre à déterminer l'équation particulière du degré proposé, qui a pour racine une certaine valeur. Soit  $\delta$  cette racine ; on aura alors  $a + b\sqrt{-1} = \delta$ , d'où l'on tire  $a^2 - 2a\delta + \delta^2 + b^2 = 0$ . Cette nouvelle équation combinée avec les deux résultantes, résoudra le Problème. L'on déterminera de plus les valeurs particulières de  $a$  & de  $b$ , qui satisfont à la question.

(9.) On peut enfin, étant donnée une équation particulière,

B b b ij

demandeur les valeurs de  $a$  & de  $b$ , qui entrent dans le facteur  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$ , racine de la proposée:

(10.) Si l'on pouvoit résoudre ce dernier Problème, on auroit la solution de l'équation; mais il est aisé de démontrer que si, au moyen de l'une des deux résultantes ( $\alpha$ ) ou ( $\beta$ ), on élimine, par exemple, la quantité  $b$  dans l'autre résultante, on retombera dans une équation qui ne contiendra que la quantité  $a$  & des connues, mais qui aura toutes les difficultés du degré proposé. On ne feroit donc que substituer une difficulté à une autre difficulté du même genre, comme il étoit aisé de le prévoir. Quant à la méthode pour déterminer quelle doit être la relation entre les connues, pour que la proposée ait une certaine racine  $\delta$ , quoique le procédé du §. 8 résolve la question, il est beaucoup plus simple de substituer directement  $\delta$  à  $x$  dans la proposée.

(11.) Si les deux dernières questions paroissent absolument superflues, puisqu'elles n'apprennent que ce que l'on peut savoir par des méthodes plus simples; il n'en est pas de même de la première question. Pour en faire sentir l'utilité, supposons qu'au moyen d'une des deux résultantes ( $\alpha$ ) ou ( $\beta$ ), on puisse déterminer les suppositions particulières sur  $a$ , qui rendent les valeurs de  $b$  réelles, d'imaginaires qu'elles étoient auparavant, ou réciproquement; que l'on porte ces valeurs dans l'autre résultante, il est évident que l'on en conclura la relation entre les connues, qui a lieu lors de ces points de passages. Supposons de plus que l'on puisse démontrer que toutes les équations qui sont en-deçà ou au-delà de cette propriété, ont leurs racines réelles ou imaginaires, on aura par la seule inspection des connues, un symptôme pour déterminer si telle ou telle équation a ses racines réelles ou imaginaires, sans être obligé de résoudre cette équation; symptôme qu'il eut été peut-être difficile de découvrir autrement. Le développement de la méthode rendra plus sensibles ces raisonnemens qu'il nous suffit d'indiquer.

*Du degré où doit monter la quantité  $b$ , dans chacune des résultantes  $(\alpha)$  &  $(\beta)$ , au moyen de la transformation que l'on fait subir à l'équation proposée.*

(12.) Pour avoir l'idée du degré où doit monter la quantité  $b$ , dans chacune des résultantes  $(\alpha)$  &  $(\beta)$ , au moyen de la transformation que nous avons prescrit de faire subir à l'équation proposée; soit

$$x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} + \dots = 0;$$

une équation d'un degré quelconque. Dans cette équation, je substitue  $a + b\sqrt{-1}$ , à  $x$  & à ses puissances, & j'ai

$$\begin{aligned} x^m &= a^m + \frac{m \cdot a^{m-1} b \sqrt{-1}}{1} - \frac{m \cdot m-1 \cdot a^{m-2} b^2}{1 \cdot 2} \\ &\quad - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot a^{m-3} b^3 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &\quad + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot a^{m-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c... + b^m \sqrt{(-1)^m}. \\ x^{m-2} &= a^{m-2} + \frac{m-2 \cdot a^{m-3} b \sqrt{-1}}{1} - \frac{m-2 \cdot m-3 \cdot a^{m-4} b^2}{1 \cdot 2} \\ &\quad - \frac{m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot a^{m-5} b^3 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &\quad + \frac{m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot a^{m-6} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c... + b^{m-2} \sqrt{(-1)^{m-2}}. \\ x^{m-3} &= a^{m-3} + \frac{m-3 \cdot a^{m-4} b \sqrt{-1}}{1} - \frac{m-3 \cdot m-4 \cdot a^{m-5} b^2}{1 \cdot 2} \\ &\quad - \frac{m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot a^{m-6} b^3 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &\quad + \frac{m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot m-6 \cdot a^{m-7} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c... + b^{m-3} \sqrt{(-1)^{m-3}}, \\ x^{m-4} &= \&c. \end{aligned}$$

(13.) Maintenant ou  $m$  est un nombre pair, ou c'est un nombre impair. Si  $m$  est un nombre pair,  $\sqrt{(-1)^m}$  fera égal à  $\pm 1$ , ainsi que  $\sqrt{(-1)^{m-2}}$ ,  $\sqrt{(-1)^{m-4}}$ , &c. Dans le développement de  $x^m$ , la plus haute puissance de  $b$  qui puisse être multipliée par  $\sqrt{-1}$ , fera donc  $b^{m-1}$ . Par la même raison, dans le développement de  $x^{m-2}$ , la plus haute puis-

fance de  $b$  qui puisse être multipliée par  $\sqrt{-1}$ , sera  $b^{m-1}$ . Dans le développement de  $x^{m-3}$ , la plus haute puissance de  $b$  qui puisse être multipliée par  $\sqrt{-1}$ , sera pareillement  $b^{m-3}$ . Dans le développement de  $x^{m-4}$  & de  $x^{m-5}$ , la plus haute puissance de  $b$  qui puisse être multipliée par  $\sqrt{-1}$ , sera  $b^{m-5}$  & ainsi de suite pour les autres puissances de  $x$ . Et comme les termes multipliés par  $\sqrt{-1}$ , ne sont que de deux en deux, dans la résultante formée de tous les termes multipliés par  $\sqrt{-1}$ , les puissances de  $b$ , seront  $b^m$ ,  $b^{m-3}$ ,  $b^{m-5}$ ,  $b^{m-7}$ , &c. ou plutôt  $b^{m-2}$ ,  $b^{m-4}$ ,  $b^{m-6}$ , &c. puisque toute l'équation sera divisible par  $b$ . On voit donc que cette résultante que je désignerai sous le nom de *résultante* ( $\beta$ ), ne renfermera, par rapport à  $b$ , que les difficultés du degré  $\frac{m}{2} - 1$ . Quant à l'autre résultante que je désignerai sous le nom de *résultante* ( $\alpha$ ), comme les puissances de  $b$  qu'elle contiendra seront  $b^m$ ,  $b^{m-2}$ ,  $b^{m-4}$ ,  $b^{m-6}$ , elle aura les difficultés du degré  $\frac{m}{2}$ .

(14.) Si  $m$  est un nombre impair, les quantités  $\sqrt{(-1)^m}$ ,  $\sqrt{(-1)^{m-2}}$ ,  $\sqrt{(-1)^{m-4}}$ , &c. seront égales à  $\pm 1\sqrt{-1}$ , & les quantités  $\sqrt{(-1)^{m-3}}$ ,  $\sqrt{(-1)^{m-5}}$ , &c. seront égales à  $\pm 1$ . On trouvera donc par une analyse à peu-près semblable à celle du paragraphe précédent, que dans la résultante ( $\beta$ ), formée de tous les termes multipliés par  $\sqrt{-1}$ , les puissances de  $b$ , seront  $b^m$ ,  $b^{m-2}$ ,  $b^{m-4}$ , &c. ou plutôt  $b^{m-1}$ ,  $b^{m-3}$ ,  $b^{m-5}$ , &c. puisque toute l'équation sera divisible par  $b$ . Cette résultante ne renfermera donc par rapport à  $b$ , que les difficultés du degré  $\frac{m-1}{2}$ ; il en sera de même de la résultante ( $\alpha$ ).

(15.) On peut voir que les valeurs de  $b$ , qui entrent dans les résultantes ( $\alpha$ ) & ( $\beta$ ), sont les puissances paires de  $b$ , de sorte que la résolution de ces équations donne des valeurs de  $b^2$ . Soient  $\phi$ ,  $\phi 1$ ,  $\phi 2$ , &c. ces valeurs de  $b^2$ ; on aura  $b = \pm \sqrt{\phi}$ ,  $b = \pm \sqrt{\phi 1}$ ,  $b = \pm \sqrt{\phi 2}$ ;

ou, ce qui revient au même,  $b = \pm \frac{\sqrt{-\phi}}{\sqrt{-1}}$ ,  $b = \pm \frac{\sqrt{-\phi^2}}{\sqrt{-1}}$ ,  $b = \pm \frac{\sqrt{-\phi^2}}{\sqrt{-1}}$ . Par la supposition,  $x = a + b\sqrt{-1}$ ; donc  $x = a \pm \sqrt{-\phi}$ ,  $x = a \pm \sqrt{-\phi^2}$ ,  $x = a \pm \sqrt{-\phi^2}$ ; d'où l'on voit que  $x$  ne peut être réelle, qu'autant que  $-\phi$ ,  $-\phi^2$ ,  $-\phi^2$ , &c. sont des quantités positives, & que par conséquent  $b$ ,  $b$ ,  $b$ , sont des quantités imaginaires.

(16.) Quoique  $x$  ne puisse être réelle qu'à moins que  $b$  ne soit imaginaire, il ne s'ensuit pas pour cela que  $b$  étant imaginaire,  $x$  soit essentiellement réelle. Comme ce que je dirois ici en le séparant de l'exemple, pourroit n'être pas entendu, je ferai voir, lors de la discussion du quatrième degré, dans quel sens on doit entendre cette restriction.

*Application des principes précédens au troisième degré.*

(17.) Je ne m'arrêterai pas à appliquer les principes précédens au second degré, qui ne présente aucune difficulté; je passe tout de suite au troisième.

Soit  $x^3 + px + q = 0$ , l'équation générale du troisième degré. Dans cette équation, je substitue  $a + b\sqrt{-1}$  à  $x$  & à ses puissances; & j'ai à cause de  $x^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1}$ , & de  $x = a + b\sqrt{-1}$ ,

$$\left. \begin{array}{l} + a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} \\ - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} \\ + ap + bp\sqrt{-1} \\ + q \end{array} \right\} = 0.$$

Donc

$$(\alpha) a^3 - 3ab^2 + ap + q = 0;$$

$$(\beta) b^3 - 3a^2b - p = 0.$$

Ce sont les deux résultantes de la proposée.

(18.) Si dans la résultante ( $\alpha$ ) l'on élimine  $b^2$  au moyen de la valeur que l'on tire de la résultante ( $\beta$ ); on aura

$$(\gamma) \ 2a(4a^2 + p) - q = 0.$$

Je nommerai désormais cette équation, *la résolvante*, parce qu'en effet elle serviroit à résoudre la proposée, si elle-même étoit soluble. Je ferai voir dans la suite que, pour le troisième degré, cette résolvante renferme les mêmes difficultés que la proposée. On peut remarquer aussi, conformément au §. 14, que les deux résultantes ( $\alpha$ ) & ( $\beta$ ), ordonnées par rapport à  $b$ , ne renferment que les difficultés du degré

$$\frac{3-1}{2} = 1.$$

*De la condition qu'il doit y avoir entre les connues, pour que l'on puisse supposer  $a = 0$  dans le facteur  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$  de la proposée.*

(19.) Dans la résultante ( $\beta$ ), la plus petite valeur que l'on puisse donner à  $a$ , est de supposer  $a = 0$ ;  $b$  a pour valeur correspondante,  $b = \pm \sqrt{p}$ . Si l'on porte ces valeurs dans l'équation ( $\alpha$ ), on tire  $q = 0$ ; c'est la condition entre les connues qui répond à la supposition de  $a = 0$ . La supposition de  $a = 0$  & de  $b = \pm \sqrt{p}$  est donc correspondante à celle de  $q = 0$ . Mais puisque  $b = \pm \sqrt{p}$ ,  $b\sqrt{-1} = \pm \sqrt{-p}$ ; & comme d'ailleurs l'on a en général  $x = a \pm b\sqrt{-1}$ ;  $x \pm \sqrt{-p} = 0$ , est un des facteurs de l'équation; ce qui est conforme à ce que fait voir la seule inspection de la proposée. En effet, la supposition de  $q = 0$  réduit cette proposée à  $x^3 + px = 0$ ; d'où l'on tire  $x = 0$ , &  $x = \pm \sqrt{-p}$ , comme ci-dessus.

*De la limite des valeurs que l'on peut donner à  $a$ , pour que  $b$  soit une quantité réelle, & que par conséquent la proposée ait des racines imaginaires.*

(20.) Après avoir déterminé ce qui résulte de la supposition de  $a = 0$ , examinons la limite des valeurs que l'on peut



peut donner à  $a$ , pour que  $b$  soit une quantité réelle, & que par conséquent la proposée ait des racines imaginaires.

Je vois d'abord que de la résultante  $(\beta)$  (§. 17) l'on tire  $b = \pm \sqrt{3a^2 + p}$ . Donc, si  $p$  est positif, on peut donner à  $a$  toutes sortes de valeurs positives ou négatives, & la valeur de  $b$  que l'on tirera de l'équation  $(\beta)$  sera toujours réelle; & comme toutes les valeurs possibles de  $a$ , combinées avec les valeurs corrélatives de  $b$ , épuisent toutes les combinaisons possibles entre  $p$  &  $q$ ; on voit que si  $p$  est positif, la proposée aura toujours deux racines imaginaires, quelle que soit d'ailleurs la relation entre les constantes  $p$  &  $q$ ; c'est ce que l'on savoit déjà.

*De ce qui a lieu lorsque  $p$  est négatif.*

(21.) Lorsque  $p$  est négatif dans la proposée, la quantité  $b = \pm \sqrt{3a^2 + p}$  n'est pas essentiellement réelle, & par conséquent la proposée n'a pas essentiellement deux racines imaginaires. Cela dépend de la relation entre  $3a^2$  &  $p$ . Il est même aisé de voir qu'à l'instant où  $b$  passe de l'imaginaire au réel, ou réciproquement, on a  $3a^2 + p = 0$ , ou  $a = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$ . Tant que  $a$  est moindre que  $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$ , ou, ce qui revient au même, tant que  $3a^2 + p$  est une quantité négative,  $b$  est imaginaire, & l'équation a deux racines réelles; lorsque  $a$  surpasse  $\sqrt{\frac{-p}{3}}$ , & que par conséquent  $3a^2 + p$  est positif,  $b$  est réel, & l'équation a deux racines imaginaires. Lors du point de passage,  $b = 0$ .

(22.) Dans la résultante  $(\alpha)$  du §. 17, si l'on substitue 0 à  $b$ ,  $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$  à  $a$ , &  $\mp \frac{p}{3} \sqrt{\frac{-p}{3}}$  à  $a^3$ , elle deviendra

$$\pm \frac{2p \sqrt{\frac{-p}{3}}}{3} + q = 0; \text{ ou en élevant au carré}$$

pour ôter l'ambiguïté du signe,  $-4p^3 - 27q^2 = 0$ .

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

C c c

C'est la condition qui a lieu entre les constantes lorsque les valeurs de  $b$  tirées de la résultante  $(\beta)$  passent du réel à l'imaginaire, ou réciproquement, & par conséquent, lorsque deux des racines de la proposée passent de l'imaginaire au réel, ou réciproquement. On voit donc (ce que l'on savoit déjà d'ailleurs) que le passage des trois racines réelles de l'équation du troisième degré, à l'état des deux racines imaginaires, & d'une seule racine réelle, se fait par les équations dans lesquelles  $4p^3 + 27q^2 = 0$ . Et comme dans ce cas,  $b = 0$ , &  $a = \pm \sqrt[3]{-\frac{p}{3}}$ , on a alors  $x \mp \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} = 0$ , pour deux des facteurs de l'équation.

*Paragraphes dans lesquels on démontre que l'équation a ses trois racines réelles lorsque  $4p^3 + 27q^2$  est une quantité négative; que l'équation a au contraire une racine réelle & deux imaginaires, lorsque  $4p^3 + 27q^2$  est une quantité positive.*

(23.) Il ne suffit pas de déterminer quelle condition a lieu lors du passage des trois racines réelles de l'équation, à l'état d'une racine réelle & de deux racines imaginaires, si cette même condition ne peut rien apprendre sur la nature des racines dans les autres cas. Qu'importe en effet de savoir que lorsque  $4p^3 + 27q^2 = 0$ , deux racines passent de l'état réel à l'imaginaire, ou réciproquement, s'il est impossible de démontrer généralement que dans toutes les équations dans lesquelles, par exemple,  $4p^3 + 27q^2$  sera une quantité plus grande que zéro, c'est-à-dire, positive, deux des racines seront imaginaires; que dans les équations au contraire dans lesquelles  $4p^3 + 27q^2$  sera une quantité négative, les trois racines seront réelles. Examinons donc cette nouvelle question.

(24.) Puisque de la résultante  $(\beta)$  du §. 17, l'on tire  $b = \pm \sqrt[3]{3a^2 + p}$ , on voit que  $b$  ne peut être réel, & que par conséquent la proposée ne peut avoir de racines

imaginaires qu'autant que  $3a^2 + p$  surpasse zéro, & que par conséquent,

$$(1) \quad 3a^2 + p - y = 0;$$

$y$  étant d'ailleurs une quantité positive. De cette dernière équation l'on tire  $a^2 = \frac{y-p}{3}$ . Si dans la résultante (a) du §. 17, l'on substitue à  $b^2$  la valeur  $3a^2 + p$ , elle deviendra

$$(2) \quad 2a(4a^2 + p) - q = 0;$$

ou en élevant au carré,

$$(3) \quad 4a^2(4a^2 + p)^2 - q^2 = 0.$$

Mais  $4a^2 = \frac{4y-4p}{3}$ ;  $4a^2 + p = \frac{4y-p}{3}$ ; donc  $\frac{(y-p)}{3} \times \frac{(4y-p)^2}{3^2} - \frac{q^2}{4} = 0$ ; ou, ce qui revient au même,

$$(4) \quad 4y(4y - 3p)^2 - 4p^3 - 27q^2 = 0.$$

(25.) De cette dernière équation, l'on tire généralement  $4p^3 + 27q^2 = 4y(4y - 3p)^2$ . Soit que  $y$  soit une quantité positive ou négative,  $(4y - 3p)^2$  est une quantité essentiellement positive; le signe de la quantité  $4p^3 + 27q^2$  dépend donc du signe de  $y$ ; mais (§. 24) la proposée ne peut avoir de racines imaginaires qu'autant que  $y$  est positif; donc, la proposée ne peut avoir de racines imaginaires que lorsque  $4p^3 + 27q^2$  est une quantité positive.

(26.) Si l'on suppose  $y$  négative,  $(4y - 3p)^2$  n'en sera pas moins une quantité positive; mais son multiplicateur  $y$  sera négatif;  $4y(4y - 3p)^2$  sera donc une quantité négative; mais (§. 24) la proposée a toutes ses racines réelles lorsque  $y$  est négatif; donc, la proposée a ses trois racines réelles, lorsque  $4p^3 + 27q^2$  est une quantité négative. La condition de  $4p^3 + 27q^2$ , positif ou négatif, est donc un véritable symptôme propre à déterminer si les racines de l'équation sont toutes réelles, ou si l'équation a une racine réelle & deux imaginaires.

*Remarque singulière sur la condition de  $4p^3 + 27q^2 = 0$ .*

(27.) L'équation (4) du §. 24 donne lieu à une remarque assez singulière sur la condition de  $4p^3 + 27q^2 = 0$ . On favoit bien que la condition de  $4p^3 + 27q^2 = 0$  a lieu lorsque deux des racines du troisième degré passent du réel à l'imaginaire; mais on ignoroit, ce me semble, que cette condition a lieu dans une autre circonstance. En effet, puisque l'équation (4) du §. 24 représente toutes les relations possibles entre  $p$ ,  $q$  &  $y$ , on peut demander quelle doit être la valeur de  $y$  pour que  $4p^3 + 27q^2 = 0$ . On a pour condition  $4y(4y - 3p)^2 = 0$ ; d'où l'on tire  $y = 0$ , &  $4y - 3p = 0$ . La condition de  $y = 0$  appartient bien au passage de l'état réel de deux des racines de l'équation à l'imaginaire. En effet, dans l'équation (1) du §. 24, si l'on suppose  $y = 0$ , on aura  $a = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$ , valeur qui, (§. 21) convient au point de passage des racines réelles aux racines imaginaires; mais certainement, il n'en est pas de même de la valeur de  $y = \frac{3p}{4}$ . En effet, si dans l'équation (1) du §. 24 l'on substitue  $\frac{3p}{4}$  à  $y$ , on aura  $3a^2 + \frac{p}{4} = 0$ ; d'où l'on tire  $a = \pm \sqrt{\frac{-p}{12}}$ . Cette valeur de  $a$  substituée dans l'équation (β) du §. 17, la réduit à  $b = \pm \frac{\sqrt{3p}}{2}$ , valeur imaginaire lorsque  $p$  est négatif, ainsi qu'on le suppose dans la question présente, & qui ne peut convenir au passage de l'état réel des valeurs de  $b$ , à l'état imaginaire, & par conséquent au passage des racines imaginaires de l'équation aux racines réelles.

(28.) Voici, ce me semble, l'explication très-naturelle de ce paradoxe. Soient  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  les trois racines de l'équation du troisième degré, que j'ai supposées représentées généralement par  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$ . La résultante (β) du §. 17, d'où l'on déduit la valeur

de  $b$  correspondante à la valeur de  $a$ , est du second degré. Elle ne détermine donc que deux des trois racines du troisième degré; ce sont celles qui, lorsqu'elles sont égales, font passer deux des racines, de l'état réel à l'imaginaire. Soient  $\lambda$ ,  $\lambda'$ , ces deux racines, &  $\lambda''$ , la troisième racine. Les deux racines  $\lambda$ ,  $\lambda'$ , après avoir passé de l'état imaginaire à l'état réel par la supposition de  $\lambda = \lambda'$ , sont ensuite réelles & inégales; mais dans l'intervalle où les racines  $\lambda$ ,  $\lambda'$ , sont réelles & inégales, il y a une circonstance particulière, lors de laquelle l'une des deux racines  $\lambda$  ou  $\lambda'$  est égale à l'autre racine  $\lambda''$  qui n'est point donnée par la résultante ( $\beta$ ). L'équation du troisième degré a bien alors deux racines égales, & la condition  $4p^3 + 27q^2 = 0$ , a lieu: mais comme les deux racines  $\lambda$ ,  $\lambda'$ , ne sont point égales entr'elles, & que c'est au contraire une des deux racines  $\lambda$  ou  $\lambda'$  qui est égale à l'autre racine  $\lambda''$ , les racines ne passent pas du réel à l'imaginaire. Il n'y a point d'égalité, si j'ose m'exprimer ainsi, entre deux racines de la même paire, ce qui seroit nécessaire pour que de l'égalité des racines on en pût conclure le passage du réel à l'imaginaire; ce sont deux racines de paires différentes, dont l'égalité n'influe en rien sur le passage du réel à l'imaginaire. Je crois cette explication fondée, & l'analyse me paroît conduire à cette conclusion. Lors donc que l'on a une équation du troisième degré dans laquelle  $4p^3 + 27q^2 = 0$ , & dont deux des racines sont égales, je serois tenté de penser que l'on doit, au moins *per mentem*, regarder cette équation comme pouvant appartenir à deux cas différens; le premier (& c'est celui qu'on a toujours considéré jusqu'ici) est de la regarder comme l'équation de passage des racines réelles aux imaginaires; le second est de la regarder comme un cas singulier des équations, dont toutes les racines sont réelles, & dont deux sont égales, sans être cependant équation de passage des racines réelles aux imaginaires. Les constructions géométriques que nous emploierons dans la suite de ce Mémoire, nous conduiront aux mêmes conséquences.

*Des Valeurs que l'on peut donner à y dans l'Équation*

$$3a^2 + p - y = 0 \text{ du §. 24.}$$

(29.) L'équation (1) du §. 24 fait voir que, lorsque  $p$  est négatif, l'on peut donner à  $y$  toutes sortes de valeurs positives. En effet, puisque  $a = \pm \sqrt{\frac{-p+y}{3}}$ , si  $p$  est négatif, quelque valeur positive que l'on suppose à  $y$ , on aura pour  $a$  une valeur réelle correspondante. On voit également que l'on ne peut pas donner à  $y$  une valeur négative plus grande que  $p$ ; car alors  $a$  seroit imaginaire, ce qui seroit contraire aux suppositions fondamentales de ce Mémoire. La valeur de  $y = p$ , a pour valeur correspondante de  $a$ ,  $a = 0$ .

(30.) Lorsque  $p$  est positif, l'on ne peut pas supposer à  $y$  une valeur négative, ou même une valeur positive, plus petite que  $p$ ; autrement  $a$  seroit imaginaire, ce qui est encore contraire aux suppositions fondamentales de ce Mémoire.

(31.) Dans l'équation (4) du §. 24, si l'on suppose  $4p^3 + 27q^2 = z$ , elle deviendra

$$(1) \quad 4y(4y - 3p)^2 - z = 0.$$

Cette équation exprimera, pour chaque cas particulier, la relation entre les racines de la proposée, & la valeur correspondante de  $4p^3 + 27q^2$  dans la proposée. En effet, cette équation donne la relation entre  $z$  ou  $4p^3 + 27q^2$ , &  $y$ ; l'on a d'ailleurs (§. 17 & 24) la relation entre  $a$  &  $y$ , entre  $a$  &  $b$ ; l'on a donc la relation entre  $4p^3 + 27q^2$  & les racines de la proposée.

(32.) Il est aisé de voir, ainsi que je l'ai dit (§. 18), que la résolvante ( $\gamma$ ) relativement à la solution, est sujette aux mêmes difficultés que la proposée; c'est-à-dire qu'elle est irréductible dans les mêmes cas que la proposée, quoiqu'au premier coup-d'œil elle ne paroisse pas avoir précisément la même forme. En effet, si l'on développe cette équation, elle

devient  $a^3 + \frac{ap}{4} - \frac{q}{8} = 0$ , équation qui paroît au premier coup d'œil différente de la proposée. Mais on voit bientôt que la condition de l'irréductibilité est la même pour les deux cas, puisque  $4 \frac{p^3}{4^3} + 27 \frac{q^3}{8^3}$  a lieu dans les mêmes circonstances que  $4p^3 + 27q^3$ .

(33.) J'ai supposé que l'équation du troisième degré étoit représentée par  $x^3 + px + q = 0$ , c'est-à-dire que j'ai supposé le second terme évanoui; cette supposition n'étoit pas indispensable, & l'on auroit pu démontrer sur l'équation complète, les propriétés analogues à celles que l'on vient de développer. Mais comme toute équation complète d'un degré quelconque, se ramène facilement à une équation sans second terme, j'ai cru préférable, pour éviter la complication des calculs & me conformer d'ailleurs à l'usage, de supposer l'équation débarrassée de son second terme.

*Discussion des équations dont on a fait usage, considérées comme lieux géométriques.*

(34.) Quoique j'aie épuisé, ce me semble, ce que l'on peut tirer de la méthode, relativement à la nature des racines des équations du troisième degré, j'ai pensé qu'un examen sommaire des équations dont j'ai fait usage, considérées comme lieux géométriques, pourroit encore jeter quelque jour sur cette matière.

*Du lieu géométrique représenté par la résultante ( $\beta$ ) du §. 17.*

(35.) Soit l'équation du troisième degré représentée généralement par  $x^3 + px + q = 0$ ; & supposons que l'on veuille développer le lieu géométrique de la résultante ( $\beta$ ) du (§. 17), par rapport aux lignes des coordonnées  $P, O, P; M, K, O, K, M$ ; que le point  $O$  soit l'origine des coordonnées  $a, b$ ; que de plus les quantités  $a$  soient prises sur la ligne  $OP$ , & les quantités  $b$  sur la ligne  $M, K, O, K, M$ . Il est évident que dans la supposition de  $p$  positif, le lieu

Fig. 1.

Fig. 1. géométrique de la résultante  $(\beta)$  sera une hyperbole dont le point  $O$  sera le centre ;  $OK$  sera le demi-grand axe qui aura pour expression  $\pm \sqrt{p}$ . Les asymptotes de cette hyperbole seront déterminées par l'équation  $a : b :: 1 : \pm \sqrt{3}$  ;  $a$  &  $b$  étant les coordonnées à ces asymptotes.

Et comme quelque valeur que l'on suppose à l'abscisse , on a toujours deux ordonnées réelles correspondantes ; on voit que dans ce cas l'équation du troisième degré a toujours deux racines imaginaires.

Fig. 2. (36.) Si  $p$  est négatif, le lieu géométrique de la résultante  $(\beta)$  sera également une hyperbole, dont le point  $O$  sera le centre ; mais alors le demi-grand axe  $OK$ , sera pris sur la ligne des abscisses , & il aura pour expression  $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$ .

Les asymptotes de cette nouvelle hyperbole seront déterminées comme ci-dessus , par l'équation  $a : b :: 1 : \pm \sqrt{3}$  ;  $a$  &  $b$  étant les coordonnées à ces asymptotes. Comme dans ce cas l'abscisse ne commence à avoir des ordonnées réelles correspondantes , que lorsqu'elle surpasse  $OK$ , on voit que lorsque  $p$  est négatif, l'équation du troisième degré peut avoir toutes ses racines réelles. Ces racines répondent à la partie  $OK$ ,  $OK$ , dans laquelle les abscisses ont leurs ordonnées correspondantes imaginaires.

(37.) Dans le passage de  $p$  positif à  $p$  négatif, c'est-à-dire , dans le cas de  $p = 0$ , la courbe qui représente la résultante  $(\beta)$  se confond avec les asymptotes.

*Du lieu géométrique représenté par l'équation  $3a^2 + p - y = 0$ .*

(38.) Après avoir discuté le lieu géométrique de la résultante  $(\beta)$  ; voyons ce qui a lieu pour l'équation (1) du §. 24.

Fig. 3. Si l'on prend les mêmes lignes des coordonnées, que dans les paragraphes précédens ; que le point  $O$  soit l'origine de ces coordonnées ; que la droite  $OP$  soit la ligne des abscisses  $x$ , & la droite  $OM$  la ligne des ordonnées  $y$ . Il est évident que dans



dans la supposition de  $p$  positif, le lieu géométrique de l'équation dont il s'agit est une parabole dont le sommet  $K$  est Fig. 3. situé sur la ligne des ordonnées, à une distance  $p$  de l'origine, du côté des ordonnées positives. Cette courbe est située entièrement du côté des ordonnées positives; & la plus petite valeur que puisse avoir  $y$ , est  $y = p$ .

(39.) Si  $p$  est négatif, le lieu géométrique de l'équation dont il s'agit est une parabole, dont le sommet  $K$  est situé sur Fig. 4. la ligne des ordonnées, à une distance  $p$  de l'origine  $O$  des coordonnées, du côté des ordonnées négatives. Cette parabole coupe la ligne des abscisses en deux points  $F, f$ , à des distances  $OF, Of$  égales  $\pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$ , de part & d'autre de l'origine des coordonnées. La plus grande valeur négative que puisse avoir  $y$ , est  $y = p$ .

(40.) Lorsque  $p = 0$ , le lieu géométrique de l'équation Fig. 5. dont il s'agit, est une parabole, dont le sommet est situé à l'origine  $O$  des coordonnées;  $y$  ne peut avoir de valeurs négatives; & la plus petite valeur positive est  $y = 0$ .

(41.) Ces dernières considérations conduisent aux mêmes conclusions sur la nature des racines de l'équation générale du troisième degré, que celles des §. 35, 36 & 37. En effet puisque  $3a^2 + p - y = 0$ , si dans la résultante ( $\beta$ ) du §. 17, l'on substitue à  $3a^2 + p$ , sa valeur  $y$ , on aura  $b = \pm \sqrt{y}$ . L'on voit donc que  $b$  ne peut être réel, & que par conséquent l'équation du troisième degré ne peut avoir des racines imaginaires, que lorsque  $y$  est positif. Dans le cas de  $p$  positif, l'on a vu (§. 38) que la parabole est entièrement située du côté des ordonnées positives, & que, quelle que soit la valeur de  $a$ , on a une valeur positive correspondante de  $y$ ; aussi lorsque  $p$  est positif, l'équation a-t-elle essentiellement deux racines imaginaires. Lorsque  $p$  est négatif, la parabole (§. 39) s'étend du côté des ordonnées positives & du côté des ordonnées négatives. La partie de la courbe qui s'étend du côté des ordonnées négatives, répond

aux abscisses plus petites que  $\pm \sqrt[3]{\frac{-p}{3}}$ ; la partie de la courbe qui s'étend du côté des ordonnées positives, répond aux abscisses plus grandes que  $\pm \sqrt[3]{\frac{-p}{3}}$ . Aussi lorsque  $p$  est négatif, l'équation du troisième degré peut-elle avoir toutes ses racines réelles; ou une racine réelle & deux imaginaires.

*Du lieu géométrique représenté par l'Équation*

$$4y(4y - 3p)^2 - z = 0.$$

(42.) Si l'on prend pour lignes des coordonnées, les droites  $POP$ ,  $MOM$ ; que le point  $O$  soit l'origine des coordonnées; la droite  $OP$ , la ligne des abscisses  $y$ ; la droite  $OM$ , la ligne des ordonnées  $z$ : il est évident que, dans la supposition de  $p$  positif, le lieu géométrique de l'équation dont il s'agit, est une espèce de parabole cubique qui a des branches infinies paraboliques dans la direction de la ligne des ordonnées. La ligne des abscisses rencontre la courbe en trois points; savoir à l'origine  $O$ , & deux fois à une distance  $OK = \frac{3p}{4}$ . La ligne  $MOM$  des ordonnées ne rencontre la courbe qu'à l'origine  $O$ .

Fig. 7. (43.) Si  $p$  est négatif, les points  $K$ ,  $F$ , changent de place. Dans la fig. 6,  $K$  &  $F$  étoient à la droite du point  $O$ ; dans la fig. 7,  $K$  &  $F$  sont à la gauche de  $O$ . La ligne des abscisses rencontre également la courbe en trois points; savoir à l'origine  $O$ , & deux fois à une distance  $OK = \frac{3p}{4}$ . La ligne  $MOM$  des ordonnées ne rencontre la courbe qu'à l'origine  $O$ .

Fig. 8. (44.) Lorsque  $p = 0$ , l'équation est à la première parabole cubique. Voyons ce qui résulte de ces recherches.

(45.) Puisque (§. 31)  $z = 4p^3 + 27q^2$ ; dans les courbes des paragraphes précédens, la partie située du côté des ordonnées positives, indique que  $4p^3 + 27q^2$  est une

quantité positive; & la partie située du côté des ordonnées négatives, indique que  $4p^3 + 27q^2$  est une quantité négative.

(46.) Cette remarque peut faire naître une difficulté. En effet, si l'on suppose, par exemple,  $p$  positif, on voit (fig. 6) que la courbe s'étend indistinctement du côté des  $z$  positifs & du côté des  $z$  négatifs. On sait cependant que dans l'équation du troisième degré,  $4p^3 + 27q^2$  est essentiellement une quantité positive lorsque  $p$  est positif.

Il est facile de résoudre cette difficulté; en effet, toute la courbe n'appartient point au Problème des équations. Les seules valeurs de  $y$ , dont on puisse faire usage, sont celles déterminées par les §. 38, 39 & 40. Or on a vu (§. 38) que, dans le cas de  $p$  positif,  $y$  ne peut avoir de valeur négative, & que même la plus petite valeur positive qu'il puisse avoir, est  $y = p$ ; si donc l'on suppose  $OF = p$ , & que l'on mène l'ordonnée correspondante  $FG$ , la partie  $Gg$  de la courbe sera la seule qui appartienne au Problème des équations. On doit faire des remarques analogues pour le cas de  $p$  négatif & de  $p = 0$ . J'ai eu Fig. 6, 7, 8, soin, dans chaque cas, de distinguer par des points, les parties des courbes qui n'appartiennent point au Problème des équations.

(47.) On peut remarquer maintenant la cohérence de toutes les idées.

Lorsque  $p$  est positif, la courbe s'étend du côté des ordonnées positives & négatives; mais la portion qui s'étend du côté des ordonnées négatives, & qui seroit en contradiction avec ce que l'on sait d'ailleurs, puisqu'elle paroît indiquer que  $4p^3 + 27q^2$  est une quantité négative, n'appartient point au Problème des équations. En effet, toute cette portion de la courbe est correspondante à des valeurs négatives de  $y$ , valeurs qui ne peuvent avoir lieu pour l'équation du troisième degré, lorsque  $p$  est positif.

(48.) Lorsque  $p$  est négatif, la partie de la courbe qui

Fig. 7. appartient au Problème, s'étend du côté des ordonnées positives & négatives: aussi dans ce cas la quantité  $4p^3 + 27q^2$  peut-elle être positive ou négative. Observons que, dans cette dernière supposition, la courbe coupe la ligne des abscisses au point  $O$ ; qu'elle s'en éloigne du côté des abscisses négatives, puis s'en rapproche, & la vient toucher au point  $K$  sans la couper, à une distance  $OK = \frac{3p}{4}$  de l'origine. Nous avons fait remarquer ce cas singulier (§. 27): c'est celui où  $4p^3 + 27q^2 = 0$ , sans que les racines de l'équation passent du réel à l'imaginaire.

(49.) Si l'on différencie l'équation  $4y(4y - 3p)^2 - z = 0$ , pour déterminer à quelle valeur de  $y$  répond le *maximum* de  $z$ , on trouvera pour condition du Problème,  $y^2 - py + \frac{3p^2}{16} = 0$ ; d'où l'on tire  $y = \frac{3}{4}p$ ;  $y = \frac{p}{4}$ . La valeur de  $y = \frac{3p}{4}$  répond au point  $K$ ; quant à la valeur de  $y = \frac{p}{4}$ , elle fait voir que la plus grande valeur que  $z$  puisse avoir dans l'intervalle des points  $O$  &  $K$ , répond à l'abscisse  $OR = \frac{p}{4}$ . Si l'on substitue à  $y$ , la valeur  $\frac{p}{4}$  dans l'équation  $4y(4y - 3p)^2 - z = 0$ , on aura  $z = 4p^3$ . Mais en général  $z = 4p^3 + 27q^2$ ; donc dans ce cas particulier  $q = 0$ ; d'où l'on voit, ce qui est évident, que  $p$  étant négatif & constant, la plus grande valeur négative que puisse avoir  $4p^3 + 27q^2$ , est lorsque  $q = 0$ .

(50.) On peut remarquer aussi que, si l'on considère la totalité des points de la courbe représentée par l'équation  $4y(4y - 3p)^2 - z = 0$ , la partie qui satisfait au Problème dans le cas de  $p$  positif, est le complément de la partie qui satisfait au Problème dans le cas de  $p$  négatif.

*Application des principes précédens au quatrième degré.*

(51.) Soit  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ , l'équation générale du quatrième degré. Dans cette équation je substitue  $a + b\sqrt{-1}$ , à  $x$  & à ses puissances; & j'ai, à cause de

$$x^4 = a^4 + 4a^3b\sqrt{-1} - 6a^2b^2 - 4ab^3\sqrt{-1} + b^4,$$

$$x^2 = a^2 + 2ab\sqrt{-1} - b^2,$$

$$x = a + b\sqrt{-1},$$

$a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + a^2p - b^2p + aq + r$   
 $+ (4a^3b - 4ab^3 + 2abp + bq)\sqrt{-1} = 0;$   
 d'où l'on tire

$$(\alpha) \quad a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + a^2p - b^2p + aq + r = 0;$$

$$(\beta) \quad 4a^3 - 4ab^2 + 2ap + q = 0.$$

Ce sont les deux résultantes de la proposée.

(52.) Si l'on multiplie la résultante  $(\beta)$  par  $a$ , & que l'on soustraie cette nouvelle équation de la résultante  $(\alpha)$ ; on aura une nouvelle résultante  $(\alpha 1)$ ;

$$(\alpha 1) \quad b^4 - 2a^2b^2 - pb^2 - 3a^4 - a^2p + r = 0.$$

Comme cette forme nous a paru plus commode que celle de l'équation  $(\alpha)$ , nous combinerons cette nouvelle résultante  $(\alpha 1)$  avec la résultante  $(\beta)$ .

(53.) Si dans la résultante  $(\alpha 1)$  l'on élimine  $b^4$  &  $b^2$  par le moyen de la résultante  $(\beta)$ , on aura la résolvante

$$(\gamma) \quad 4a^2[(4a^2 + p)^2 - 4r] - q^2 = 0.$$

(54.) On peut remarquer, conformément au §. 13, que la résultante  $(\alpha)$  ordonnée par rapport à  $b^2$ , renferme les difficultés du degré  $\frac{4}{2} = 2$ ; & que la résultante  $(\beta)$  ne renferme que les difficultés du degré  $\frac{4}{2} - 1 = 1$ .

(55.) De l'équation  $(\alpha 1)$  du §. 52, l'on tire

$$b^2 = \frac{2a^2 + p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2},$$

$$b^2 = \frac{2a^2 + p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}.$$

$$b = \pm \sqrt{\left( \frac{2a^2 + p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2} \right)},$$

$$b = \pm \sqrt{\left( \frac{2a^2 + p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2} \right)};$$

d'où l'on voit que dans la résultante (α 1) on a autant de valeurs de  $b$  qui peuvent être réelles ou imaginaires, que la proposée a de racines qui peuvent être imaginaires ou réelles. Examinons quelles lumières on peut tirer de ces valeurs.

*De la condition qu'il doit y avoir entre les connues, pour que l'on puisse supposer  $a = 0$ , dans le facteur  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$  de la proposée.*

(56.) Dans la résultante (α 1) la plus petite valeur que l'on puisse donner à  $a$ , est de supposer  $a = 0$ . Si l'on porte cette valeur dans l'équation (γ) du §. 53, on a pour condition, entre les connues,  $q = 0$ . Cette même supposition donne pour valeurs de  $b$  (§. 55.)

$$b^2 = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}$$

$$b^2 = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2}$$

$$b = \pm \sqrt{\left( \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2} \right)};$$

$$b = \pm \sqrt{\left( \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2} \right)};$$

$$b\sqrt{-1} = \pm \sqrt{\left( \frac{-p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2} \right)};$$

$$b\sqrt{-1} = \pm \sqrt{\left( \frac{-p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2} \right)}.$$

Et comme en général  $x = a + b\sqrt{-1}$ , on a, dans ce cas particulier, pour racines de l'équation,

$$x = \pm \sqrt{\left( \frac{-p - \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2} \right)},$$

$$x = \pm \sqrt{\left( \frac{-p + \sqrt{(p^2 - 4r)}}{2} \right)}.$$

Cette solution est conforme à ce que l'on fait d'ailleurs;

car, puisque par l'hypothèse  $q = 0$ , la proposée se réduit à  $x^4 + px^2 + r = 0$ ; qui résolue par les méthodes ordinaires du second degré, donne les mêmes valeurs que ci-dessus.

(57.) Dans les expressions de  $b$  du §. précédent, où  $p$  &  $r$  sont à la fois positifs, où  $p$  &  $r$  sont à la fois négatifs, où  $p$  est positif &  $r$  négative, où  $p$  est négatif &  $r$  est positive. Ces différentes combinaisons donnent lieu aux remarques suivantes.

Si  $p$  &  $r$  sont positifs; alors l'inspection des valeurs de  $b$  trouvées ci-dessus, fait voir que si  $p^2$  surpasse  $4r$ , toutes les valeurs de  $b$  sont réelles; aussi, dans ce cas, la proposée n'a-t-elle que des racines imaginaires. Si  $p^2$  est moindre que  $4r$ , toutes les valeurs de  $b$  sont imaginaires; mais comme les valeurs de  $b$  sont imaginaires, non par la raison que les valeurs de  $b^2$  sont négatives, mais parce que les valeurs de  $b^2$  renferment elles-mêmes une imaginaire, les racines de l'équation sont imaginaires.

Si  $p$  est positif &  $r$  négative, deux des valeurs de  $b$  sont essentiellement réelles, & deux sont imaginaires. Et comme les valeurs de  $b^2$  ne renferment point d'imaginaires, deux des racines de l'équation sont imaginaires & deux sont réelles.

Si  $p$  &  $r$  sont négatifs, les conclusions sont les mêmes que ci-dessus.

Si  $p$  est négatif &  $r$  positive; alors ou  $p^2$  surpasse  $4r$ , ou  $p^2$  est moindre que  $4r$ . Si  $p^2$  surpasse  $4r$ , toutes les valeurs de  $b$  sont imaginaires, non par la raison que les valeurs de  $b^2$  sont imaginaires, mais parce qu'elles sont négatives; la proposée n'a donc que des racines réelles. Si  $p^2$  est moindre que  $4r$ , toutes les valeurs de  $b$  sont imaginaires, non par la raison que les valeurs de  $b^2$  sont négatives, mais parce que les valeurs de  $b^2$  renferment elles-mêmes une imaginaire. Les racines de l'équation sont donc imaginaires.

(58.) L'exemple précédent a servi à développer la remarque du §. 6, relativement à la nature des racines de l'équation, eu égard aux différentes valeurs de  $b$ . Nous allons maintenant examiner les différens cas où l'expression de  $b^2$  renferme des imaginaires.

*Des différens cas où l'expression de  $b^2$  renferme des imaginaires.*

(59.) Si l'on jette les yeux sur les expressions de  $b^2$  du §. 55, on verra que si  $(4a^2 + p)^2 - 4r$  est moindre que zéro, les valeurs de  $b^2$  renferment des imaginaires. La condition de  $(4a^2 + p)^2 - 4r = 0$ , donne donc la limite de ces différens cas. De cette équation l'on tire  $a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r}}{4}$ ,  $a^2 = \frac{-p + 2\sqrt{r}}{4}$ . Ces expressions

substituées dans la résolvante ( $\gamma$ ) du §. 53, donnent  $q^2 = 0$ ; d'où l'on voit que le passage des valeurs réelles de  $b^2$  aux valeurs imaginaires, se fait par les équations dans lesquelles  $q = 0$ . Voyons maintenant quelle condition a lieu généralement entre les constantes lorsque  $b^2$  est imaginaire.

On ne doit pas oublier que dans cette recherche,  $r$  est essentiellement positive, puisque les valeurs de  $b^2$  du §. 55, ne peuvent renfermer d'imaginaires qu'autant que  $r$  est positive.

(60.) Nous venons de voir que  $b^2$  ne renferme des imaginaires, qu'autant que les valeurs de  $a^2$  sont comprises entre les limites suivantes;  $a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r}}{4}$ ,  $a^2 = \frac{-p + 2\sqrt{r}}{4}$ ,

Soit donc en général  $a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r}}{4} + y$ ; ou, ce qui revient au même, soit

$$(1) \quad a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r} + 4y}{4},$$

Si l'on substitue cette valeur dans la résolvante ( $\gamma$ ) du §. 53, elle deviendra

(2)  $16y(y - \sqrt{r}) \times (-p - 2\sqrt{r} + 4y) - q^2 = 0$ .  
Examinons quelle conséquence on peut tirer de cette analyse.

(61.) Puisque §. 60,  $4a^2 + p = 4y - 2\sqrt{r}$ , &c que par conséquent

$$(1) \quad (4a^2 + p)^2 - 4r = 16y(y - \sqrt{r});$$

on



On peut remarquer d'abord que les valeurs de  $(4a^2 + p)^2 - 4r$ , ne sont négatives, & que par conséquent les valeurs de  $b^2$  du §. 55, ne sont imaginaires, que lorsque  $16y(y - \sqrt{r})$  est une quantité négative; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les valeurs de  $y$  sont entre  $y = 0$  &  $y = \sqrt{r}$ . Dans tout autre cas les valeurs de  $(4a^2 + p)^2 - 4r$ , sont positives, & par conséquent les valeurs de  $b^2$  sont réelles. Il sembleroit donc que pour avoir les valeurs de  $a^2$  correspondantes aux valeurs imaginaires de  $b^2$ , il n'est question que de substituer à  $y$  dans l'équation (1) du §. 60, toutes les valeurs comprises entre  $y = 0$  &  $y = \sqrt{r}$ . Mais on ne doit pas perdre de vue que la supposition fondamentale du Mémoire, est que  $a$  soit une quantité réelle.  $a^2$  doit donc être ou zéro, ou une quantité positive; cette seconde considération exclut un très-grand nombre de valeurs de  $y$ , quoique comprises entre  $y = 0$ , &  $y = \sqrt{r}$ .

(62.) D'après cette dernière remarque, la plus petite valeur de  $y$  dont on doit faire usage dans la question dont il s'agit, est  $y = \frac{p + 2\sqrt{r}}{4}$ ; c'est celle qui dans l'équation (1) du §. 60, répond à  $a^2 = 0$ . Et les seules valeurs de  $y$  que l'on doive employer, sont celles comprises entre  $y = \frac{p + 2\sqrt{r}}{4}$ , &  $y = \sqrt{r}$ . Ces dernières valeurs de  $y$  ont respectivement pour valeurs correspondantes de  $a^2$ ,  $a^2 = 0$ ,  $a^2 = \frac{-p + 2\sqrt{r}}{4}$ .

*Paragraphe dans lequel on démontre que les seules équations du quatrième degré, où  $q = 0$ , donnent des valeurs de  $b^2$  qui renferment une imaginaire;  $a$  étant d'ailleurs une quantité réelle.*

(63.) De l'équation (2) du §. 60, l'on tire

$$(1) q^2 = 16y(y - \sqrt{r}) \times (-p - 2\sqrt{r} - 4y).$$

C'est la relation qui doit exister entre les quantités  $y, p, q, r$ , pour que  $b^2$  renferme une imaginaire. Mais pour

que  $b^2$  renferme une imaginaire, nous avons vu §. 61, que le facteur  $16y$  ( $y = \sqrt{r}$ ) doit être négatif. De plus, le facteur  $-p - 2\sqrt{r} + 4y$  est toujours ou zéro ou positif; car autrement (§. 60, équation (1))  $a$  seroit imaginaire, ce qui est contre la supposition fondamentale du Mémoire. La valeur de  $b^2$  ne peut donc renfermer d'imaginaire, que lorsque  $q$  est une quantité imaginaire, ou au moins  $= 0$  dans la proposée. On ne peut supposer que  $q$  soit imaginaire; il reste donc la condition de  $q = 0$ . Donc les seules équations du quatrième degré, dans lesquelles  $q = 0$ , conduisent à des valeurs de  $b^2$  qui renferment une imaginaire.

*Paragraphes dans lesquels on démontre que les équations du quatrième degré, où  $q = 0$ , peuvent aussi se résoudre par des valeurs de  $b$ , telles que  $b^2$  ne renferme point d'imaginaire.*

(64.) Quoique les seules équations du quatrième degré, dans lesquelles  $q = 0$ , conduisent à des valeurs de  $b^2$  qui renferment une imaginaire, il ne s'ensuit pas pour cela que ces équations ne puissent se résoudre que par des valeurs de  $b$ , telles que  $b^2$  renferme essentiellement une imaginaire. En effet, si l'on jette les yeux sur l'équation (1) du §. 63, on verra que  $q$  peut être égal à zéro, par trois raisons différentes, 1.<sup>o</sup> parce que le facteur  $-p - 2\sqrt{r} + 4y = 0$ , 2.<sup>o</sup> parce que  $y = 0$ , 3.<sup>o</sup> parce que  $y = \sqrt{r}$ . La supposition de  $-p - 2\sqrt{r} + 4y = 0$ , donne  $4y = p + 2\sqrt{r}$ ; c'est le cas que nous venons de considérer, & qui (§. 62), a pour valeurs correspondantes de  $a^2$ ,  $a^2 = 0$ , & par une suite nécessaire (§. 55) pour valeurs correspondantes de  $b^2$ ,  $b^2 = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2}$ . La supposition de  $y = 0$ , a pour valeur correspondante de  $a^2$  (§. 60, équation (1)),  $a^2 = \frac{-p - 2\sqrt{r}}{4}$ ; & comme alors  $(4a^2 + p)^2 - 4r = 0$ , les valeurs correspondantes de  $b^2$  (§. 55), sont  $b^2 = \frac{p - 2\sqrt{r}}{4}$ .

La supposition de  $y = \sqrt{r}$  a pour valeurs correspondantes de  $a^2$  (S. 60, équation (1)),  $a^2 = \frac{-p + 2\sqrt{r}}{4}$ ; & comme  $(4a^2 + p)^2 - 4r$  est encore égal à zéro, les valeurs correspondantes de  $b^2$  (S. 55), sont  $b^2 = \frac{p + 2\sqrt{r}}{4}$ .

(65.) Lorsque  $q = 0$  dans les équations du quatrième degré, on peut donc indistinctement, dans le facteur  $x - a - b\sqrt{-1} = 0$ , supposer  $a = 0$ , ou  $a = \pm \frac{\sqrt{(-p - 2\sqrt{r})}}{2}$ , ou  $a = \pm \frac{\sqrt{(-p + 2\sqrt{r})}}{2}$ .

Si on suppose  $a = 0$ , les valeurs correspondantes de  $b^2$  sont  $b^2 = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2}$ . Si  $a = \pm \frac{\sqrt{(-p - 2\sqrt{r})}}{2}$ ,

les valeurs correspondantes de  $b^2$  sont  $b^2 = \frac{p - 2\sqrt{r}}{4}$ .

Si l'on suppose  $a = \pm \frac{\sqrt{(-p + 2\sqrt{r})}}{2}$ , les valeurs correspondantes de  $b^2$  sont  $b^2 = \frac{p + 2\sqrt{r}}{4}$ . Maintenant il est évident

que quand la première valeur de  $b^2$ , celle qui répond à  $a = 0$ , est imaginaire, parce que, par exemple,  $p^2 - 4r$  est une quantité négative, les valeurs de  $b^2$ , qui répondent à  $a = \pm \frac{\sqrt{(-p - 2\sqrt{r})}}{2}$ ,  $a = \pm \frac{\sqrt{(-p + 2\sqrt{r})}}{2}$ ,

ne sont point imaginaires pour cela. Une des deux valeurs de  $a$  est pareillement réelle dans le même cas, puisque  $p^2 - 4r$  ne peut être une quantité négative qu'autant qu'une des deux quantités  $-p \pm 2\sqrt{r}$  est positive. On voit donc que les équations du quatrième degré dans lesquelles  $q = 0$ , peuvent aussi se résoudre par des valeurs de  $b$  telles que  $b^2$ , ne renferme point d'imaginaires,  $a$  étant d'ailleurs réel.

(66.) Si l'on pouvoit douter de l'identité des solutions que l'on tire des suppositions du paragraphe précédent, on s'en convaincroit facilement par le calcul qui suit. Si dans le facteur  $x = a + b\sqrt{-1}$ , l'on substitue zéro

à  $a$ , &  $\pm \sqrt{\left(\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2}\right)}$  à  $b \sqrt{-1}$ ; on aura  $x = \pm \sqrt{\left(\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2}\right)}$ . Si l'on substitue maintenant  $\pm \frac{\sqrt{(-p - 2\sqrt{r})}}{2}$  à  $a$ , &  $\pm \frac{\sqrt{(-p + 2\sqrt{r})}}{2}$  à  $b \sqrt{-1}$ , l'on aura  $x = \frac{\pm \sqrt{(-p - 2\sqrt{r})} \pm \sqrt{(-p + 2\sqrt{r})}}{2}$ ;

il s'agit donc de démontrer que ces valeurs de  $x$  sont égales; ce qui devient évident en exécutant le calcul.

*Des cas où les valeurs de  $b$  sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires, sans que l'expression de  $b^2$  renferme des imaginaires.*

(67.) Nous venons d'examiner les seuls cas où la valeur de  $b^2$  renferme des imaginaires. Selon ce qui précède, il n'y a que les équations dans lesquelles  $q = 0$ , qui puissent conduire à de pareils résultats,  $a$  étant d'ailleurs une quantité réelle. Nous ne reviendrons plus sur cette condition; nous supposons donc désormais que dans la proposée,  $q$  est une quantité réelle positive ou négative. Nous supposons pareillement que  $(4a^2 + p)^2 - 4r$  est une quantité positive, puisque si cette quantité étoit négative, les valeurs de  $b^2$  du §. 55 seroient imaginaires.

*Des conditions qui ont lieu entre les connues, relativement aux équations particulières du quatrième degré, par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire.*

(68.) Nous avons vu, relativement au troisième degré, que les équations particulières par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire, sont celles dans lesquelles  $4p^3 + 27q^2 = 0$ ; le quatrième degré a des symptômes analogues que nous allons chercher.

(69.) Puisque dans les valeurs de  $b$  du §. 55, la quantité  $(4a^2 + p)^2 - 4r$  est essentiellement positive, & que

par conséquent  $\sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$  est essentiellement réelle, toutes les valeurs de  $b$  seront réelles, & conséquemment toutes les racines de l'équation seront imaginaires, tant que  $2a^2 + p$  surpassera  $\pm \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$ .

Lorsque  $2a^2 + p$  égalera  $\pm \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$ , deux racines de l'équation passeront de l'état imaginaire à l'état réel, puisqu'alors deux des valeurs de  $b$  passeront de l'état réel à l'imaginaire. Lorsqu'ensuite  $2a^2 + p$  égalera  $-\sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$ , les deux autres racines de l'équation passeront de l'imaginaire au réel, puisque deux nouvelles valeurs de  $b$  passeront du réel à l'imaginaire. La supposition de  $2a^2 + p = \pm \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$  a donc lieu, lorsque les racines de l'équation passent du réel à l'imaginaire.

(70.) La supposition de  $2a^2 + p = \pm \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$ , conduit à l'équation suivante,

$$(1) \quad 3a^4 + a^2p - r = 0;$$

d'où l'on tire

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r}}{6}, \quad a^2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 12r}}{6}.$$

(71.) Si l'on porte les valeurs de  $a^2$  du *paragraphe précédent*, dans la résolvante ( $\gamma$ ) du §. 53, l'on aura, dans la supposition de  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r}}{6}$ ,

$$(1) \quad (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0,$$

& dans la supposition de  $a^2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 12r}}{6}$ ,

$$(2) \quad (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0.$$

Ce sont les conditions qui ont lieu entre les constantes, relativement aux équations particulières du quatrième degré, par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire.

(72.) Dans l'équation (2) du *paragraphe précédent*, si l'on suppose  $r = 0$ , on aura  $4p^3 + 27q^2 = 0$ . Cette dernière condition est l'équation de condition du troisième degré, pour que les racines passent du réel à l'imaginaire. Aussi les

supposition de  $r = 0$  abaisse-t-elle l'équation du quatrième degré, au troisième.

*De la Solution particulière des Équations du quatrième degré, par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire.*

(73.) Nous avons vu (§. 70) que la supposition de  $3a^4 + a^2p - r = 0$ , répond au cas où les racines de l'équation du quatrième degré passent du réel à l'imaginaire. Cette même supposition substituée dans la résultante (a 1) du §. 52, la réduit à  $b^4 - 2a^2b^2 - pb^2 = 0$ ; d'où l'on tire  $b^2 = 0$ , &  $b^2 - 2a^2 - p = 0$ . Donc  $b = 0$ , &  $b = \pm \sqrt{2a^2 + p}$ ;  $b\sqrt{-1} = 0$ , &  $b\sqrt{-1} = \pm \sqrt{-2a^2 - p}$ . Nous avons vu d'ailleurs (§. 70) que, relativement aux équations particulières du quatrième degré par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire, on a

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}; \quad a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}.$$

De plus en général  $x = a + b\sqrt{-1}$ . Les équations particulières du quatrième degré par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire, ont donc pour facteurs,

$$x - \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x - \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x + \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} - \sqrt{\left(\frac{-4p - 2\sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x + \sqrt{\left(\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} + \sqrt{\left(\frac{-4p - 2\sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0.$$

$$x - \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x - \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x + \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} + \sqrt{\left(\frac{-4p + 2\sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0,$$

$$x + \sqrt{\left(\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} - \sqrt{\left(\frac{-4p + 2\sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}\right)} = 0.$$

Il est superflu d'avertir que les premiers facteurs appartiennent à l'un des points de passage, c'est-à-dire, à celui qui est déterminé par la condition  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r}}{6}$ .

Les autres facteurs appartiennent à l'autre point de passage, c'est-à-dire, à celui qui est déterminé par la condition  $a^2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 12r}}{6}$ .

(74.) Dans le dernier paragraphe, nous avons supposé  $a = \pm \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r}}{6}}$ ,  $a = \pm \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 + 12r}}{6}}$ ; nous aurions pu supposer également dans la suite des calculs,  $a = \mp \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r}}{6}}$ ,  $a = \mp \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 + 12r}}{6}}$ , ce qui auroit donné des valeurs de  $x$ , qui n'eussent différé de celles du §. 73, que par le signe, dont le premier radical eût été précédé. On pourroit donc croire, au premier coup-d'œil, que la méthode donne huit racines pour chaque équation du quatrième degré; mais cette conclusion seroit précipitée. On a bien en effet huit racines différentes. Mais on doit considérer que la résultante ( $\alpha 1$ ) du §. 52, ne renfermant que des puissances paires de  $a$ , sans contenir la quantité  $q$ , & que d'ailleurs, dans la résolvante ( $\gamma$ ) du §. 53, dont nous avons pareillement fait usage,  $a$  &  $q$  n'étant élevés qu'à des puissances paires. On ne peut pas traiter séparément le cas de  $q$  positif & de  $q$  négatif; on a donc huit racines, parce qu'en effet l'on considère à la fois deux équations différentes du quatrième degré.

*Définitions des Équations que j'ai nommées Équations de Passage; & Remarques sur les Équations (1). & (2) du §. 71.*

(75.) Les équations (1) & (2) du §. 71, donnent lieu à la remarque suivante. Dans le troisième degré, on peut supposer que le passage des racines réelles aux racines imaginaires se fait, si je peux m'exprimer ainsi, par une seule

équation. En effet, quoiqu'il y ait une infinité de quantités  $p$  &  $q$ , telles que  $4p^3 + 27q^2 = 0$ , on peut regarder toutes les équations dans lesquelles les quantités  $p$  &  $q$  sont ainsi conditionnées, comme une seule équation. Il n'en est pas de même dans le quatrième degré. Comme  $p$  &  $r$  peuvent avoir toutes les relations possibles, pourvu que d'ailleurs les valeurs de  $q$  que l'on déduit des équations (1) & (2) du §. 71, soient réelles, les équations par lesquelles se fait le passage des racines réelles aux racines imaginaires, & que je nommerai désormais *équations de passage*, peuvent avoir des formes tout-à-fait différentes les unes des autres. Quoiqu'en général il ne soit pas possible de décider à la seule inspection & sans calcul, si une équation proposée est dans la classe des *équations de passage*, il y en a cependant que l'on peut exclure au premier coup-d'œil: ce sont celles dans lesquelles  $p^2 + 12r$  est une quantité négative. En effet  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$  est alors imaginaire, & aucune des deux équations du §. 71 ne peut être satisfaite. Dans tout ce que nous allons dire, nous supposerons donc toujours que  $p^2 + 12r$  est une quantité positive.

(76.) Si l'on vouloit déterminer celles des équations du quatrième degré dans lesquelles  $q = 0$ , & qui doivent être comprises dans la classe des équations de passage; dans les équations (1) & (2) du §. 71, l'on feroit  $q = 0$ , &

l'on auroit  $p^3 - 36pr = \pm (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ ; d'où l'on tire  $r(3p^2 - 12r)^2 = 0$ . On voit donc que celles des équations du quatrième degré dans lesquelles  $q = 0$ , & qui doivent être comprises dans la classe des équations de passages, sont celles dans lesquelles d'ailleurs  $r = 0$ , ou  $p^2 - 4r = 0$ . Ces conclusions deviennent sensibles lorsque l'on compare ces résultats aux racines de l'équation, qui sont alors, à cause de  $q = 0$ ,

$$x = \pm \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}};$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}};$$

Paragraphe



*Paragraphes où l'on démontre que les équations dans lesquelles les quantités  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} \mp p^3 \pm 36pr \mp \frac{27q^2}{2}$ , sont positives, ont des racines d'une nature différente que les équations dans lesquelles ces mêmes quantités sont négatives.*

(77.) Après avoir déterminé (§. 71) quelle condition doit avoir lieu entre  $p$ ,  $q$  &  $r$ , pour qu'une équation du quatrième degré puisse être comprise dans la classe des *équations de passage*, il reste à examiner si toutes les équations dans lesquelles les quantités  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ , ou  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$ , sont, par exemple, positives, ont des racines d'une nature différente que les équations dans lesquelles ces mêmes quantités sont négatives. Quoique l'analogie du troisième degré paroisse conduire à cette conclusion, la question mérite d'être approfondie.

(78.) Si l'on jette les yeux sur les valeurs de  $b$  du §. 55, on verra que pour que ces valeurs soient réelles, il faut que  $2a^2 + p$  surpasse  $\pm \sqrt{[4a^2 + p]^2 - 4r}$ . On a vu de plus (§. 70), que lors du passage des racines réelles aux racines imaginaires, on a, ou  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ ; ou  $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ . D'où l'on a conclu que lors des *équations de passage*, l'on avoit pour condition entre les constantes (§. 71),

$$(1) (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0;$$

ou

$$(2) (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0.$$

Supposons donc en général  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r}}{6} + y$ ,  
ou, ce qui revient au même,

$$(3) \quad a^2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r} + 6y}{6}.$$

Il est bien évident que cette expression représentera toutes les valeurs de  $a^2$  possibles; de sorte que pour retomber dans les valeurs de  $a^2$  dont il a été question au commencement de ce paragraphe, il ne s'agira que de supposer  $y = 0$ , ou  $y = -\frac{\sqrt{p^2 + 12r}}{3}$ . Si l'on substitue cette valeur de  $a^2$ , dans la résolvante ( $\gamma$ ) du §. 53, & que l'on suppose, pour abréger le calcul,

$$(4) \quad z = 6y + \sqrt{p^2 + 12r},$$

on en conclura la relation suivante,

$$(5) \quad 4z^3 - 3z(p^2 + 12r) - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0;$$

relation qui devient l'équation (1), par la supposition de  $y = 0$ , & par conséquent de  $z = \sqrt{p^2 + 12r}$ ; & qui devient l'équation (2), par la supposition de  $y = -\frac{\sqrt{p^2 + 12r}}{3}$ , & par conséquent de  $z = -\sqrt{p^2 + 12r}$ . Entrons dans quelques détails.

(79.) Il est aisé de voir que si  $z = \sqrt{p^2 + 12r}$ , l'équation (5) du *paragraphe précédent*, devient

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0.$$

Pour déterminer si d'autres suppositions sur  $z$  ne pourroient pas conduire à la même équation, soit en général,

$$\begin{aligned} 4z^3 - 3z(p^2 + 12r) - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} \\ = (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}, \end{aligned}$$

on aura

$$(1) \quad 4z^3 - 3z(p^2 + 12r) - (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} = 0;$$

équation que l'on fait déjà être divisible par  $z - (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$ .  
Si l'on exécute la division on aura pour quotient

$$[2z + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}].$$

L'équation (5) du §. 78, se réduit donc à

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0,$$

dans deux cas; lorsque  $z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$ , & lorsque

$$z = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}. \text{ Mais (S. 78, équation (4)),}$$

$$6y = z - \sqrt{(p^2 + 12r)}, \text{ \& (S. 78, équation (3)),}$$

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + 6y}{6};$$

la condition

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0,$$

a donc lieu entre les constantes, dans deux cas; 1.<sup>o</sup> lorsque

$$z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}, y = 0, \text{ \& } a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6};$$

$$2.<sup>o</sup> lorsque  $z = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}, y = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{4},$$$

$$\text{ \& } a^2 = \frac{-2p - (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}. \text{ Le premier cas appartient au}$$

passage des racines réelles aux racines imaginaires de l'équation.  
Le second cas appartient à une circonstance particulière dont nous parlerons (S. 82).

(80.) On trouveroit, par une analyse entièrement semblable, que la condition

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0,$$

a lieu entre les constantes dans deux cas; 1.<sup>o</sup> lorsque

$$z = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}, y = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{3},$$

$$\text{ \& } a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6};$$

Fffij

$$2.^{\circ} \text{ lorsque } z = \frac{(p^3 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}, y = - \frac{(p^3 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12},$$

$$\& a^2 = \frac{-2p + (p^3 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}.$$

Le premier cas appartient au passage des racines réelles aux racines imaginaires de l'équation. Le second cas appartient à une circonstance particulière dont nous parlerons (§. 82.).

(81.) Si l'on vouloit déterminer pareillement dans quelles circonstances la condition entre les connues se réduit à  $p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0$ ; il est aisé de voir que dans ce cas l'équation (5) du §. 78, donneroit pour condition,

$$(1) 4z^3 - 3z(p^3 + 12r) = 0.$$

De cette dernière équation, combinée avec les équations (4) & (3) du §. 78, l'on tire

$$z = 0; y = - \frac{\sqrt{(p^3 + 12r)}}{6}; a^2 = - \frac{p}{6}.$$

$$z = + \frac{3^{\frac{1}{2}}(p^3 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}; y = + (3^{\frac{1}{2}} - 2) \times \frac{(p^3 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12};$$

$$a^2 = \frac{-2p + 3^{\frac{1}{2}}(p^3 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12},$$

$$z = - \frac{3^{\frac{1}{2}}(p^3 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}; y = - (3^{\frac{1}{2}} + 2) \times \frac{(p^3 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12};$$

$$a^2 = \frac{-2p - 3^{\frac{1}{2}}(p^3 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12}.$$

Équations qui déterminent ces cas particuliers.

*Remarque singulière sur le quatrième degré, analogue à celle du §. 27, sur le troisième degré.*

(82.) Les circonstances singulières des §. 79 & 80, lors desquelles la condition entre les connues, correspondante au passage des racines réelles aux imaginaires, a lieu, quoique

les racines ne passent pas du réel à l'imaginaire, méritoient d'être remarquées. Elles sont entièrement analogues à une remarque semblable que nous avons faite sur le troisième degré (S. 27). Dans ces cas singuliers, les connues atteignent la condition par laquelle les racines passent du réel à l'imaginaire, mais sans cependant que les équations qui ont cette propriété, puissent être réputées *équations de passage*. Nous reviendrons sur cette remarque.

*Relation entre les valeurs de  $a^2$ , & les quantités  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$   
 $\mp p^3 \pm 36pr \mp \frac{27q^2}{2}$ , relativement à leurs propriétés  
 d'être positives ou négatives.*

(83.) La seule valeur de  $z$ , par laquelle la quantité  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$  passe du positif au négatif, est  $z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$ ; car  $z = -\frac{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$  qui conduit également à une valeur nulle de  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ , ne répond pas au point de passage des racines réelles aux racines imaginaires du quatrième degré, ainsi que nous le ferons voir dans la suite. Pour déterminer maintenant la relation entre la quantité  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$  relativement à sa propriété d'être positive ou négative, & la nature des racines de l'équation du quatrième degré, soit

$$(1) \quad z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + \delta.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (5) du S. 78, elle deviendra,

$$(2) (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + 9(p^2 + 12r)\delta$$

$$+ 12(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}\delta^2 + 4\delta^3 - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0.$$

(84.) Si l'on suppose maintenant  $\delta$  positif. Comme la quantité  $p^2 + 12r$  est positive, d'après la remarque du §. 75;  $9(p^2 + 12r)\delta + 12(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}\delta^2 + 4\delta^3$ , fera positif. Mais (§. 83, équation (2))

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} \\ = -9(p^2 + 12r)\delta - 12(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}\delta^2 - 4\delta^3.$$

Donc, dans la supposition de  $\delta$  positif, la quantité

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$

fera négative.

(85.) L'on a vu (§. 78, équation (4)), qu'en général  $6y = z - \sqrt{(p^2 + 12r)}$ , & (§. 78, équation (3)), que

$$a^2 = \frac{-p + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + 6y}{6}; \text{ donc, dans la supposition}$$

de  $z = (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + \delta$ ; l'on a à la fois  $6y = \delta$ , &

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + \delta}{6}. \text{ Donc } (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$$

$- p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$  est une quantité négative, lorsque

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + \delta}{6}, \delta \text{ étant d'ailleurs une}$$

quantité positive.

(86.) Lorsque  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + \delta}{6}$ ,  $\delta$  étant d'ailleurs une quantité positive,  $a^2$  surpasse  $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ .

Donc, lorsque  $a^2$  surpasse  $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ , la quantité

$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$  est essentiellement négative.

(87.) Puisque l'équation (2) du §. 83 peut se mettre sous la forme suivante,

$$(1) (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} \\ = -\delta [2\delta + 3\sqrt{(p^2 + 12r)}]^2;$$

il est évident que si l'on suppose  $\delta$  négatif, la quantité

$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$  sera essentiellement positive. Mais à cause de  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + \delta}{6}$ ,

si  $\delta$  est négatif,  $a^2$  sera essentiellement plus petit que  $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ . Donc si  $a^2$  est moindre que  $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ ,

la quantité  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$  est essentiellement positive.

(88.) On démontreroit, par des raisonnemens analogues, que si  $a^2$  surpasse  $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ , la quantité  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$

$+ p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$  est essentiellement positive;

& que si  $a^2$  est moindre que  $\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ ,

la quantité  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$  est essentiellement négative.

*Confirmation des résultats précédens, au moyen d'une construction géométrique.*

(89.) Quoique les résultats précédens n'aient pas besoin pour être sensibles, d'être représentés par une courbe, j'ai cru qu'il ne seroit pas inutile d'en remettre l'ensemble sous les

yeux, & de représenter, par une suite continue de points, la relation entre les différentes valeurs de  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$

$- p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ , & les racines correspondantes des équations du quatrième degré. Rien n'est plus simple que la solution de cette question. Soit en effet

$$(1) u = (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2};$$

si dans l'équation (5) du §. 78, l'on substitue  $u - (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$  à  $- p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ , on aura

$$(2) 4z^3 - 3z(p^2 + 12r) - (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + u = 0;$$

équation qui satisfait au Problème.

(90.) L'équation précédente ne donne pas précisément la relation entre  $u$  & les racines de l'équation; elle donne la relation entre  $u$  &  $z$ . Mais les équations (3) & (4) du §. 78 font voir qu'il y a entre  $a$  &  $z$  la relation suivante

$$(1) a^2 = \frac{-p + z}{6}.$$

Cette dernière équation donne donc la relation entre  $z$  &  $a$ . L'équation (2) du §. 89, donne la relation entre  $z$  &  $u$ ; on a donc la relation entre  $u$  & les racines de la proposée.

Fig. 9. (91.) Si l'on prend pour lignes des coordonnées, les droites  $POP, MOM$ ; que le point  $O$  soit l'origine de ces coordonnées; la droite  $OP$  la ligne des abscisses  $z$ ; la droite  $OM$  la ligne des ordonnées  $u$ ; & que l'origine  $O$  soit telle que l'on ait à ce point  $z = 0$ , & par conséquent (équation (1) §. 90),  $a^2 = \frac{-p}{6}$ . Si de plus, l'on mène parallèlement à la ligne  $POP$ , les droites  $pp, \pi\pi$ , telles que, lors des intersections  $m, m', m'', m''', m^{iv}, m^v, m^{vi}$ , de la courbe, avec les droites  $PP, pp, \pi\pi$ , les ordonnées  $a$  soient respectivement égales à zéro, à  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ , & à  $2(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ ,  
Cette



Cette construction sera représentée par la *fig. 9*, & le lieu géométrique de l'équation (2) du §. 89, sera une parabole cubique, qui a des branches infinies paraboliques, dans la direction de la ligne des ordonnées.

Fig. 9.

(92.) L'équation (2) du §. 89, fait voir que les conditions que nous avons imposées aux valeurs de  $u$ , pour mener les droites  $PP$ ,  $pp$ ,  $\pi\pi$ , supposent que, lors des intersections de ces différentes droites avec la courbe en question, les relations entre les constantes de l'équation du quatrième degré, sont respectivement

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0;$$

$$p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0;$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0.$$

(93.) Supposons d'abord  $z$  plus grand que  $\sqrt{p^2 + 12r}$ . Dans l'équation (2) du §. 89, les valeurs de  $u$  seront négatives, & la courbe s'étendra au-dessous de la ligne  $POP$  des abscisses.

Les quantités  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$  seront donc négatives (équation (1) §. 89). Nous remarquerons ici, qu'à cause de l'équation (1) du §. 90,  $q^2$  sera alors plus grand que  $\frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r}}{6}$ .

(94.) Soit  $z = \sqrt{p^2 + 12r}$ , & par conséquent (équation (1) §. 90),  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r}}{6}$ . La valeur correspondante de  $u$  dans l'équation (2) du §. 89, sera  $u = 0$ . La courbe coupe la ligne des abscisses au point  $m$ ; & l'on a pour condition (§. 89, équation (1)),  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0$ .

(95.) Soit  $z = \frac{3^{\frac{1}{2}} \sqrt{p^2 + 12r}}{1}$ , & par conséquent (équation (1), §. 90),  $a^2 = \frac{-2p + 3^{\frac{1}{2}} \sqrt{p^2 + 12r}}{12}$ . La

Fig. 9. valeur correspondante de  $u$ , dans l'équation (2) du §. 89, sera  $u = (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ . La courbe coupe alors (§. 91) la ligne  $pp$  au point  $m'$ ; & l'on a pour condition (§. 89, équation (1)),  $p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0$ .

(96.) Soit  $z = \frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{1}$ , & par conséquent (équation (1) §. 90),  $a^2 = \frac{-2p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{12}$ . La valeur correspondante de  $u$  dans l'équation (2) du §. 89, sera  $u = 2(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ . La courbe vient alors toucher la ligne  $\pi\pi$  (§. 91), au point  $m''$  où elle s'arrête; & l'on a pour condition (§. 89, équation (1)),  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0$ ; c'est un des cas singuliers dont nous avons parlé (§. 82).

(97.) Soit  $z = 0$ , & par conséquent (équ. (1) §. 90),  $a^2 = \frac{-p}{6}$ ; la valeur correspondante de  $u$  dans l'équation (2) du §. 89, sera  $u = (p^3 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ . La courbe coupe alors (§. 91) la ligne  $pp$  au point  $m'''$ ; & l'on a pour condition (§. 89, équation (1)),  $p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0$ .

(98.) Soit  $z = \frac{-(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$ , & par conséquent (équation (1) §. 90),  $a^2 = \frac{-2p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{12}$ . La valeur correspondante de  $u$  dans l'équation (2) du §. 89, sera  $u = 0$ . La courbe touche alors (§. 91) la ligne  $Pp$  au point  $m''''$ , où elle s'arrête; & l'on a pour condition (§. 89, équation (1)),  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2} = 0$ ; c'est un des cas singuliers dont nous avons parlé (§. 82).

(99.) Soit  $z = \frac{-3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{2}$ , & par conséquent Fig. 9.

(équation (1), §. 90),  $a^2 = \frac{-2p - 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{(p^2 + 12r)}}{12}$ . La valeur correspondante de  $u$  dans l'équation (2) du §. 89, fera  $u = (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ . La courbe coupe alors (§. 91), la ligne  $pp$  au point  $m^v$ ; & l'on a pour condition (§. 89, équation (1))

$$p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0.$$

(100.) Soit  $z = -(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$ , & par conséquent (équation (1), §. 90),  $a^2 = \frac{-p - (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{6}$ . La valeur correspondante de  $u$  dans l'équation (2) du §. 89, fera  $u = 2(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ . La courbe coupe alors (§. 91) la ligne  $\pi\pi$  au point  $m^{vi}$ ; & l'on a pour condition (§. 89, équation (1))

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2} = 0.$$

(101.) Si l'on suppose ensuite  $z$  plus petit que  $-(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}$ , & par conséquent (équation (1) §. 90),  $a^2$  plus petit que  $\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}}{6}$ ; la valeur correspondante de  $u$  dans

l'équation (2) du §. 89, surpassera  $2(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ . La courbe s'étend au-dessus de la ligne  $\pi\pi$ , & l'on a alors (équation (1), §. 89) la quantité

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$$

égale à une quantité négative.

(102.) On voit par-là que lorsque  $z$  est plus grand que  $\sqrt{(p^2 + 12r)}$ , & que par conséquent (équation (1) §. 90),  $a^2$  est plus grand que  $\frac{-p + (p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{6}$ , des deux quantités

Fig. 9.  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ , &  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$  la première est négative, & la seconde est positive.

Lorsque  $z = (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ , & que par conséquent  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ , la quantité  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$  passe du négatif au positif; & la quantité  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$  reste positive.

Lorsqu'enfin  $z = -(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$ , & que par conséquent (équation §. 90),  $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$  la quantité  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$  passe elle-même du positif au négatif.

On peut remarquer aussi, conformément à ce qui a été dit (§. 82), que les conditions entre les connues, correspondantes au passage des racines réelles aux racines imaginaires, peuvent avoir lieu, sans que pour cela les racines passent du réel à l'imaginaire, ou réciproquement. Ce sont les conditions correspondantes aux points  $m^{\text{II}}$ ,  $m^{\text{IV}}$ .

*Des racines des Équations particulières du quatrième degré dans lesquelles les constantes ont les combinaisons déterminées dans les §. 95, 96, 97, 98 & 99.*

(103.) Nous avons donné (§. 73) les racines des équations particulières du quatrième degré, par lesquelles les racines passent de l'état réel à l'imaginaire; c'est-à-dire, celles relatives aux suppositions des §. 94 & 100. Si l'on vouloit avoir les racines des équations particulières du quatrième degré, dans lesquelles les constantes ont entre

elles, les combinaisons déterminées dans les §. 95, 96, 97, 98 & 99, on parviendrait aux résultats suivans.

Dans la supposition du §. 95,

$$\begin{aligned}
 x &= + \sqrt[12]{\frac{-2p+3^{\frac{1}{2}}(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}{12}} \\
 &\quad \pm \sqrt[12]{\frac{-4p-3^{\frac{1}{2}}(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\sqrt{[2p^2+3^{\frac{1}{2}}p(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}]}}{12}}; \\
 x &= - \sqrt[12]{\frac{-2p+3^{\frac{1}{2}}(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}{12}} \\
 &\quad \pm \sqrt[12]{\frac{-4p-3^{\frac{1}{2}}(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\sqrt{[2p^2+3^{\frac{1}{2}}p(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}]}}{12}}.
 \end{aligned}$$

Dans la supposition du §. 96,

$$\begin{aligned}
 x &= + \sqrt[12]{\frac{-2p+(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}{12}} \\
 &\quad \pm \sqrt[12]{\frac{-4p-(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{[2p^2+2p(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}-24r]}}{12}}; \\
 x &= - \sqrt[12]{\frac{-2p+(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}{12}} \\
 &\quad \pm \sqrt[12]{\frac{-4p-(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{[2p^2+2p(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}-24r]}}{12}}.
 \end{aligned}$$

Dans la supposition du §. 97,

$$\begin{aligned}
 x &= + \sqrt[6]{\frac{-p}{6}} \pm \sqrt[6]{\frac{-2p-\sqrt{(p^2-36r)}}{6}}; \\
 x &= - \sqrt[6]{\frac{-p}{6}} \pm \sqrt[6]{\frac{-2p+\sqrt{(p^2-36r)}}{6}}.
 \end{aligned}$$

Dans la supposition du §. 98,

$$\begin{aligned}
 x &= + \sqrt[12]{\frac{-2p-(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}{12}} \\
 &\quad \pm \sqrt[12]{\frac{-4p+(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{[2p^2-2p(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}-24r]}}{12}}; \\
 x &= - \sqrt[12]{\frac{-2p-(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}}{12}} \\
 &\quad \pm \sqrt[12]{\frac{-4p+(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{[2p^2-2p(p^2+12r)^{\frac{1}{2}}-24r]}}{12}}.
 \end{aligned}$$

Dans la supposition du §. 99,

$$\begin{aligned}
 x &= + \sqrt[3]{\left( \frac{-2p - 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12} \right)} \\
 &\quad \pm \sqrt[3]{\left( \frac{-4p + 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{[2p^3 - 3^{\frac{1}{2}}p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}]}}{12} \right)}, \\
 x &= - \sqrt[3]{\left( \frac{-2p - 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}}{12} \right)} \\
 &\quad \pm \sqrt[3]{\left( \frac{-4p + 3^{\frac{1}{2}}(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{[2p^3 - 3^{\frac{1}{2}}p(p^2 + 12r)^{\frac{1}{2}}]}}{12} \right)}.
 \end{aligned}$$

(104.) On pourroit appliquer à ces dernières déterminations, des remarques analogues à celles du §. 74.

*Conditions entre les valeurs de  $a^2$ , & les racines de la proposée, relativement à la propriété de ces racines d'être ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires.*

(105.) J'ai déterminé dans les paragraphes précédens, la relation entre les valeurs de  $a^2$ , & les quantités  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$ , &  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$ , relativement à leurs propriétés d'être positives ou négatives. Afin que l'on puisse conclure la nature des racines de l'équation, par l'inspection du signe des quantités précédentes, il ne s'agit que de démontrer que les conditions qui ont lieu entre les valeurs de  $a^2$ , & ces dernières quantités relativement à leurs propriétés d'être positives ou négatives, ont également lieu entre les valeurs de  $a^2$ , & les racines de la proposée, relativement à la propriété de ces racines d'être ou toutes réelles ou toutes imaginaires, ou en partie réelles, & en partie imaginaires.

(106.) Pour y parvenir, je suppose une équation de cette forme,

(1)  $(2a^2 + p)^2 = (4a^2 + p)^2 - 4r + 4\epsilon$ ;  
d'où l'on tire

$$(2) \quad 3a^4 + a^2p - r + \epsilon = 0.$$

Il est bien évident que si  $\epsilon$  est une quantité positive, dans les expressions de  $b$  du §. 55,  $\sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$  sera moindre que  $2a^2 + p$ . Si au contraire  $\epsilon$  est une quantité négative,  $\sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$  sera plus grand que  $2a^2 + p$ . Supposons en général, comme dans le §. 78,

$$(3) \quad a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r) + 6y}}{6}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (2) du présent paragraphe, elle deviendra

$$(4) \quad \epsilon + y[3y + \sqrt{(p^2 + 12r)}] = 0;$$

d'où l'on peut conclure d'abord que  $\epsilon = 0$ , & que par conséquent (équation 1),  $(2a^2 + p)^2 = (4a^2 + p)^2 - 4r$ ,

lorsque  $y = 0$ , & lorsque  $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$ ; c'est-

à-dire (équation 3) lorsque  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ ;

& lorsque  $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ . Ces mêmes valeurs

de  $a^2$  ont lieu (§. 94 & 100) lorsque les quantités

$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr + \frac{27q^2}{4}$ , &  $(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}}$

$+ p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{4}$ , passent respectivement, la

première du négatif au positif, & la seconde du positif au négatif.

(107.) Dans l'équation (4) du paragraphe précédent, si l'on suppose  $y$  positif, la quantité  $\epsilon$  est essentiellement négative.  $\epsilon$  devient ensuite positif, si l'on suppose à  $y$  une valeur négative

plus petite que  $\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$ ;  $\epsilon$  redevient enfin négatif, si

l'on suppose à  $y$  une valeur négative plus grande que  $\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$ .

On peut conclure de-là que dans les expressions de  $b$  du §. 55,  $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$  est moindre que  $2a^2 + p$ , lorsque les valeurs de  $y$  sont comprises entre  $y = 0$  &  $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$ , ou, ce qui revient au même, lorsque les valeurs de  $a^2$  sont comprises entre  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$  &  $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ . Dans toute autre circonstance, les valeurs de  $\epsilon$  sont essentiellement négatives, & par conséquent (§. 106),  $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$  sera plus grand que  $2a^2 + p$ . Voyons quelle conséquence on peut tirer de cette recherche.

*Paragraphes où l'on démontre que les équations du quatrième degré, relativement auxquelles les quantités*

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} \mp p^3 \pm 36pr \mp \frac{27q^2}{2},$$

*sont l'une positive & l'autre négative, ont deux racines réelles & deux racines imaginaires.*

(108.) Les quatre valeurs de  $b$ , qui servent à résoudre l'équation du quatrième degré, sont (§. 55),

$$(1) b = + \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

$$(2) b = - \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

$$(3) b = + \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)};$$

$$(4) b = - \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}\right)}.$$

(109.) Si dans les expressions précédentes de  $b$ , on suppose les valeurs de  $a^2$  éliminées au moyen de l'équation

$$a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)} + 6y}{6};$$

& que



& que de plus  $y$  soit positif; on a vu (§. 107), que  
 $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$  surpasse  $2a^2 + p$ .

Donc, quelle que soit la valeur de  $2a^2 + p$ , les valeurs  
 (1)  $b$ , (2)  $b$  du §. 108, sont réelles, & les valeurs (3)  $b$ ,  
 (4)  $b$  du même paragraphe, sont imaginaires. Mais lorsque  $y$  est  
 positif,  $a^2$  surpasse  $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ ; & des deux quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

la première est négative, & la seconde est positive (§. 86  
 & 88). Donc, lorsque des quantités précédentes, la première  
 est négative & la seconde est positive, l'équation dans laquelle  
 cette propriété a lieu, a deux racines réelles & deux racines  
 imaginaires.

(110.) Nous avons vu pareillement (§. 107) que, si l'on  
 donne à  $y$  une valeur négative plus grande que  $\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$ ,

$\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$  surpasse encore  $2a^2 + p$ .

Les valeurs (1)  $b$ , (2)  $b$  du §. 108, sont donc essentiellement  
 réelles, & les valeurs (3)  $b$ , (4)  $b$ , sont essentiellement  
 imaginaires. Mais lorsque  $y$  a une valeur négative plus grande  
 que  $\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$ ,  $a^2$  est moindre que  $\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ ;

& des deux quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

la première est positive & la seconde est négative (§. 87  
 & 88). Donc, lorsque des deux quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

&amp;

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

la première est positive & la seconde est négative, l'équation dans laquelle cette propriété a lieu, a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

(111.) Donc en général (S. 109 & 110), si des quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

&amp;

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

l'une est positive & l'autre est négative; l'équation du quatrième degré a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

*Paragraphes où l'on démontre que les équations du quatrième degré relativement auxquelles les quantités*

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$\& (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

*sont toutes deux positives, ont essentiellement leurs racines ou toutes réelles, ou toutes imaginaires.*

$$(112.) \text{ Dans l'équation } a^2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r} + 6y}{6},$$

si l'on suppose à y une valeur comprise entre  $y = 0$ , &

$y = -\frac{\sqrt{p^2 + 12r}}{3}$ , on a vu (S. 107), que

$\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$  est moindre que  $2a^2 + p$ . Les valeurs de  $b$  du S. 108 peuvent alors être toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires. Elles sont réelles, si d'ailleurs  $2a^2 + p$  est une quantité positive;

elles sont imaginaires, si  $2a^2 + p$  est une quantité négative. Mais lorsque les valeurs de  $y$  sont comprises entre  $y = 0$ ,

&  $y = \frac{-\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$ , les valeurs de  $a^2$  sont comprises entre  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ , &  $a^2 = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ ,

ou, ce qui revient au même, ces valeurs sont moindres que  $\frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ , & plus grandes que  $\frac{-p - \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ ;

donc (S. 87 & 88), les quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$

$$\& (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$$

sont essentiellement positives.

(113.) Donc les équations du quatrième degré relativement auxquelles les quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2}$$

$$\& (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2}$$

sont toutes deux positives, ont essentiellement leurs racines toutes réelles ou toutes imaginaires. Elles sont toutes réelles, lorsque d'ailleurs  $2a^2 + p$  est une quantité négative; elles sont toutes imaginaires, lorsque  $2a^2 + p$  est une quantité positive. Il ne s'agit plus maintenant que de trouver un symptôme relatif à cette dernière supposition.

Quant au cas où les quantités

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - 27\frac{q^2}{2}$$

$$\& (p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + 27\frac{q^2}{2}$$

seroient toutes deux négatives, il ne peut avoir lieu.

*Paragraphes dans lesquels on démontre que dans les mêmes circonstances que ci-dessus (§. 113), les racines de l'Équation sont toutes imaginaires, lorsque  $p$  est une quantité positive.*

(114.) Puisque par la supposition fondamentale du Mémoire,  $a$  est une quantité essentiellement réelle,  $2a^2$  est essentiellement positif.  $2a^2 - p$  est donc essentiellement une quantité positive, lorsque  $p$  est positif. Donc dans les mêmes circonstances que ci-dessus, les valeurs de  $b$  sont toutes réelles, & par conséquent les racines de l'équation sont toutes imaginaires, lorsque  $p$  est une quantité positive.

(115.) Il ne peut y avoir d'incertitude que lorsque  $p$  est négatif; puisqu'en effet  $2a^2$  peut alors être une quantité positive, sans que  $2a^2 + p$  soit positif; lorsque, par exemple,  $2a^2$  est moindre que  $p$ .

*Paragraphes dans lesquels on démontre que les racines de l'Équation sont toutes imaginaires, même lorsque  $p$  est une quantité négative, quand d'ailleurs  $p^2 - 4r$  est une quantité négative.*

(116.) Il y a un cas où  $p$  étant négatif, &  $2a^2 + p$  étant pareillement négatif, toutes les racines de l'équation sont cependant imaginaires; c'est lorsque  $p^2 - 4r$  est une quantité négative. En effet, puisque par la supposition,  $2a^2 + p$  est une quantité négative, si l'on introduit dans le calcul, une équation de la forme suivante,

$$(1) \quad 2a^2 + p + \zeta = 0;$$

la quantité  $\zeta$  sera essentiellement positive. D'ailleurs  $p + \zeta$  est essentiellement négatif, puisqu'autrement  $a$  seroit une quantité imaginaire, ce qui est contraire aux suppositions fondamentales de ce Mémoire. Au moyen de l'équation

(1); si l'on élimine la valeur de  $a^2$  dans les expressions de  $b^2$  du §. 55, elles deviendront

$$2b^2 = -\zeta + \sqrt{4\zeta(p + \zeta) + p^2 - 4r},$$

$$2b^2 = -\zeta - \sqrt{4\zeta(p + \zeta) + p^2 - 4r}.$$

$\zeta$  est essentiellement positif, ainsi que nous venons de le dire;  $p + \zeta$  est négatif; donc  $4\zeta(p + \zeta)$  est négatif.  $p^2 - 4r$  est aussi négatif par la supposition; donc le radical renferme la somme de deux quantités négatives. Les valeurs de  $b^2$  renferment donc des imaginaires. Toutes les racines de la proposée (§. 6 & 58) sont donc imaginaires. Nous avons vu (§. 63), que cette supposition ne pourroit avoir lieu qu'autant que  $q$  seroit ou imaginaire, ou égal à zéro dans la proposée.

*Paragraphes dans lesquels on démontre que dans les mêmes circonstances que ci-dessus (§. 113), & lorsque d'ailleurs  $p$  est une quantité négative, &  $p^2 - 4r$  une quantité positive; les racines de l'équation sont toutes imaginaires quand la fonction*

$p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  *est une quantité positive; & que ces racines sont toutes réelles, quand la fonction  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  est une quantité négative.*

(117.) Le symptôme du §. 113, apprend bien que lorsqu'il a lieu, toutes les racines de l'équation sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires; mais il faut encore avoir un symptôme particulier pour déterminer dans lequel des deux cas on est précisément. Nous avons déjà déterminé ce symptôme pour un très-grand nombre de circonstances; il ne s'agit plus que de discuter le symptôme particulier pour le cas où  $p$  étant négatif,  $p^2 - 4r$  est une quantité positive.

(118.) Pour y parvenir, dans la résultante  $\gamma$  du §. 53, j'élimine  $a^2$  au moyen de l'équation (1) du §. 116, dans laquelle je ne supposerai plus que  $\zeta$  soit essentiellement positif, & cette résultante devient

$$(1) p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2} = -4\zeta(\zeta + p)^2 - \zeta(p^2 - 4r).$$

D'où l'on voit que quand  $\zeta = 0$ , on a pour condition entre les connues,

$$(2) p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2} = 0.$$

Il s'agit d'examiner maintenant si cette dernière fonction change de signe par les mêmes suppositions qui font passer la quantité  $2a^2 + p$ , du positif au négatif.

(119.) L'équation (1) du paragraphe précédent fait voir que la fonction  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  est égale à zéro dans deux cas différens; lorsque  $\zeta = 0$ , & lorsque

$$4(\zeta + p)^2 + p^2 - 4r = 0.$$

De cette dernière équation l'on tire  $\zeta = \frac{-2p \pm \sqrt{-p^2 + 4r}}{2}$ ,

quantité imaginaire, puisque par la supposition  $-p^2 + 4r$  est une quantité négative, & qui par conséquent ne peut avoir lieu dans notre question; car alors, à cause de l'équation (1) du §. 116,  $a^2$ , & par conséquent  $a$ , renfermeroit une imaginaire, ce qui est contraire aux suppositions fondamentales du Mémoire. La fonction  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  n'est donc égale à zéro que lorsque  $\zeta = 0$ . Cette fonction ne change donc de signe que lorsque  $\zeta$  change de signe. Mais, à cause de  $2a^2 + p = -\zeta$ , la quantité  $2a^2 + p$  change de signe dans les mêmes circonstances; le signe de la fonction  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  est donc très-propre à déterminer le signe de  $2a^2 + p$ .

(120.) Puisque d'une part [§. 116, équation (1)]  $2a^2 + p = -\zeta$ ; & que d'une autre part [§. 118, équation (1)],  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2} = -4\zeta(\zeta + p)^2 - \zeta(p^2 - 4r)$ ;

que de plus dans cette dernière expression  $(\zeta + p)^2$  est une quantité essentiellement positive, attendu que c'est un carré; que d'ailleurs, par la supposition,  $p^2 - 4r$  est positif; on voit que  $2a^2 + p$  a le même signe que la quantité  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ . Mais les racines de la proposée sont toutes quatre réelles, si  $2a^2 + p$  est une quantité négative; elles sont toutes quatre imaginaires, si  $2a^2 + p$  est une quantité positive. Donc les racines de la proposée sont toutes quatre réelles, si  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  est une quantité négative. Les racines de la proposée sont toutes quatre imaginaires, si  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  est positif.

*Paragraphes dans lesquels on démontre que dans les mêmes circonstances que ci-dessus (S. 113), & lorsque d'ailleurs  $p$  est une quantité négative, &  $p^2 - 4r$  une quantité positive, il n'est pas nécessaire d'avoir recours au symptôme du paragraphe précédent; que la fonction  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  ne peut être que négative; & que par conséquent les racines de l'équation ne peuvent être que toutes réelles.*

(121.) Quoique dans les circonstances (S. 113) & lorsque d'ailleurs  $p$  est une quantité négative, &  $p^2 - 4r$  une quantité positive, nous avons donné un symptôme pour déterminer si toutes les racines de la proposée sont réelles ou si elles sont imaginaires, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à ce symptôme, & il est facile de démontrer que dans ce cas, la fonction  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  ne peut être que négative; & que par conséquent les racines de l'équation ne peuvent être que toutes réelles.

(122.) Pour y parvenir, on se rappellera (S. 120), que la fonction  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  ne pourroit être positive, qu'autant que  $2a^2 + p$  seroit une quantité positive, & par conséquent, qu'autant que dans l'équation  $2a^2 + p + \zeta = 0$ , la quantité  $\zeta$  seroit négative. On se rappellera pareillement (S. 109, 110 & 112), que la proposée ne peut avoir ses quatre racines de même nature, c'est-à-dire, toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires; que lorsque dans l'équation

$$(1) \quad a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r) + 6y}}{6},$$

$y$  est d'ailleurs une quantité négative. Donc, pour que la proposée pût avoir ses quatre racines de même nature, & qu'en même temps la fonction  $p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$ , pût être positive dans les suppositions dont il s'agit, il faudroit que quand  $p^2 - 4r$  est positif & que  $p$  est négatif,  $\zeta$  &  $y$  pussent être négatifs à la fois; or c'est ce qui n'a pas lieu. En effet, si dans l'équation (1) du présent paragraphe, on élimine  $a^2$  au moyen de sa valeur  $a^2 = \frac{-p - \zeta}{2}$ ; on aura, après toutes les réductions,

$$(2) \quad p^2 - 4r = -4p\zeta - 3(\zeta + 2y)^2 - 8py.$$

$-3(\zeta + 2y)^2$  est essentiellement négatif;  $p$  est aussi négatif par la supposition.  $p^2 - 4r$  ne peut donc être positif, qu'autant que les deux quantités  $\zeta$  &  $y$ , ou au moins l'une des deux est positive. Donc, si on suppose que  $y$  est négatif, ce qui est essentiel pour que les quatre racines de l'équation soient de même nature, il faut que  $\zeta$  soit positif. Donc, dans le cas que nous considérons la fonction

$p^3 - 4pr + \frac{q^2}{2}$  ne peut être que négative; & par conséquent les racines de la proposée ne peuvent être que toutes quatre réelles.

*Remarques*



*Remarques sur les Équations dans lesquelles  $p^2 + 12r$  est une quantité négative.*

(123.) Il n'y auroit rien à ajouter à ce que j'ai dit sur le quatrième degré, s'il n'y avoit point une classe entière d'équations qui ne sont point comprises dans les recherches précédentes. Ce sont celles dans lesquelles  $p^2 + 12r$  est une quantité négative. En effet j'ai prescrit, pour déterminer la nature des racines d'une équation du quatrième degré, d'examiner si les fonctions

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

sont positives ou négatives. Mais si  $p^2 + 12r$  est négatif, les fonctions précédentes sont imaginaires. Les symptômes dont il a été question jusqu'ici, ne paroissent donc pas s'appliquer à ce genre d'équations.

(124.) Pour entendre à quoi tient la difficulté, on se rappellera que pour déterminer la nature des racines des équations du quatrième degré, j'ai supposé que l'on avoit en général  $a^2 = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 12r) + 6y}}{6}$ , expression qui ne

renferme pas la quantité  $q$ . On se rappellera pareillement que les équations particulières par lesquelles les racines passent du réel à l'imaginaire, ou réciproquement, & que j'ai nommées (S. 75), *équations de passage*, sont celles relativement auxquelles  $y = 0$ , ou  $y = -\frac{\sqrt{(p^2 + 12r)}}{3}$ , & par con-

séquent, celles relativement auxquelles,  $a^2 = \frac{-p \pm \sqrt{(p^2 + 12r)}}{6}$ .

La méthode détermine donc la relation qui doit exister entre  $a, p$  &  $r$ , pour que la proposée puisse être une *équation de passage*. Mais cette première condition ne suffit pas; & c'est alors la valeur de  $q$  qui détermine, si la proposée dans laquelle

$a, p$  &  $r$  sont conditionnés ainsi qu'il convient pour qu'elle puisse être une *équation de passage*, est réellement une *équation de passage*. Mais il est évident qu'il y a une infinité de relations entre  $p$  &  $r$ , qui ne peuvent jamais appartenir à des *équations de passage*, quelle que soit la valeur que l'on suppose d'ailleurs à  $q$ . Ce sont celles qui rendent imaginaires l'expression

$$a^2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 12r}}{6}, \text{ c'est-à-dire, toutes les relations}$$

dans lesquelles la quantité  $p^2 + 12r$  est négative.

*Paragraphes où l'on démontre que les équations dans lesquelles  $p^2 + 12r$  est une quantité négative, ont essentiellement deux racines réelles, & deux racines imaginaires.*

(125.) Puisque toutes les relations entre  $p$  &  $r$  d'où il résulte que  $p^2 + 12r$  est une quantité négative, ne peuvent jamais appartenir à des *équations de passage*, quelle que soit d'ailleurs la valeur de  $q$ ; dans toute équation où  $p^2 + 12r$  est une quantité négative, les racines ne peuvent jamais changer de nature, par des suppositions particulières sur  $q$ ; car autrement ces suppositions particulières appartiendroient à des *équations de passage*, ce qui est contraire à l'hypothèse. La nature des racines est donc toujours la même, quelle que soit d'ailleurs la valeur de  $q$ . Il suffit donc, pour connoître généralement la nature des racines de ces équations, dans tous les cas possibles, de les déterminer dans une certaine supposition prise à volonté sur la quantité  $q$ . Parmi toutes ces suppositions également permises, la plus simple est sans contredit celle où  $q = 0$ . Elle réduit l'équation générale du quatrième degré, à la forme suivante,  $x^4 + px^2 + r = 0$ ; qui a pour racines,

$$x = \pm \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}; x = \pm \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}.$$

C'est la nature de ces dernières racines qui va déterminer celle des racines de toutes les équations dans lesquelles  $p^2 + 12r$  est une quantité négative.

(126.) Puisque par la supposition,  $p^2 + 12r$  est une quantité négative, il est évident que dans la proposée,  $r$  est négative;  $p^2 - 4r$  est donc une quantité positive plus grande que  $p$ . Donc  $\sqrt{p^2 - 4r}$  surpasse  $p$ ; & des quatre valeurs de  $x$  du paragraphe précédent, deux sont essentiellement réelles & deux sont imaginaires, quels que soient d'ailleurs la valeur & le signe de  $p$ .

Donc, les équations dans lesquelles  $p + 12r$  est une quantité négative, ont essentiellement deux racines réelles & deux racines imaginaires.

(127.) Quoiqu'aucune des équations dans lesquelles  $p^2 + 12r$  est une quantité négative, ne puisse être une *équation de passage*; on ne doit pas exclure pour cela toutes celles dans lesquelles  $p^2 + 12r = 0$ . Il y en a une qui dans ce dernier cas peut être comprise parmi les *équations de passage*; c'est celle relativement à laquelle la valeur de  $q$  est déterminée par la condition suivante,

$$(1) \pm 2p^3 \mp 72pr \pm 27q^2 = 0;$$

ou plutôt, à cause que d'ailleurs  $p^2 + 12r = 0$ ,

$$(2) \pm 8p^3 \pm 27q^2 = 0.$$

Cette dernière condition ne peut avoir lieu, qu'autant que dans la proposée, la valeur de  $p$  est négative; car autrement,  $q$  seroit imaginaire.

(128.) On voit aussi que comme dans ce cas particulier, des deux fonctions dont il faut déterminer le signe pour en conclure la nature des racines de la proposée (§. 111 & 113), l'une est positive & l'autre est négative, l'équation particulière dans laquelle  $p^2 + 12r = 0$ , & qui d'ailleurs est *équation de passage*, a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

*Récapitulation sommaire de ce qui vient d'être démontré ;  
relativement à la méthode pour déterminer la nature des  
racines des équations du quatrième degré.*

(129.) Ce que nous venons de démontrer relativement à la méthode pour déterminer la nature des racines des équations du quatrième degré, se réduit à ceci.

Soit

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

une équation quelconque du quatrième degré.

Soient de plus,

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2},$$

deux fonctions dont on déterminera le signe ; ou, ce qui revient au même, relativement auxquelles on constatera si elles sont positives ou négatives.

Si de ces deux fonctions l'une est positive & l'autre est négative, la proposée a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

Si ces deux fonctions sont toutes deux positives, la proposée a ses racines, ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires. Les racines sont toutes imaginaires, lorsque d'ailleurs  $p$  est une quantité positive ; ou même, lorsque  $p$  étant négatif,  $p^2 - 4r$  est une quantité négative. Les racines sont toutes réelles, lorsque d'ailleurs  $p$  étant une quantité négative,  $p^2 - 4r$  est une quantité positive.

Le cas où ces deux fonctions seroient toutes deux négatives, ne peut avoir lieu.

(130.) Quand  $p^2 + 12r$  est une quantité négative, la proposée a essentiellement deux racines réelles & deux racines imaginaires.

*Méthode pour déterminer le signe des racines réelles des équations du troisième & du quatrième degré, par la seule inspection des conditions entre les constantes.*

(131.) Pour terminer ce que j'ai à dire sur le troisième & le quatrième degré, il me reste à donner la méthode propre à faire connoître le signe des racines réelles de ces équations. Quant aux racines imaginaires, comme elles n'ont, à proprement parler, aucun signe, ou que du moins leur signe me paroît indifférent; je me bornerai à déterminer ce qui est relatif aux racines réelles. Je commence par le troisième degré.

*Détermination du signe des racines réelles des équations du troisième degré.*

(132.) Pour entendre ce qui va suivre, on se rappellera (S. 17), 1.<sup>o</sup> que  $x^3 + px + q = 0$ , représente l'équation générale du troisième degré; 2.<sup>o</sup> que cette équation transformée suivant les principes du S. 4, conduit aux deux résultantes suivantes (S. 17).

$$(\alpha) \quad a^3 - 3ab^2 + ap + q = 0;$$

$$(\beta) \quad b^3 - 3a^2 - p = 0;$$

3.<sup>o</sup> que des deux résultantes  $(\alpha)$  &  $(\beta)$  l'on a tiré (S. 18) la résolvante

$$(\gamma) \quad 2a(4a^2 + p) - q = 0;$$

4.<sup>o</sup> que les trois racines du troisième degré sont, d'après les mêmes principes,

$$(1) \quad x = a + b\sqrt{-1},$$

$$(2) \quad x = a - b\sqrt{-1},$$

$$(3) \quad x = a'.$$

On se rappellera pareillement que lorsque  $3a^3 + p$  est une quantité négative, l'équation a ses trois racines réelles (S. 21); que lorsqu'au contraire  $3a^3 + p$  est une quantité positive, l'équation a une racine réelle & deux racines imaginaires. Voyons ce que l'on peut tirer de ces prémices.

(133.) Puisque dans l'équation  $x^3 + px + q = 0$ , le second terme, c'est-à-dire, celui qui seroit affecté de  $x^2$ , manque; on voit d'abord que la somme des racines de l'équation est nulle. On a donc

$$a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} + a' = 0;$$

d'où l'on tire

$$(1) \quad 2a + a' = 0.$$

J'observe en second lieu, que puisqu'en général (équat. (β)),

$$b = \pm \sqrt{3a^2 + p};$$

on a

$$b\sqrt{-1} - 1 = \pm \sqrt{-3a^2 - p}.$$

Si donc l'on veut déterminer quelle doit être la valeur particulière de  $a$ , pour que  $a = b\sqrt{-1}$ , l'on aura  $a = \pm \sqrt{-3a^2 - p}$ ; d'où l'on tire

$$(2) \quad 4a^2 + p = 0.$$

Tant que  $a$  est moindre que  $\pm \frac{\sqrt{-p}}{2}$ , c'est-à-dire, tant que  $4a^2 + p$  est une quantité négative,  $b\sqrt{-1}$  surpasse  $a$ ; lorsqu'au contraire  $a$  surpasse  $\pm \frac{\sqrt{-p}}{2}$ , c'est-à-dire, lorsque  $4a^2 + p$  est une quantité positive,  $b\sqrt{-1}$  est moindre que  $a$ . Tirons les conséquences de ces principes.

*Paragraphe dans lequel on démontre que, lorsque l'équation du troisième degré a une racine réelle & deux racines imaginaires, la racine réelle a essentiellement un signe contraire à celui de la quantité q dans la proposée.*

(134.) Lorsque la proposée a une racine réelle & deux racines imaginaires, la quantité  $3a^2 + p$  (S. 21), & à plus forte raison la quantité  $4a^2 + p$ , sont essentiellement positives. Mais de l'équation (γ) du S. 132, l'on tire

$$(1) \quad a = \frac{q}{2(4a^2 + p)}.$$

La valeur de  $a$  qui entre dans les expressions (1) & (2) de  $x$  du §. 132, a donc le même signe que la quantité  $q$  dans la proposée. Mais à cause de l'équation  $2a + a' = 0$ ,  $a'$  qui détermine la racine réelle de la proposée, a un signe contraire à  $a$ . La valeur réelle de  $x$  a donc un signe contraire à celui de la quantité  $q$  dans la proposée.

*Paragraphes dans lesquels on démontre que lorsque l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles, deux de ces racines ont essentiellement le même signe que la quantité  $q$  dans la proposée, & la troisième racine est de signe différent.*

(135.) Lorsque toutes les racines de l'équation du troisième degré sont réelles, la quantité  $3a^2 + p$  est essentiellement négative (§. 21). Mais il est évident que  $3a^2 + p$  peut être négatif, sans que pour cela  $4a^2 + p$  soit négatif. Donc lorsque toutes les racines de l'équation du troisième degré sont réelles, la quantité  $4a^2 + p$  peut être supposée indifféremment ou positive ou négative. Nous remarquerons seulement que si  $4a^2 + p$  est une quantité positive,  $b\sqrt{-1}$  est moindre que  $a$  (§. 133), & que par conséquent les valeurs (1) & (2) de  $x$  du §. 132 ont toutes deux le même signe que  $a$ . Si au contraire  $4a^2 + p$  est une quantité négative,  $b\sqrt{-1}$  est plus grand que  $a$  (§. 133); & quel que soit le signe de  $a$ , des deux valeurs (1) & (2) de  $x$  du §. 132, l'une est essentiellement positive, & l'autre négative.

(136.) Supposons d'abord que  $4a^2 + p$  est une quantité positive; à cause de l'équation (1) du §. 134, les valeurs de  $a$  qui entrent dans les expressions (1) & (2) de  $x$  du §. 132, & par conséquent (§. 132 & 133), les valeurs (1) & (2) de  $x$ , auront le même signe que la quantité  $q$  dans la proposée. Mais à cause de l'équation  $2a + a' = 0$ , la troisième valeur de  $x$  du §. 132, aura un signe différent que cette même quantité  $q$ ; la proposée aura donc deux racines réelles de même signe que la quantité  $q$ , & une racine de signe différent.

(137.) Supposons maintenant que  $4a^2 + p$  est une quantité négative. Les valeurs de  $a$  qui entrent dans les expressions (1) & (2) de  $x$  du §. 132, auront (§. 134) un signe différent de celui de la quantité  $q$  dans la proposée; & la troisième valeur de  $x$  aura le même signe que cette quantité  $q$ . Mais comme alors (§. 133)  $b\sqrt{-1}$  surpasse  $a$ ; quel que soit le signe de  $a$ , une des valeurs (1) & (2) de  $x$  du §. 132 est essentiellement positive & l'autre négative, & par conséquent l'une a le même signe que  $q$  dans la proposée; & l'autre un signe différent. Donc encore dans ce cas, la proposée a deux racines réelles de même signe que  $q$ , & une racine de signe différent.

(138.) Donc, en général, lorsque l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles, deux de ces racines ont essentiellement le même signe que la quantité  $q$  dans la proposée, & la troisième racine est de signe différent.

*Détermination du signe des racines réelles des équations du quatrième degré.*

(139.) Pour entendre ce qui va suivre, on se rappellera (§. 51) 1.<sup>o</sup> que  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ , représente l'équation générale du quatrième degré.

2.<sup>o</sup> Que cette équation transformée d'après les principes du §. 4, conduit aux résultantes suivantes (§. 51 & 52).

$$(\alpha) \quad a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + a^2p - b^2p + aq + r = 0;$$

$$(\beta) \quad 4a^3 - 4ab^2 + 2ap + q = 0;$$

$$(\alpha 1) \quad b^4 - 2a^2b^2 - pb^2 - 3a^4 - a^2p + r = 0.$$

3.<sup>o</sup> Que des deux résultantes  $(\alpha)$  &  $(\beta)$  l'on a tiré (§. 53) la résolvante,

$$(\gamma) \quad 4a^2 [(4a^2 + p)^2 - 4r] - q^2 = 0.$$

4.<sup>o</sup> Que les quatre racines du quatrième degré sont, d'après les mêmes principes,



$$(1) \quad x = a + b \sqrt{-1},$$

$$(2) \quad x = a - b \sqrt{-1},$$

$$(3) \quad x = a' + b' \sqrt{-1},$$

$$(4) \quad x' = a' - b' \sqrt{-1};$$

$b$  &  $b'$  étant d'ailleurs déterminés par les équations suivantes;

$$(5) \quad b = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}\right)},$$

&

$$(6) \quad b' = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}\right)};$$

ou

$$(7) \quad b = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}\right)},$$

&

$$(8) \quad b' = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}\right)}.$$

[5.° Que puisque dans l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

le second terme, c'est-à-dire celui qui seroit affecté de  $x^3$ , manque, la somme des racines de l'équation est nulle; que par conséquent,

$$a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} + a' + b'\sqrt{-1} + a' - b'\sqrt{-1} = 0;$$

d'où l'on tire

$$a + a' = 0.$$

*De la correspondance entre les quantités  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ ; & de la véritable forme des quatre valeurs de  $x$  du paragraphe précédent.*

(140.) Ce que l'on vient d'exposer dans le *paragraphe précédent*, laisse de l'incertitude sur la correspondance entre les quantités  $a$ ,  $a'$ ;  $b$ , &  $b'$ . En effet, puisque les valeurs de  $b$ ,  $b'$  peuvent être déterminées au moyen des équations (5) ou (7), (6) ou (8) du §. 139, & que d'ailleurs rien ne fixe le choix particulier que l'on doit faire de ces valeurs,

il pourroit rester quelque nuage sur la correspondance entre les quantités dont il vient d'être question. Cette incertitude se levera facilement par les réflexions suivantes.

(141.) De la résultante ( $\beta$ ) du §. 139, l'on tire

$$(1) \ a = \frac{q}{2(2b^2 - 2a^2 - p)}.$$

De la résultante ( $\alpha$  1) du même paragraphe, l'on tire (§. 55),

$$(2) \ 2b^2 = 2a^2 + p \pm \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}.$$

L'équation (1) du présent paragraphe devient donc

$$(3) \ a = \frac{q}{\pm 2\sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}.$$

(142.) Nous remarquerons que dans la dernière équation du §. 141,  $\sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$  est une quantité essentiellement réelle. Car si c'étoit une quantité imaginaire; 1.<sup>o</sup> la quantité  $a$  seroit imaginaire, ce qui est contre la supposition fondamentale du Mémoire; 2.<sup>o</sup> (§. 141 équation (2)),  $b^2$  seroit imaginaire, & par conséquent les quatre racines de l'équation seroient imaginaires; or ce cas ne fait point partie des recherches présentes, puisqu'il s'agit uniquement de déterminer le signe des racines de l'équation, lorsqu'elles sont réelles.

(143.) L'équation (3) du §. 141, démontre qu'il faut distinguer le cas, où dans la proposée,  $q$  est positif, d'avec celui où  $q$  est négatif.

Si  $q$  est positif; à la valeur positive de  $a$ , répond la valeur suivante de  $b^2$ ,

$$b^2 = \frac{2a^2 + p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2};$$

& à la valeur négative de  $a$ , répond la valeur suivante de  $b^2$ ,

$$b^2 = \frac{2a^2 + p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}.$$

Si  $q$  est négatif; à la valeur positive de  $a$ , répond la valeur suivante de  $b^2$ ,

$$b^2 = \frac{2a^2 + p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2},$$

& à la valeur négative de  $a$ , répond la valeur suivante de  $b^2$ ,

$$b^2 = \frac{2a^2 + p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}.$$

(144.) En réunissant toutes les remarques précédentes, on verra facilement que si dans la proposée,  $q$  est une quantité positive, les quatre racines de l'équation du quatrième degré, ont pour expression

$$(1) x = + a + \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(2) x = + a - \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(3) x = - a + \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(4) x = - a - \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}}.$$

(145.) Si  $q$  est négatif, les quatre racines de l'équation du quatrième degré, ont pour expression

$$(1) x = + a + \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(2) x = + a - \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(3) x = - a + \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(4) x = - a - \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}}.$$

(146.) On peut remarquer la correspondance des quatre valeurs de  $x$  des §. 144 & 145. La première valeur du §. 144, ne diffère que par le signe, de la quatrième valeur du §. 145. Il en est de même de la seconde valeur de  $x$  du §. 144, comparée à la troisième valeur du §. 145; & ainsi de suite.

*Paragraphes dans lesquels on détermine les cas où la valeur de  $a$  qui entre dans l'expression de  $x$  des paragraphes précédens, surpasse, égale, ou est moindre que la quantité comprise sous le radical.*

(147.) Pour déterminer le signe des racines de l'équation du quatrième degré, il est essentiel de connoître précisément dans quel cas la valeur de  $a$  qui entre dans l'expression de  $x$  des paragraphes précédens, surpasse, égale, ou est moindre que la quantité comprise sous le radical. En effet, si  $a$  étoit moindre que le radical, ce seroit le signe du radical qui décideroit du signe de la valeur de  $x$ . Si au contraire  $a$  étoit plus grand que le radical, ce seroit le signe de  $a$  qui décideroit du signe de  $x$ . Cette considération doit suffire pour faire sentir l'importance de la question.

(148.) Afin de résoudre la question dont il s'agit, je suppose une équation de la forme suivante,

$$(1) \quad a^2 + \mu = \frac{-2a^2 - p \mp \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2};$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad \mu^2 + \mu(4a^2 + p) + r = 0;$$

$$(3) \quad \mu = \frac{-4a^2 - p \mp \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}.$$

Je remarque que si  $\mu$  est une quantité positive,  $a^2$  est moindre que le carré de la quantité radicale qui entre dans l'expression de  $x$ ;  $a$  est par conséquent moindre que cette quantité radicale. Si au contraire  $\mu$  est une quantité négative,  $a$  est plus grand que la quantité radicale. Il faut donc déterminer dans quel cas  $\mu$  est une quantité positive, & dans quel cas  $\mu$  est une quantité négative.

(149.) Quant au cas où  $\mu$  seroit égal à zéro, & où, par conséquent,  $a$  seroit égal à la quantité radicale qui entre dans l'expression de  $x$ , il ne peut avoir lieu dans le quatrième degré; puisqu'alors (S. 148, équation (2)), on auroit  $r = 0$ ; ce qui abaisseroit la proposée, du quatrième degré au troisième.

*Paragraphes dans lesquels on examine ce qui a lieu lorsque*  
 $q = 0$  *dans la proposée.*

(150.) Nous avons démontré (§. 143), que relativement aux discussions dont il s'agit, il faut distinguer le cas où dans la proposée,  $q$  est positif, d'avec celui où  $q$  est négatif. Il paroît donc naturel d'examiner d'abord ce qui a lieu dans le point de passage, c'est-à-dire lorsque  $q = 0$ .

(151.) Si l'on suppose  $q = 0$  dans la proposée, elle se réduit à  $x^4 + px^2 + r = 0$ . Cette équation résolue par les méthodes du second degré, donne pour valeurs de  $x$ ,

$$x = \pm \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}},$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}.$$

Nous avons discuté (§. 57) la nature de ces racines, dans toutes les suppositions possibles sur  $p$  & sur  $r$ . Nous avons fait voir que si  $r$  est négative, quel que soit d'ailleurs le signe de  $p$ , la proposée a essentiellement deux racines réelles & deux racines imaginaires. Si  $r$  est positive &  $p$  positif, les racines de la proposée sont toutes imaginaires. Si  $r$  est positive &  $p$  négatif, les racines de la proposée, sont toutes réelles ou toutes imaginaires; toutes réelles, si  $p^2$  surpasse  $4r$ ; toutes imaginaires, si  $p^2$  est moindre que  $4r$ . Nous ajouterons seulement que dans tous les cas, le nombre des racines réelles positives est égal au nombre des racines réelles négatives. Ainsi donc, si la proposée a quatre racines réelles, deux de ces racines sont positives, & deux sont négatives; si la proposée n'a que deux racines réelles, une de ces racines est positive & l'autre est négative.

*Paragraphes dans lesquels on examine ce qui a lieu lorsque*  
 $q$  *est positif dans la proposée.*

(152.) Si dans la proposée,  $q$  est une quantité positive, l'on a vu (§. 144) que les quatre racines du quatrième degré ont pour expression

$$(1) x = + a + \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(2) x = + a - \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(3) x = - a + \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(4) x = - a - \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}}.$$

D'où l'on voit que pour juger du signe qu'auront les valeurs de  $x$ , il suffit de s'en assurer pour une valeur positive quelconque de  $a$ ; & par conséquent il suffira de substituer pour  $a$ , une quantité positive quelconque, dans les expressions (1), (2), (3), (4); & le signe qu'obtiendront les quatre résultats, sera le signe des valeurs de  $x$ , dans l'équation proposée.

(153.) Quant aux valeurs de  $\mu$ , on a (§. 148)

$$(1) \mu = \frac{-4a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2},$$

$$(2) \mu = \frac{-4a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}.$$

La première répond aux valeurs (1), (2) de  $x$  du paragraphe précédent; la seconde répond aux valeurs (3) & (4) de  $x$  du même paragraphe.

*Examen de ce qui a lieu, lorsque  $q$  étant positif dans la proposée,  $r$  &  $p$  sont également positifs.*

(154.) J'observe d'abord que si  $r$  est positive dans la proposée,  $\sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$  est moindre que  $4a^2 + p$ . Le signe des deux valeurs de  $\mu$  du paragraphe précédent, dépend donc du signe de la quantité  $-4a^2 - p$ ; d'où l'on voit que si  $p$  est d'ailleurs positif, les deux valeurs de  $\mu$  sont négatives. On doit donc conclure (§. 148) qu'indistinctement,

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}}.$$

Des quatre valeurs (1), (2), (3), (4) de  $x$  du §. 152, les deux premières sont donc positives, & les deux dernières sont négatives; pourvu toutefois que ces valeurs soient réelles. Il faut maintenant rapprocher ces résultats, de ce qui a été démontré sur la nature des racines de l'équation.

(155.) Nous avons dit (§. 129), que si l'on prend les deux fonctions suivantes,

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} - p^3 + 36pr - \frac{27q^2}{2},$$

$$(p^2 + 12r)^{\frac{3}{2}} + p^3 - 36pr + \frac{27q^2}{2};$$

& que relativement à ces fonctions, l'on constate si elles sont positives ou négatives. Si de ces deux fonctions, l'une est positive & l'autre est négative, la proposée a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

Si ces deux fonctions sont toutes deux positives, la proposée a ses racines, ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires. Les racines sont toutes quatre imaginaires, lorsque d'ailleurs  $p$  est une quantité positive. Les racines sont toutes réelles, lorsque d'ailleurs  $p$  étant une quantité négative,  $p^2 - 4r$  est une quantité positive.

Le cas où les deux fonctions seroient toutes deux négatives, ne peut avoir lieu.

Nous ne parlons point ici du cas où  $p$  étant négatif dans la proposée, & les fonctions précédentes étant toutes deux positives,  $p^2 - 4r$  est une quantité négative. Les quatre racines de l'équation sont alors imaginaires (§. 129). Mais comme ce cas ne peut avoir lieu (§. 116), qu'autant que  $q$  est égal à zéro dans la proposée, & qu'il a été discuté particulièrement (§. 150 & 151), il est inutile de le rappeler ici.

(156.) Puisque dans la supposition dont il s'agit,  $p$  est positif, il est d'abord évident, d'après ce qui vient d'être dit, que la proposée a ou ses quatre racines imaginaires, ou au moins deux de ses racines imaginaires. Si les quatre racines sont imaginaires, c'est-à-dire, si les deux fonctions

du §. 155 sont toutes deux positives, il n'y a rien à chercher, attendu que nous ne considérons que le signe des racines réelles. Il ne peut donc y avoir d'incertitude que dans le cas où deux des racines seroient réelles; c'est-à-dire, dans le cas où des deux fonctions du §. 155, l'une seroit positive & l'autre seroit négative.

(157.) Ce dernier symptôme, lorsqu'il a lieu, apprend que des quatre valeurs de  $x$  du §. 152, deux sont réelles & deux sont imaginaires; & il n'est plus question, pour avoir le signe des racines réelles de la proposée, que de décider lesquelles des deux valeurs ou (1) & (2), ou (3) & (4) sont réelles, lesquelles sont imaginaires. Or cette décision ne présente aucune difficulté. Car, puisque  $p$  &  $r$  sont positifs, par la supposition, & que l'on fait d'ailleurs que des valeurs ou (1) & (2), ou (3) & (4), deux sont réelles & deux sont imaginaires; il est facile de voir, par la seule inspection de ces valeurs, que les racines imaginaires sont essentiellement les racines (1) & (2), & que les racines réelles sont les racines (3) & (4); puisque la quantité qui se trouve sous le radical que renferment ces deux dernières valeurs, est, si je puis m'exprimer ainsi, plus positive que la quantité qui se trouve sous le radical que renferment les valeurs (1) & (2). Mais par l'hypothèse,

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}};$$

le signe des valeurs (3) & (4) de  $x$  est donc déterminé par le terme  $-a$ ; les valeurs réelles de l'équation sont donc négatives.

(158.) Donc, lorsque  $q$  étant positif dans la proposée;  $p$  &  $r$  sont également positifs, & que de plus le symptôme du §. 155, a fait voir que cette proposée a deux racines réelles, ces racines sont négatives.



*Examen de ce qui a lieu lorsque q étant positif dans la proposée, r est positive & p négatif.*

(159.) Si  $r$  est positive dans la proposée, il est évident que  $\sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}$  est moindre que  $4a^2 + p$ . Le signe des deux valeurs de  $\mu$  du §. 153, dépend donc du signe de la quantité  $-4a^2 - p$ . Mais quand  $p$  est négatif, la quantité  $-4a^2 - p$  n'est plus essentiellement négative, comme dans le cas où  $p$  est positif. Cela dépend du rapport entre  $4a^2$  &  $p$ .

(160.) Si  $-4a^2 - p$  est une quantité négative, les deux valeurs de  $\mu$  du §. 153 sont négatives, & l'on a indistinctement, §. 148,

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}},$$

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}}.$$

Les valeurs (1) & (2) de  $x$  du §. 152, sont donc positives, & les valeurs (3) & (4) sont négatives.

(161.) Si  $-4a^2 - p$  étoit une quantité positive, les deux valeurs de  $\mu$  du §. 153 seroient positives, & l'on auroit indistinctement §. 148,

$$a \text{ moindre que } \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}},$$

$$a \text{ moindre que } \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}}.$$

Les valeurs (1) & (3) de  $x$  du §. 152 seroient positives, & les valeurs (2) & (4) seroient négatives.

(162.) On voit par-là que, si les quatre racines de la proposée sont réelles, ce que l'on connoîtra par les symptômes du §. 155, deux de ces racines seront positives, & deux seront négatives.

Si les quatre racines sont imaginaires, il n'y a rien à déterminer, puisque nous considérons uniquement le signe des

racines réelles de la proposée. Au reste ce cas, ainsi qu'il a été dit §. 155, se réduit à la supposition où  $q$  seroit égal à zéro dans la proposée.

(163.) Si deux des racines de la proposée sont réelles, & deux sont imaginaires, les valeurs réelles de  $x$  ne peuvent manquer d'être les valeurs (3) & (4) du §. 152; puisque la quantité qui se trouve sous le radical que renferment ces deux dernières valeurs, est, si je puis m'exprimer ainsi, plus positive que la quantité qui se trouve sous le radical que renferment les valeurs (1) & (2). C'est donc le signe des valeurs (3) & (4) de  $x$  du §. 152, qui détermine alors le signe des racines réelles de la proposée.

(164.) Pour déterminer dans ce cas, le signe des valeurs (3) & (4) de  $x$  du §. 152, on ne doit point oublier que nous avons démontré §. 142, que  $(4a^2 + p)^2 - 4r$  est une quantité essentiellement positive. Donc si l'on suppose une équation de la forme suivante

$$(1) \quad (4a^2 + p)^2 - 4r - \epsilon = 0,$$

dans cette équation  $\epsilon$  sera essentiellement positif.

(165.) De l'équation (1) du paragraphe précédent, l'on tire

$$4a^2 + p = \pm \sqrt{4r + \epsilon};$$

$$4a^2 = -p \pm \sqrt{4r + \epsilon}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de  $\mu$  du §. 153, elles deviendront,

ou

$$(1) \quad \mu = \frac{-\sqrt{4r + \epsilon} - \epsilon}{2},$$

$$(2) \quad \mu = \frac{-\sqrt{4r + \epsilon} + \epsilon}{2},$$

ou

$$(3) \quad \mu = \frac{\sqrt{4r + \epsilon} - \epsilon}{2},$$

$$(4) \quad \mu = \frac{\sqrt{4r + \epsilon} + \epsilon}{2}.$$

Pour fixer laquelle des deux combinaisons ou (1) & (2),

ou (3) & (4), a véritablement lieu, je reprends l'équation ( $\gamma$ ) du §. 139.

$$(\gamma) \quad 4a^2[(4a^2 + p)^2 - 4r] - q^2 = 0.$$

Dans cette équation, je substitue à  $(4a^2 + p)^2 - 4r$ , & à  $4a^2$ , leurs valeurs, & l'équation ( $\gamma$ ) se transforme dans les deux suivantes

$$(\gamma 1) \quad \frac{q^2}{\epsilon} = -p + \sqrt{(4r + \epsilon)},$$

$$(\gamma 2) \quad \frac{q^2}{\epsilon} = -p - \sqrt{(4r + \epsilon)}.$$

La première répond aux valeurs (1) & (2) de  $\mu$ , la seconde répond aux valeurs (3) & (4) de  $\mu$ .

(166.) Puisque par la supposition,  $\epsilon$  est positif, que  $r$  est positive &  $p$  négatif, il est évident que l'équation ( $\gamma 1$ ) donne essentiellement des valeurs réelles de  $q$ ; & que l'équation ( $\gamma 2$ ) ne donne des valeurs réelles de  $q$ , qu'autant que  $-p - \sqrt{(4r + \epsilon)}$  est une quantité positive, c'est-à-dire qu'autant que  $p^2 - 4r$  est une quantité positive. Mais lorsque  $p$  est négatif, & que  $p^2 - 4r$  est une quantité positive, les quatre racines de l'équation sont réelles (§. 155). Donc l'équation ( $\gamma 2$ ) ne peut donner des valeurs réelles de  $q$ , que lorsque les quatre racines de la proposée sont réelles. Donc, lorsque deux des racines sont seulement réelles, la seule équation ( $\gamma 1$ ) donne des valeurs réelles de  $q$ ; donc, alors, les seules valeurs (1) & (2) de  $\mu$  du §. 165, ont lieu; donc,  $\mu$  est négatif; donc,

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{1}};$$

les deux racines réelles de l'équation sont donc alors négatives.

*Examen de ce qui a lieu lorsque  $q$  étant positif dans la proposée,  $r$  est négative, &  $p$  positif ou négatif.*

(167.) Si  $r$  est négative dans la proposée, il est évident que  $\sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$  est essentiellement plus grand

que  $4a^2 + p$ . Des deux valeurs de  $\mu$  du §. 153, la première est donc négative, & la seconde est positive; & l'on a

$$a \text{ plus grand que } \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}},$$

$$a \text{ moindre que } \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{[(4a^2 + p)^2 - 4r]}}{2}}.$$

Des quatre valeurs de  $x$  du §. 152, la première & la seconde sont positives, la troisième est positive, & la quatrième est négative; pourvu toutefois que ces valeurs soient réelles.

Donc, si les quatre valeurs sont réelles, ce que l'on connoîtra par les symptômes du §. 155, trois des racines sont positives & une seulement est négative.

(168.) Si deux des valeurs sont réelles, & deux sont imaginaires, les valeurs réelles de  $x$  ne peuvent manquer d'être les valeurs (3) & (4) du §. 152; puisque, ainsi qu'il a déjà été remarqué plusieurs fois, la quantité qui se trouve sous le radical que renferment ces deux dernières valeurs, est plus positive, si je puis m'exprimer ainsi, que celle sous le radical que renferment les expressions (1) & (2) de  $x$ . Des deux racines réelles de l'équation, l'une est donc positive & l'autre est négative.

Si les quatre valeurs sont imaginaires, il n'y a rien à déterminer, puisque nous considérons uniquement le signe des racines réelles de la proposée.

*Paragraphes dans lesquels on examine ce qui a lieu lorsque  $q$  est négatif dans la proposée.*

(169.) Il nous reste maintenant à examiner ce qui a lieu lorsque  $q$  est négatif dans la proposée. Ce nouvel examen ne présente aucune difficulté, après la remarque que nous avons faite (§. 146), sur la correspondance des racines positives de l'équation dans ce cas, avec les racines négatives de cette même équation, dans l'hypothèse de  $q$  positif; & réciproquement.

(170.) Cette remarque fait voir tout de suite que, sans entrer dans un grand détail, on aura facilement le signe des racines pour toutes les suppositions sur  $p$  &  $r$ .

En effet, dans ce cas, on a pour les valeurs de  $x$  (§. 145),

$$(1) \ x = + a + \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(2) \ x = + a - \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(3) \ x = - a + \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}},$$

$$(4) \ x = - a - \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}};$$

& pour valeurs de  $\mu$ ,

$$(1) \ \mu = \frac{-4a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2},$$

$$(2) \ \mu = \frac{-4a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}.$$

La première de ces valeurs de  $\mu$ , répond aux valeurs (1) & (2) de  $x$ , & la seconde répond aux valeurs (3) & (4) de  $x$ .

*Examen de ce qui a lieu, lorsque  $q$  étant négatif dans la proposée,  $r$  &  $p$  sont positifs.*

(171.) J'observe d'abord que si  $r$  est positive dans la proposée,  $\sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}$  est moindre que  $4a^2 + p$ . Le signe des deux valeurs de  $\mu$  du paragraphe précédent, dépend donc du signe de  $-4a^2 - p$ ; & comme  $p$  est positif, les deux valeurs de  $\mu$  sont négatives. On doit donc conclure (§. 148) qu'indistinctement

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}};$$

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\frac{-2a^2 - p - \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}}.$$

Des quatre valeurs (1), (2), (3), (4) de  $x$  du §. 170, les deux premières sont donc positives & les deux dernières sont négatives, pourvu toutefois que ces valeurs soient réelles.

Mais il suit du §. 156, que dans le cas dont il s'agit, la proposée a, ou les quatre racines imaginaires, ou au moins deux de ses racines imaginaires. Si les quatre racines sont imaginaires, c'est-à-dire, si les deux fonctions du §. 155, sont toutes deux positives, il n'y a rien à chercher, attendu que nous ne considérons que le signe des racines réelles. Il ne peut donc y avoir d'incertitude que dans le cas où deux des racines seroient réelles, c'est-à-dire, dans le cas où des deux fonctions du §. 155, l'une seroit positive, & l'autre seroit négative.

(172.) Ce dernier symptôme, lorsqu'il a lieu, apprend que des quatre valeurs de  $x$  du §. 170, deux sont réelles, & deux sont imaginaires; & il n'est plus question, pour avoir le signe des racines réelles de la proposée, que de décider lesquelles des deux valeurs, ou (1) & (2), ou (3) & (4) sont réelles, lesquelles sont imaginaires. Or cette décision ne présente aucune difficulté; & les racines réelles sont essentiellement les racines (1) & (2), puisque la quantité qui se trouve sous le radical que renferment ces valeurs, est si je puis m'exprimer ainsi, plus positive que la quantité qui se trouve sous le radical que renferment les valeurs (3) & (4). Mais par l'hypothèse,

$$a \text{ surpasse } \sqrt{\frac{-2a^2 - p + \sqrt{(4a^2 + p)^2 - 4r}}{2}}.$$

Le signe des valeurs (1) & (2) de  $x$  est donc déterminé par le terme  $-a$ ; les valeurs réelles de l'équation sont donc positives.

(173.) Donc, lorsque  $q$  étant négatif dans la proposée,  $p$  &  $r$  sont positifs, que de plus, le symptôme du §. 155 a fait voir que cette proposée a deux racines réelles, ces racines sont positives.

*Examen de ce qui a lieu lorsque  $q$  étant négatif dans la proposée,  $r$  est positive &  $p$  négatif.*

(174.) Si  $q$  est négatif dans la proposée,  $r$  positif &  $p$  négatif, on démontrera par des raisonnemens analogues à ceux

des §. 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165 & 166, que si les quatre racines sont réelles, deux seront positives & deux seront négatives. Si deux des racines sont réelles & deux sont imaginaires, les deux racines réelles seront positives.

*Examen de ce qui a lieu, lorsque  $q$  étant négatif dans la proposée,  $r$  est négative, &  $p$  positif ou négatif.*

(175.) Si  $q$  est négatif dans la proposée,  $r$  négative &  $p$  positif ou négatif, on démontrera par des raisonnemens analogues à ceux des §. 167 & 168, que si les quatre valeurs de l'équation sont réelles, ce que l'on connoîtra par les symptômes du §. 155, trois des racines seront négatives, & une sera positive. Si deux seulement des racines sont réelles, l'une de ces racines sera positive, & l'autre sera négative.

*Récapitulation sommaire de ce qui vient d'être démontré sur le signe des racines réelles des équations du troisième & du quatrième degré.*

(176.) Ce que nous venons de démontrer relativement au signe des racines réelles des équations du troisième & du quatrième degré, se réduit à ce qui suit.

*Pour le troisième degré.*

(177.) Supposons que l'équation générale du troisième degré soit représentée par

$$x^3 + px + q = 0.$$

Si l'équation a deux racines imaginaires & une racine réelle, c'est-à-dire, si  $27q^2 + 4p^3$  est une quantité positive, la racine réelle a essentiellement un signe contraire à celui de la quantité  $q$  dans la proposée.

Si l'équation a ses trois racines réelles, c'est-à-dire, si  $27q^2 + 4p^3$  est une quantité négative, deux des racines ont essentiellement le même signe que la quantité  $q$  dans la proposée, & la troisième racine est de signe différent,

*Pour le quatrième degré.*

(178.) Supposons que l'équation générale du quatrième degré soit représentée par

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Si  $r$  &  $p$  sont positifs, la proposée ne peut avoir que deux racines réelles, quel que soit d'ailleurs le signe de  $q$ ; & les racines réelles sont négatives, si  $q$  est positif; les racines sont positives, si  $q$  est négatif.

Si  $r$  est positive &  $p$  négatif, & que les quatre racines de la proposée soient réelles; deux de ces racines sont positives, & deux sont négatives, quel que soit le signe de  $q$ .

Si  $r$  étant positive &  $p$  négatif, deux seulement des racines de la proposée sont réelles; les deux racines réelles ont un signe contraire à celui de  $q$  dans la proposée.

Si  $r$  est négative &  $p$  positif ou négatif, & que les quatre racines de la proposée soient réelles; trois des racines réelles ont le même signe que  $q$  dans la proposée, & la quatrième racine a un signe contraire à celui de  $q$ .

Si  $r$  étant négative &  $p$  positif ou négatif, deux seulement des racines de la proposée sont réelles; l'une de ces racines est positive, & l'autre négative, quel que soit le signe de  $q$ .

(179.) Quant au cas où  $q$  seroit égal à zéro dans la proposée; comme il a été complètement discuté (§. 151), soit relativement à la nature, soit relativement au signe des racines, nous renvoyons à ce paragraphe.

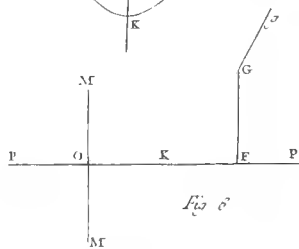
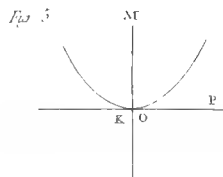
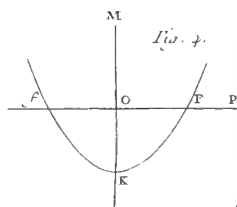
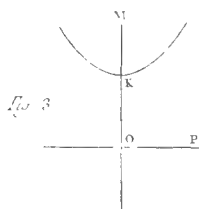
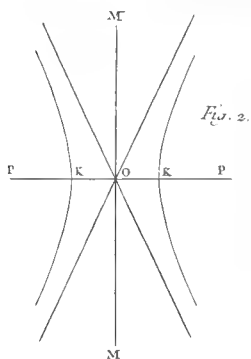
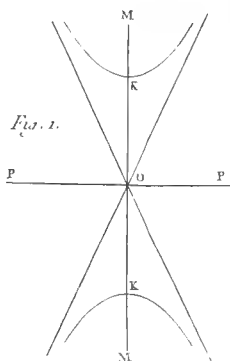
*Nota.* La longueur de ce travail & la quantité d'autres matières qui doivent trouver place dans ce Volume, m'obligent de remettre à une autre année, la publication de la suite de ce Mémoire.



SUITE

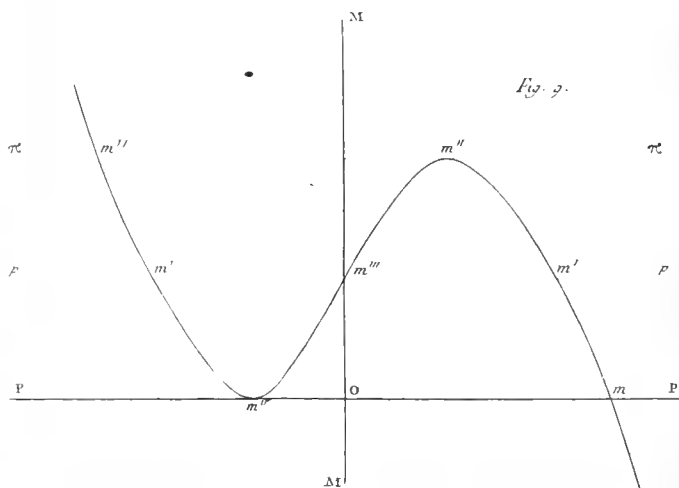
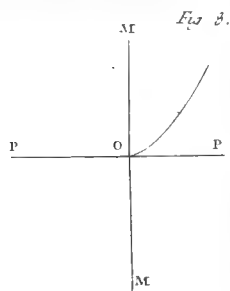
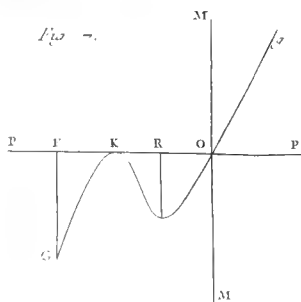




Pl 1<sup>re</sup>



Pl II.



Y. G. Sculp.

# SUITE DES RECHERCHES

SUR

LES VARIATIONS DE L'AIMANT,

*Aux chaînes des Montagnes en Normandie & d'abord  
dans l'Apennin.*

Par M. LE MONNIER.

**M.** MARALDI ayant trouvé avec deux bouffoles, une très-grande différence entre Périnaldo, au comté de Nice, & Paris, quant à la variation de l'Aimant; il n'est guère possible de se refuser à supposer quelques causes extraordinaires dans le magnétisme, ou quelque proximité de fer dans un lieu situé sur l'Apennin & entouré de collines: Périnaldo est d'ailleurs très-élevé au-dessus de la mer, puisque le baromètre, dans sa hauteur moyenne, n'y marque, selon M. Maraldi, que 26 pouces au-dessus du niveau.

Non-seulement ce qui a été observé autrefois à Lorette, à Naples & à Rome, & par Gassendi à Aix & à Marseille, détruit la grande différence que l'on trouve aujourd'hui dans les variations observées, comme je vais l'exposer tout-à-l'heure; mais d'ailleurs j'ai fait voir, il y a au moins six mois, dans un Écrit que j'ai lû à notre Assemblée, qu'entre Paris & Londres, la différence n'a jamais paru au-delà de 3 degrés dans le  $xv^{e}$  siècle, & qu'actuellement elle ne va pas au-delà d'un degré ou d'un degré & demi; ce qui est bien éloigné de 8 degrés qu'on trouve dans les variations de l'aimant entre Paris & Périnaldo. En 1670, selon M.<sup>rs</sup> Auzout & Picard,  $2^{\frac{1}{4}}$  à Rome, &  $1^{\frac{1}{2}}$  à Paris. Enfin à Rome, en 1695, selon M.<sup>rs</sup> Cassini, 7 degrés à l'église Saint-Pierre, ou  $7^{\frac{1}{2}}$  ailleurs, & selon M. de la Hire,  $6^{\frac{1}{2}}$  48' à Paris.

Varenus, au chap. 38 de la Géographie, donne la variation

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

M m m

de l'Aimant, à Paris en 1610, de 8 degrés, & dans le livre intitulé *Nautica Mediterranea de Crescentius*, publié à Rome en 1602, on trouve pareillement qu'elle n'étoit que de 8 degrés dans l'Est, ce qui s'accorde avec ce qu'on lit au *chap. VII* de la Magie naturelle de Baptista Porta, Napolitain, lequel dit qu'en Italie, vers 1530, comme sur tous les cadrans qu'on apportoit d'Allemagne, la variation de l'Aimant étoit réputée de son temps de 9 degrés à l'Est. Il paroît donc évident que sur la fin du *xvi.<sup>me</sup>* siècle, la variation étoit la même en Italie qu'à Paris\*, à très-peu de chose près. Voyons présentement ce qu'elle a dû être en ces derniers temps: la variation de l'aiguille est depuis cent ans Nord-ouest, comme l'on fait; c'est-à-dire, en sens contraire.

Or, M. de la Condamine, à la fin d'Avril 1756, déclare l'avoir trouvée à Notre-Dame de Lorette, de  $15^{\text{d}} 35'$ : on trouve son observation dans nos Mémoires de l'année suivante; j'aurois bien souhaité qu'elle eût été observée à Rome, ou bien qu'il y eût eu quelque vérification plus ample, soit par l'amplitude occidentale, soit par quelqu'azimuth dans l'ouest de Notre-Dame de Lorette. Quoi qu'il en soit, on trouve en effet que M. de la Condamine l'a établie en ce lieu, pour cette année-là de 2 degrés précisément moindre qu'à Paris, ce qui se rapproche un peu de l'observation faite tout récemment par M. Maraldi, quoiqu'on n'y aperçoive encore que le quart de la différence, ou des 8 degrés qu'on trouve entre Périnaldo & Paris. On remarquera qu'en 1695, au mois d'Octobre, elle étoit à Lorette, selon M.<sup>rs</sup> Cassini, de 7 degrés, & à Paris,  $6^{\text{d}} 48'$  selon M. de la Hire. A cette occasion, je vais donner ici quelques autres éclaircissimens au sujet de quelques chaînes de montagnes; savoir, celles qui approchent le plus de nos côtes maritimes sur l'Océan.

Je passe sous silence les détails topographiques des chaînes qui se terminent sous le parallèle de Paris, aux mêmes côtes

---

\* Voyez Tome VII, anciens Mém. de l'Académie, page 514

maritimes, & dont on connoît en général, outre leurs branches ou rameaux, celles qui se prolongent jusqu'à Avranches, celles qui bordent la rivière d'Orne, enfin, une autre plus à l'Est, mais parallèle au cours de la Dive: elles sont très-élevées en plusieurs endroits, jusqu'à environ quatre-vingts toises au-dessus du niveau de la mer, & j'ai trouvé cette année que le sommet de la forêt de Saint-Sever, où naît la source de la rivière de Sienne, n'est que de cinquante-cinq toises plus élevé que le Bourg de ce lieu. Or, la moyenne hauteur du baromètre a paru de vingt-sept pouces jusqu'ici au niveau du bourg de Saint-Sever.

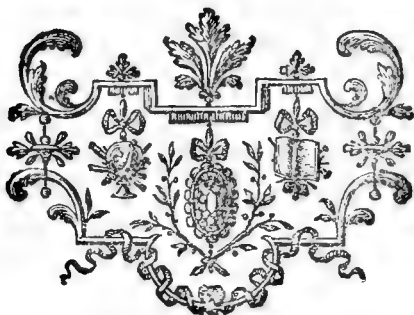
C'est en ce lieu, ou quinze toises plus haut, que j'ai observé cette année au solstice d'Été, outre les réfractions, la variation de l'Aimant par les amplitudes orientales & occidentales du Soleil, & après en avoir réitéré plusieurs fois l'expérience, à l'aide des objets que j'avois reconnus dans l'horizon & où j'ai eu tout le loisir de pointer à diverses heures du jour. Or, j'ai conclu la variation de l'Aimant de  $20^d 10'$ , ce qui est un peu moins qu'on ne l'a observé à Londres au même temps; savoir  $21^d 5'$ , & à peine d'un tiers de degré plus grande que celle que j'ai observée au mois de Mai à Paris.

A la vérité, les deux degrés de différence entre Paris & Londres, que M. Halley a établis sur la fin du dernier siècle, sont contredits par l'observation qu'en ont faite M.<sup>rs</sup> Flamstéed & Jacques Cassini d'une part, à Greenwich, sur la fin de l'hiver en 1698, ayant trouvé la variation de 7 degrés \* Nord-ouest, puisque de l'autre part M. de la Hire a trouvé,

En Octobre	{	1697.....	$7^d 40'$	
		1698.....	$7. 40.$	
Et en Octobre	{	1695.....	$6. 48.$	} au Nord-ouest.
		1696.....	$7. 8.$	

\* *Hist. Cælestis*, Tom. II, die 22 Julii  $7^d 25'$ .

Enfin, dans la seconde partie du *Tome VII* des anciens Mémoires de l'Académie, page 531, je trouve la variation de l'Aimant, à Périnaldo, de 8 degrés au Nord-ouest le 9 Janvier 1696 : on l'avoit trouvée à Gènes, vers Noël 1695, de 9 degrés, & nonobstant les chaînes de montagnes, elle n'étoit à Périnaldo que d'un degré plus grande qu'à Paris; ce qui s'accorde avec ce que Porta & Bellarmatus ont reconnu au Nord-est, en Italie comme en France, sur la fin du *xvi.<sup>me</sup>* siècle.





## REMARQUES

SUR

LA CARTE SUÉDOISE

DE

L'INCLINAISON DE L'AIMANT,

*Publiée à Stockholm dans le trimestre de Juillet, des Actes  
de l'Académie, année 1768.*

Par M. LE MONNIER.

LE peu d'observations exactes qui aient été publiées jusqu'à ce jour, sur l'inclinaison de l'aiguille aimantée, nous ont peu instruit sur la variation d'inclinaison de l'aiguille, & il seroit à souhaiter d'ailleurs qu'on en répât les observations dans les mêmes parties du monde où elle a été observée au commencement de ce siècle, parce que si elle a paru presque stationnaire à Paris ou à Londres & au détroit de Magellan, il ne s'ensuit pas qu'elle ait été sans variations sensibles en d'autres parties du monde. Je trouve, par exemple, qu'à Madère l'inclinaison a été observée sur le vaisseau l'*Endeavour*, commandé par le Lieutenant Cook, de 77<sup>d</sup> 18'  $\frac{1}{2}$ , en 1768, au lieu que la carte Suédoise de M. Wilcke n'admet que 65 à 65 degrés  $\frac{1}{2}$ , & même dans la baie du Bon-succès, qui fait partie de la terre de Feu, au détroit de le Maire, la même année 1768, on y a observé l'inclinaison de 68<sup>d</sup> 15', c'est-à-dire, environ deux degrés plus petite que selon la carte adoptée aux anciennes observations. On ne peut donc pas l'admettre absolument stationnaire vis-à-vis le détroit de Magellan, ni au cap Horn: cela est visible s'il n'y a pas d'erreur dans l'inclinaison observée en 1710, par le P. Feuillée, en ces parages, & qui sont, comme on l'a dit, les seules observations que

19 juillet  
1771.

M. Wilcke y ait employés. Il seroit sur-tout bien nécessaire que l'inclinaison de l'aiguille vers le Nord fût observée à *Canton* ; puisque sur la route tracée pour l'année 1700, dans le voyage fait à la Chine par M. Cunningham, on aperçoit au Nord-ouest de la nouvelle Hollande, en remontant vers Java, des différences de 8 à 9 degrés d'avec celles qui ont été données par le Capitaine Ékeberg, Suédois, en 1766. Or, puisqu'à *Canton* qui est par 23 degrés de latitude boréale, l'inclinaison a dû y paroître, au commencement du siècle, égale à 10 degrés ou environ, & cela vers le Nord, comme je l'ai déjà dit, on auroit par-là quelque notice de la variation dans l'inclinaison qui doit mieux se reconnoître là où elle change de dénomination, que vers le cap de Bonne-espérance & au détroit de Magellan ou cap Horn, là où elle a paru avoir à peine une variation sensible.

Il en est de même à l'entrée de la mer du Sud. Le P. Feuillée l'ayant observée soigneusement à Lima & au Callao de  $18^{\text{d}} \frac{1}{2}$  vers le Sud par 12 degrés de latitude australe, au lieu que sous l'équateur, en 1741, elle a paru proche cette mer en deux diverses stations inclinées de 10 à 15 degrés vers le Nord. J'ignore pourquoi la carte gravée ou carte Suédoise manque à la Vera-Cruz\* & aux environs de Quito & de Cuença, à moins que l'Auteur n'eût eu quelques soupçons qu'il n'a pu réaliser dans ces mers, sur les variations de l'inclinaison de l'aiguille, n'étant pas possible de trouver pour une même époque, à la mer du Sud vis-à-vis du Pérou, le point où elle a dû être nulle vers 1750. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'elle varie peu en déclinaison, puisqu'au Callao, trente-quatre ans après le P. Feuillée, M.<sup>rs</sup> les Officiers espagnols ont vu l'effet de la déclinaison ou de la variation au Nord-est, à peine augmentée, ou plus grande d'environ 3 degrés ; mais au contraire il y a bien de l'apparence, d'après les observations faites à Cayenne, à Quito & à Cuença, que l'inclinaison y a dû diminuer pendant les mêmes intervalles de temps.

---

\* 1769, Incl. à la Vera-Cruz, 40 degrés  $\frac{3}{4}$ .

Il n'est pas possible de faire usage d'une seule inclinaison que M. de Bougainville rapporte comme ayant été faite dans le détroit de Magellan, où elle a paru de  $11^{\text{d}} 11'$ . Quand on prendroit le complément de ce nombre, elle se trouveroit au moins  $10^{\text{d}} \frac{1}{2}$  plus grande que par les observations modernes faites sur l'*Endeavour*, vaisseau de guerre, qui s'est trouvé aux mêmes parages une année après M. de Bougainville.

Au reste, on ne conçoit pas non plus pourquoi la carte Suédoise suppose depuis 1710, un changement de 5 degrés dans l'inclinaison de l'aiguille sur la mer du Nord vers l'Amérique septentrionale, lorsque le P. Feuillée a repassé de la Martinique en Europe : l'Auteur de cette carte suppose qu'elle a augmenté dans toute l'étendue de la mer du Nord; il se fonde sur les observations faites à Londres depuis 1576; mais il paroît d'abord qu'elle est presque stationnaire par les observations de M. Graham, comparées à celles de Nortman; & même il y a des preuves qu'à Londres depuis 1723, jusqu'à ce jour, l'inclinaison a dû diminuer à peine, ainsi qu'à Paris depuis le retour du voyage fait par M. Richer en l'île Cayenne; celui-ci a trouvé, il y a cent ans, l'inclinaison de l'aiguille à Paris de 75 degrés, ce qui a été vérifié avec la même aiguille avant & après son voyage, & il est certain aujourd'hui que l'inclinaison est de 3 degrés plus petite; c'est donc tout le contraire de ce qu'a allégué M. Wilcke dans ses conjectures.

M. Thibault de Chanvallon, dont les papiers sont séquestrés, m'a assuré avoir observé l'inclinaison de l'aiguille en l'île Cayenne, ce qui donneroit la différence ou variation dans cette inclinaison, depuis M. Richer, dont l'inclinaison observée en cette île, se trouvoit de 50 degrés. La Carte Suédoise ne représente pas, à beaucoup près cette inclinaison, ce qui détruit l'opinion de l'auteur sur la correction qu'il faut faire aux observations de l'année 1710, comme on l'a dit, sur la mer du Nord. Ce seroit, dis-je, encore une fois, tout le contraire de ce que l'auteur admet, & ne valoit-il pas mieux rapporter les observations de Cayenne dans sa dissertation,

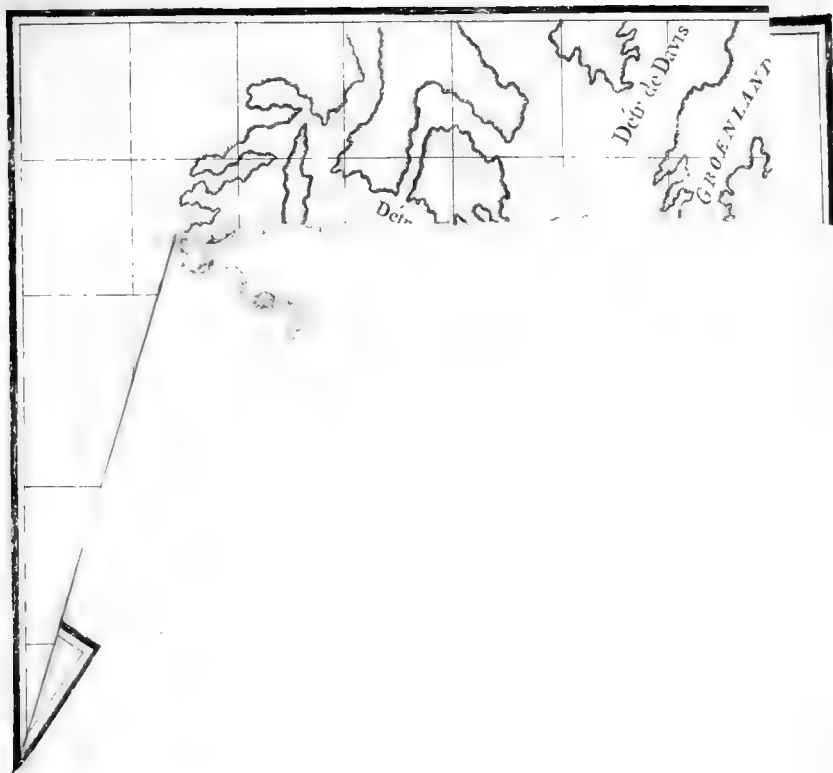
& prendre un milieu entre ce que le P. Feuillée a observé un peu plus à l'Est à pareilles latitudes, pour établir enfin la position pour 1700, de la courbe magnétique qui doit passer par Cayenne?

*Avertissement concernant la Carte Suédoise.*

On a fait graver cette Carte réduite, telle qu'elle a été publiée, & sans y rien retrancher ou changer absolument; quoique ce fut un espèce de canevas qu'il eût fallu refondre en entier; mais il vaut mieux attendre que nous soyons dans le cas de recueillir un plus grand nombre d'observations sur l'inclinaison de l'aiguille.

Dans la partie supérieure, à la droite de cette Carte, on y a ajouté les villes de l'Empire Russe, & sur-tout celles de Lapponie & de Sibérie, où la variation de l'aimant a été observée à l'occasion des deux passages de Vénus sur le Soleil, & on ne sera pas fâché de voir ajouter aussi la direction actuelle de la ligne sans déclinaison, qui passe près Kola & le cap Comorin, aux Indes orientales; on a ajouté de plus, vers la gauche, les stations au Pérou & à la nouvelle Espagne, où l'inclinaison de l'aiguille a été observée vers 1740 & en 1769.

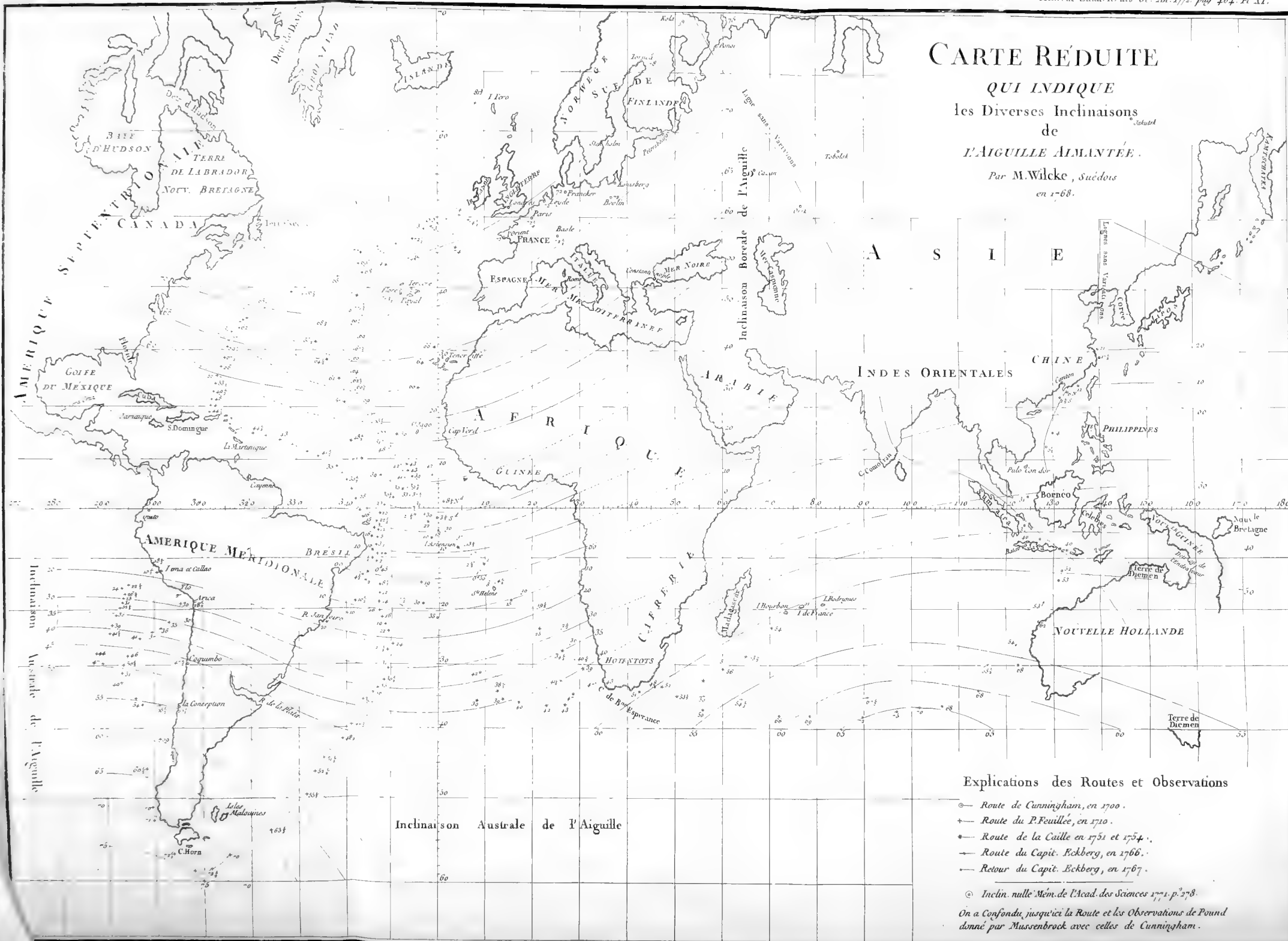




# CARTE RÉDUITE

QUI INDIQUE  
les Diverses Inclinaisons  
de  
l'AIGUILLE AIMANTÉE.

Par M. Wilcke, Suédois  
en 1768.



## Explications des Routes et Observations

- Route de Cunningham, en 1700.
- Route du P. Feuillée, en 1710.
- Route de la Caille en 1751 et 1754.
- Route du Capit. Beckberg, en 1766.
- Retour du Capit. Beckberg, en 1767.

⊙ Incl. nulle Mém. de l'Acad. des Sciences 1771. p. 278.

On a Confondu jusqu'à la Route et les Observations de Pound  
donné par Mussenbroek avec celles de Cunningham.

## R É P O N S E

À quelques Remarques critiques, relatives à un fait  
consigné dans un de mes Mémoires, imprimé parmi  
ceux que l'Académie a publiés pour l'année 1757.

Par M. DE LASSONE.

L'ANNÉE dernière (1775) il parut un Ouvrage imprimé à Amsterdam, & qui s'est vendu à Paris chez Didot, Libraire. Il est intitulé, *Traité de la Dissolution des Métaux* (a). En le lisant, j'ai trouvé dans le Chapitre où il s'agit des dissolutions d'Antimoine, des Remarques relatives à une Observation que j'ai détaillée dans un de mes Mémoires imprimé dans le Recueil de ceux que l'Académie des Sciences a publiés en 1757. Dans ce Mémoire, où il s'agit principalement de la combinaison de l'acide marin avec l'antimoine, je parle d'un sel neutre particulier qui résulte de cette combinaison. Après en avoir examiné les principaux caractères, après avoir déterminé quelques traits de ressemblance qu'il me parut avoir avec le sel fédatif, & plusieurs propriétés par lesquelles il en diffère essentiellement, sur-tout par la base purement antimoniale; enfin après avoir recherché soigneusement dans les ouvrages de Chimie déjà publiés, si quelque Auteur n'en avoit pas déjà fait mention, je dis, en rapportant un passage tiré des anciens Volumes de l'Académie, & où il est question de quelques observations faites sur l'antimoine, que Hombert seul, Auteur de ces observations, sembleroit peut-être avoir entrevu cette matière saline; quoique ce qu'il énonce à ce sujet en quatre mots, ne puisse donner lieu qu'à un simple soupçon. Et je conclus en affirmant que nul Chimiste, avant moi, n'avoit

(a) L'Auteur est M. Monnet.

fait connoître aussi particulièrement cette espèce de sel neutre antimonial.

L'Auteur du *Traité de la dissolution des Métaux*, en examinant les détails que je donne de ce sel antimonial, & auxquels il joint ses propres observations, fait deux remarques principales que l'on peut regarder comme critiques; l'une des deux au moins a-t-elle bien ce caractère. « Notre sel, » dit cet Auteur, (b), est décrit (par M. de Laffone) comme » semblable au sel sédatif; mais il n'y a que la ressemblance » qu'il peut y avoir entre ces sels, à l'égard de leur configuration, qui peut avoir porté cet habile Médecin à le désigner » ainsi. Vouloir y trouver d'autre conformité, ce seroit s'abuser grossièrement. »

Or pour démontrer que je ne me suis pas abusé aussi grossièrement, que cela même ne m'eût pas été possible, il me suffit ici de renvoyer à tout ce que j'ai dit sur la formation & les caractères du sel antimonial. Mon opinion sur la similitude des deux sels, comme sur leur différence, n'y est pas équivoque.

Voici l'autre objet de critique beaucoup plus direct & plus décidé.

« Remarquons, dit ce même Auteur du *Traité de la* » *Dissolution des Métaux* (c), que M. Cartheuser, long-temps » avant M. de Laffone, avoit très-bien observé & décrit ce » sel . . . . Ses observations là-dessus se trouvent imprimées » dans le second Volume de l'Académie d'Erford. On ne » sauroit trop, continue cet Auteur, multiplier ces sortes » d'observations, puisqu'elles établissent un genre particulier de » sel métallique très-différent de ceux qui résultent des mêmes » métaux pourvus de tout leur phlogistique. Malgré l'importance » de ces observations, il ne paroît pas que le commun de nos » Chimistes y aient fait la moindre attention. Plusieurs livres » de Chimie publiés depuis les observations de M.<sup>rs</sup> Cartheuser & Laffone n'en font nulle mention. »

(b) *Traité de la dissolution des Métaux*, pages 252 & 253.

(c) *Même Traité*, pages 253 & 254.



Par la double assertion que contient ce passage rapporté en entier, il paroîtroit bien décidé que long-temps avant moi, M. Cartheuser avoit observé & bien décrit ce sel dans un Mémoire particulier, imprimé dans le second volume des Actes de l'Académie d'Erfort; que par conséquent il est le premier auteur de la découverte, & que je n'ai eu d'autre mérite, en publiant mes observations relatives au même objet, que d'avoir confirmé celles de M. Cartheuser, & long-temps après lui.

Deux mots vont constater les époques véritables, répondre à tout, & rendre à chacun ce qui lui appartient.

Mon Mémoire où se trouvent les faits en question, a été publié parmi ceux de l'Académie en 1757.

Le second volume des Mémoires de l'Académie d'Erfort, où est consignée l'observation de M. Cartheuser, n'a été imprimé qu'en 1761, quatre ans après le premier; il n'y a pas eu d'autre édition, & M. Cartheuser n'a parlé de ce nouveau sel d'antimoine dans aucun autre de ses ouvrages antérieurs à celui-ci.

Il est donc évident que j'avois fait connoître le nouveau sel d'antimoine, quatre ans avant que les observations de M. Cartheuser sur le même objet eussent été rendues publiques.

L'Auteur du *Traité des Dissolutions Métalliques* a donc ici bien peu consulté la vérité en affectant deux fois, & d'un ton si décidé, de me priver en faveur d'un autre Chimiste, d'une antériorité qui m'appartient d'une manière aussi incontestable, & que j'ai droit de réclamer, en me disculpant ainsi devant l'Académie, d'une espèce de plagiat qu'on a prétendu sans doute m'imputer, & qui, s'il étoit réel, seroit toujours répréhensible, n'eût-il été fait que par inadvertence, ou par négligence, ou par oubli.



## M É M O I R E

*Où l'on prouve la nécessité de recourir à l'Art, pour corriger & prévenir les difformités de la taille qui surviennent dans un âge avancé; & où l'on démontre le danger qu'il y a d'employer l'Art pour prévenir indistinctement ces mêmes difformités dans le bas âge.*

Par M. P O R T A L.

**I**L est une beauté parmi les hommes, qui n'est point de pure convention, & qui consiste dans la juste proportion des membres du corps de chaque individu. Cette régularité est d'autant plus précieuse, que sa perte entraîne ordinairement celle de la santé. Chaque homme est donc doublement intéressé à conserver cette beauté que la Nature lui refuse rarement, mais que des accidens lui dérobent trop souvent, & qu'il perd quelquefois par la faute de ceux qui président à l'éducation de son enfance. Je le ferai voir dans ce Mémoire où je me suis moins attaché aux agrémens du langage, qu'à la solidité des observations. L'utilité doit être le premier objet des travaux & des études du Médecin. On ne sauroit disconvenir que la régularité de la taille ne soit un des principaux objets de cette proportion qui fait la beauté & par conséquent la santé du corps, qui en est une suite naturelle. La force des membres ne dépend pas seulement de celle de leurs muscles, elle dépend encore de la disposition des pièces osseuses qui la composent.

Dans le dérangement de l'épine, la ligne verticale du corps & le centre de gravité changent de place, les muscles qui couvrent cette épine, ou qui y sont attachés, perdent leur direction naturelle pour en prendre une vicieuse: ils sont obligés de se contracter plus violemment pour produire le même effet, soit dans la marche, soit dans la station.

Ainsi l'homme consume en pure perte une partie de ses forces, lors même qu'il manque de celles qui lui sont nécessaires pour remplir les fonctions les plus essentielles à la vie. La circulation du sang dans le cerveau est plus ou moins dérangée par la compression que les vertèbres cervicales exercent sur les artères ou sur les veines du cou; le cœur est plus ou moins resserré & déplacé par les côtes; les poumons sont comprimés & par les os de la poitrine & par le diaphragme. Ainsi ceux qui ont l'épine dérangée, souffrent plus ou moins de la respiration; & le sang & les esprits qui en émanent, sont, pour ainsi dire, arrêtés dans leurs propres sources.

Jusqu'ici l'état des viscères du bas-ventre a peu fixé l'attention des Médecins. Cependant cet objet étoit bien digne de leurs observations : tantôt on trouve chez les hommes qui ont l'épine dérangée, le foie écrasé par la colonne vertébrale qui s'est déjetée; tantôt c'est la rate qui souffre une pareille compression par la déviation de l'épine, & plus souvent encore l'estomac pressé de toutes parts descend jusqu'à l'ombilic ou plus bas; les intestins changent aussi souvent de place, & de toutes ces compressions & déplacements, il survient un grand nombre d'accidens, les uns plus fâcheux que les autres. Que de jaunisses & de coliques les Médecins n'ont-ils pas eu à traiter, & qui provenoient de cette seule cause? On lit dans les *Éphémérides des Curieux de la Nature*, qu'un bossu étoit obligé de rendre ses urines presque à chaque pas qu'il faisoit, parce que les vertèbres de la portion lombaire de l'épine comprimoient l'un des reins, & en exprimoient la liqueur qu'il contenoit. Il est constaté par une observation du célèbre *Marcus Aurelius Severinus*, ancien Professeur d'Anatomie à Naples, qu'une dame bossue ressentoit des douleurs très-vives sur une des cuisses, & qu'on ne l'a guérie qu'en soutenant son épine. Madame la Comtesse de Roye dont j'ai donné l'histoire à l'Académie, se plaignoit de très-vives douleurs au bout du pied gauche, trois ou quatre heures après avoir mangé; on applique différens topiques sur l'endroit douloureux; on prescrit des

remèdes intérieurs, mais sans succès. L'ouverture du cadavre a fait voir que ces douleurs étoient produites par la compression que l'intestin colon & les fausses côtes faisoient sur les nerfs lombaires.

Je ne finirois point, si je faisois l'énumération de toutes les altérations qui sont la suite des dérangemens de l'épine; je ferois voir d'après M. Haller, que les vaisseaux se plient & replient de diverses manières; que souvent le sang les dilate & les rompt; je prouverois d'après M. Morgagni, que les bossus sont plus sujets à quelques hernies que les autres personnes; j'établirais d'après tous les Accoucheurs, que certaines dispositions de l'épine rendent l'accouchement plus ou moins difficile, ou même impossible. En un mot, il seroit facile de démontrer que les dérangemens de l'épine troublent les fonctions de l'homme de diverses manières, & que le moindre des inconvéniens, quoique fort grand, est la gêne qu'il éprouve dans sa marche.

Il faut observer que les accidens ne sont pas également graves dans ceux qui sont devenus bossus dans un âge tendre, que dans ceux qui le sont devenus dans la suite: plus les parties ont leur tissu foible, lâche & flexible, mieux elles s'accommodent aux diverses courbures de l'épine: plus au contraire elles ont acquis de consistance, & moins elles cèdent & obéissent à l'épine, lorsqu'elle se dérange. Nous nous sommes convaincus par l'observation, que quelque contournée que soit l'épine d'un enfant, ou d'un adulte, devenus bossus dans la jeunesse, l'aorte l'accompagne toujours, & se replie sur elle conformément à ses contours. Si des cavités de la poitrine l'une est plus petite que l'autre, le poumon les remplit toujours également, au moins dans le bas âge; ses lobes croissent à proportion de l'espace libre qu'ils trouvent.

Les viscères du bas-ventre qui n'ont point encore pris tout leur accroissement, s'insinuent dans les vides, & éludent la compression de l'épine; la matière nourricière se porte toujours où elle trouve moins de résistance, & si elle ne

peut augmenter le volume des viscères d'un côté, elle l'augmente de l'autre, mais alors leur figure change; c'est ce que j'ai observé sur des enfans bossus, sur des personnes qui l'étoient devenues dans un âge un peu plus avancé, je veux dire avant quinze ou vingt ans; chez ces derniers, on trouve toujours la figure des viscères différente de la figure naturelle; mais elle est toujours telle, que ces viscères correspondent les uns aux autres, & qu'ils sont placés de manière à remplir tous les interstices.

Par cet arrangement qui est, pour ainsi dire, devenu naturel par la suite de l'âge, les fonctions sont moins troublées; mais dans les adultes & dans les vieillards qui deviennent bossus, lorsque les viscères ont pris leur dernier accroissement, les symptômes produits par la déformation de l'épine, sont plus graves & plus dangereux; les viscères ne se déplacent qu'en souffrant de rudes compressions; leurs ligamens sont distendus. Soit que les malades marchent, ou qu'ils se tiennent debout, ils sentent des tiraillemens dans l'épine plus ou moins considérables selon leur situation. Les pièces qui composent la colonne vertébrale, ne répondent plus les unes aux autres, & fortement pressées par le poids des parties supérieures, elles tendent toujours à se déplacer, & elles ne sont maintenues dans leur position, que par les ligamens & par les muscles. Mais avant que d'expliquer le mécanisme des bosses qui surviennent dans un âge avancé, avant que d'indiquer les moyens qu'il faut employer pour en prévenir l'augmentation, ou pour rendre les bosses supportables, il est bon d'établir en faveur de ceux qui pourroient en douter, qu'il est très-vrai qu'on peut devenir bossu dans un âge avancé.

*Observations sur un dérangement considérable de la taille, survenu dans un âge avancé.*

En 1767, une Dame de Province, âgée de quarante-six à quarante-huit ans, vint à Paris pour des affaires particulières; elle avoit une fort belle taille, elle étoit d'une bonne consti-

tution, & jusque-là elle avoit fait usage de corps assez étroits : tout-à-coup elle se sent saisie d'une fièvre putride ; je la vis d'abord seul, ensuite avec M. Ferrein ; elle se releva de sa maladie, mais elle eut une convalescence fort longue ; je la perdis de vue, six mois après j'appris qu'elle étoit restée bossue & tellement inclinée, que sa tête & la poitrine penchoient du côté droit, & qu'elle ne pouvoit se soutenir qu'à la faveur d'une béquille ; sans ce secours, elle tomboit toujours sur le côté. Je fus consulté de nouveau, & après avoir examiné la malade, je vis qu'on pouvoit facilement la redresser assez pour la remettre dans son ancienne position, mais que la difficulté étoit de l'y maintenir, & de l'empêcher de retomber. En conséquence j'imaginai de lui faire mettre sous l'aisselle droite une espèce de béquille cachée qui eût son point d'appui sur les os des hanches du même côté, & je pensai que, l'équilibre rétabli dans la charpente offensée, la malade pourroit marcher, & qu'alors les muscles de l'épine n'étant point tirillés, je pourrois plus facilement parvenir à leur rendre le ton qu'ils avoient perdu.

Ce projet fut de difficile exécution : la machine que j'avois imaginée, portoit si fort sur les hanches, qu'elle meurtrissoit les chairs ; je m'occupai à rendre le point d'appui plus doux, & je crus qu'il falloit étendre l'épine par degrés ; alors je fis faire une machine d'acier, composée de deux pièces terminées en croissant ; le supérieur arrondi & garni d'un coussinet portoit sous l'aisselle, & l'inférieur fut adapté à une ceinture de buffle très-souple ; une des extrémités de ce croissant inférieur étoit au-devant du corps, l'autre en arrière ; & les os des hanches au-dessous à deux travers de doigt du croissant inférieur, de sorte que les chairs ne pouvoient être meurtries. Chacun des deux croissans portoit une tige & un cliquet adapté à celle-ci, pour éloigner plus ou moins ces mêmes croissans, de manière qu'on pût relever l'épaule & la tirer par degrés. Cinq à six semaines suffirent pour la mettre dans toute son extension ; la Dame ne portoit point cette machine, lorsqu'elle étoit couchée. On fit ensuite des

Des frictions sur l'épine, tantôt sèches & tantôt avec des liqueurs spiritueuses dans lesquelles on avoit dissout du savon & un peu de camphre. La Dame sortit; elle reprit son embonpoint, & dans peu elle put être contenue à la faveur d'un corps ordinaire qu'elle reprit & qu'elle porta dans la suite : toutes les fois qu'elle le quittoit, elle se penchoit vers le côté droit, de sorte que pour se maintenir & pour marcher avec aisance, elle avoit besoin de ce corps.

*Autre Observation du même genre.*

Une femme âgée d'environ soixante ans, domestique d'un Anglois, étudiant en Médecine, se courba extraordinairement dans l'espace de deux ou trois mois; les vertèbres lombaires se renversèrent de droite à gauche; celles du dos, de gauche à droite, & les vertèbres cervicales parurent presque dans leur situation ordinaire.

Cette femme marchoit sans bâton ni béquille, & elle craignoit toujours de s'affaïsser sur elle-même; l'Étudiant en Médecine, qui suivoit mes Cours au Collège royal, me demanda mon avis sur ce cas; je conseillai l'usage du corps ordinaire pour maintenir l'épine plus ferme; on y recourut, & j'appris que par ce moyen cette femme put remplir les fonctions de son état.

J'eusse pu joindre beaucoup d'autres observations à celles-ci, si j'avois recueilli toutes celles qui m'ont été communiquées de vive voix par des Médecins célèbres ou par des personnes dignes de foi; mais je me contenterai d'en rapporter quelques-unes que j'ai trouvées dans des ouvrages authentiques.

Qu'on ouvre le volume de l'Académie des Sciences, année 1758, & on y trouvera & des exemples qui confirment ceux que nous venons de donner, & des préceptes généraux pour maintenir l'épine des vieillards. M. le Roi, l'un de nos respectables Confrères, persuadé de l'importance de cette matière, d'après des observations particulières qu'il avoit devers lui, m'a fort engagé à publier les miennes. Je le fais aujourd'hui avec d'autant plus de plaisir, que je crois, comme

lui, le sujet utile & intéressant. M. Winslow qui avoit été frappé des difformités de la taille, qui surviennent dans un âge avancé, disoit qu'il falloit donner des corps aux adultes & aux vieillards, plutôt qu'aux enfans. Ce grand Maître fondeit son opinion sur sa propre expérience; elle lui avoit appris que des adultes & des vieillards avoient tout d'un coup perdu leur belle taille, & étoient devenus bossus.

Je vais rapporter un fait analogue au sujet. Madame de Montmorenci est atteinte d'un cathare; bientôt sa taille se déforme; elle consulte Ranchin, pour lors Chancelier de l'Université de Montpellier. Celui-ci conseille l'usage de quelques machines; mais leur application ne fut d'aucune utilité.

Marc-Aurèle Séverin nous apprend qu'un noble Napolitain, dont le corps étoit bien conformé, se plaignit d'une douleur vers l'un des os ischium, qui le gênoit beaucoup dans la marche; on conseilla divers remèdes, & on accusa plusieurs causes de ce mal; cependant les convulsions surviennent; on saigne le malade du pied, mais sans succès. Severinus est appelé, & examine l'épine, & il la trouve renversée. Ce vice reconnu, il ne doute plus de la cause de la douleur; il croit la trouver dans le déplacement des vertèbres; c'est pourquoi il conseille de travailler à les redresser. Ce grand Médecin ne nous apprend pas quels furent les moyens qu'il fit mettre en usage, ni quel en fut le résultat: il en a cependant dit assez pour nous prouver que l'épine la plus régulière peut se déjeter, & donner lieu à des maladies fâcheuses.

En effet, l'observation nous a appris que la plupart de ceux qui ont les vertèbres lombaires renversées à gauche, sentent des tiraillemens dans l'aine, & quelquefois dans toute l'extrémité inférieure droite, tandis qu'ils se plaignent d'une certaine stupeur ou engourdissement dans l'aine & dans l'extrémité inférieure gauche. Les vertèbres lombaires ne peuvent s'incliner, qu'elles n'étendent le muscle psoas du côté opposé, & si cette extension est considérable, les nerfs eux-mêmes sont distendus, parce qu'alors l'épine est déviée. Il est vrai que ceux qui sont dans cette fâcheuse situation, ont le soin



de fléchir la cuisse du côté opposé à celui où s'est fait le renversement des vertèbres lombaires, alors les douleurs sont moindres, parce que le muscle psoas & les nerfs voisins ne sont pas si tendus. Ceux qui sont ainsi bossus, retirent un autre avantage de cette flexion de la cuisse; ils raccourcissent un peu l'extrémité inférieure, & le bossu s'inclinant sur elle, ramène vers l'axe du corps les vertèbres qui s'en étoient écartées.

Quant à l'engourdissement de la cuisse du côté vers lequel les vertèbres lombaires se sont déjetées, il est la suite de la compression que les vertèbres elles-mêmes & les fausses côtes font sur les nerfs, & il est continu ou instantané, selon que les vertèbres lombaires sont plus ou moins inclinées.

Voici une autre observation rapportée par M. Morgagni; elle prouve qu'on peut devenir bossu dans un âge très-avancé, & lors même qu'on s'y attend le moins. Un homme, cardeur de chanvre de profession, âgé de quarante-deux ans, & assez bien constitué, se plaint d'une élévation vers le cartilage xiphoïde; il consulte plusieurs personnes qui lui conseillent divers topiques; il en fait usage, mais sans succès. Deux ans après la tumeur augmente, & si vite qu'en peu de jours elle fut deux fois plus grosse qu'auparavant: de nouveaux accidens surviennent; c'est une tumeur & une douleur vers les vertèbres dorsales inférieures; l'épine se déforme; des vomissemens surviennent; les urines sont tantôt supprimées, & tantôt elles coulent librement; les convulsions gagnent les extrémités supérieures, tandis que les inférieures tombent dans l'engourdissement. Le malade meurt dans cet état; on l'ouvre, & on se convainc que les deux tumeurs qui étoient survenues au tronc étoient une suite du déplacement du sternum & des vertèbres.

Indépendamment des inflexions latérales de l'épine, elle semble se tordre quelquefois, & cette espèce de torsion est très-dangereuse; alors le cartilage xiphoïde & l'extrémité du sternum ne répondent plus aux os pubis, mais se déjetent sur le côté, & une épaule se porte plus en avant que l'autre. Or dans cette

espèce de bosse, les parties molles souffrent des distensions cruelles, & le sujet a la plus grande peine de se tenir debout, parce que les vertèbres, si elles ne sont pas enklouées, ne trouvant pas un point d'appui suffisant sur elles-mêmes, le prennent sur les ligamens & sur les muscles; or comme ceux-ci sont plus ou moins flexibles, les sujets craignent toujours de s'affaïsser sur eux-mêmes, ou, comme je l'ai entendu dire, de se plier en deux.

Mais ce cas, il faut l'avouer, n'est point ordinaire, les autres genres de bosses qui se font simplement sur les côtes dans un âge avancé sont plus communs & les dérangemens de l'épine de devant en arrière sont si fréquens dans les vieilles personnes qu'il n'est pas possible d'en donner des exceptions: il est vrai que chez les uns la taille se courbe beaucoup plus vite que chez les autres.

Les Médecins qui en ont recherché les raisons en ont proposé plusieurs bien différentes, mais n'ont rien dit d'intéressant à ce sujet. Voici ce que l'on peut établir là-dessus. Deux causes concourent au déplacement de l'épine dans un âge avancé, c'est le raccornissement des ligamens antérieurs des vertèbres & la foiblesse des muscles du dos; par la suite du temps, les ligamens de l'épine se dessèchent & se raccornissent, c'est un fait dont chacun pourra s'assurer, en jetant les yeux sur l'épine des sujets de divers âges, on verra que le grand ligament antérieur s'ossifie très-souvent, & alors il perd beaucoup de sa longueur & ploie l'épine en avant. Les petits ligamens qui sont par-dessus, & qui ne s'étendent que d'une vertèbre à l'autre, perdent aussi de leur longueur; les vertèbres se rapprochent intérieurement; ainsi les trois courbures de l'épine changent. Les vertèbres lombaires, qui naturellement forment, lorsque le sujet est debout, un cylindre convexe en avant, ne forment plus qu'une colonne droite, la concavité des vertèbres dorsales augmente, & les vertèbres cervicales sont encore déjetées en avant: c'est ce que j'ai observé, je puis le dire, sur beaucoup de vieillards.

Je savois depuis long-temps que les membranes s'épaï-

lissent, qu'elles se retirent sur elles-mêmes avec l'âge, & que les viscères membraneux, tels que l'estomac & la vessie, sur-tout étoient moins amples chez les vieillards que dans les adultes; on savoit que par la suite des années, les ligamens capsulaires des articulations perdoient de leur souplesse, & se raccornissoient; & c'est d'après la connoissance de ces faits avérés des grands Anatomistes, que je crus devoir interroger la Nature, pour savoir si la cause du renversement de l'épine dans les vieillards ne dépendoit pas du raccornissement des ligamens antérieurs de l'épine beaucoup plus forts & plus nombreux que les postérieurs; l'analogie me le faisoit conjecturer, l'observation m'en convainquit.

Or, comme il y a trente vertèbres, & qu'outre le ligament commun qui les revêt toutes, il y a des ligamens particuliers, si nous supposons que chacun s'est raccourci d'une quantité quelconque, l'épine sera portée en avant pour faire perdre l'équilibre au sujet; de-là vient que pour le conserver, les vieillards ont coutume de fléchir les genoux lorsqu'ils sont debout, & par cette flexion, ils reculent assez le bas du tronc pour leur servir de contrepoids.

A proportion que les ligamens antérieurs de l'épine se dessèchent, les corps cartilagineux interposés entre les vertèbres s'affaissent, les vertèbres s'approchent, & la hauteur totale de l'épine diminue. De-là vient que certaines personnes sont obligées de faire raccourcir leurs vêtemens à proportion qu'elles vieillissent. Alors les muscles du dos meuvent les vertèbres avec beaucoup plus de difficulté; car le mouvement de celles-ci est d'autant plus libre qu'elles sont plus éloignées l'une de l'autre par le corps cartilagineux intermédiaire. Or, comme dans les jeunes gens il est plus épais qu'il ne l'est dans un âge avancé, il faut pour que ces muscles redressent l'épine dans les vieillards, qu'ils emploient plus de force dans leur contraction; mais bien loin de le pouvoir, ils sont incapables de se contracter aussi puissamment qu'ils le feroient dans l'âge tendre.

Dans quelques sujets, cet affoiblissement a plutôt lieu que

dans d'autres; les muscles du dos, comme tous les autres muscles, perdent leur force à mesure qu'ils sont distendus; c'est ce qui arrive dans les longues flexions de l'épine. Ainsi les Gens de Lettres, certains ouvriers, tels que les Paveurs, & en un mot, tous ceux qui par état sont obligés de se courber fréquemment, perdent leur taille plutôt que les autres.

L'exercice donne de la force aux muscles & favorise leur accroissement; une preuve bien convaincante, c'est que les personnes qui courent beaucoup, les Tourneurs de profession, par exemple, ont ordinairement les extrémités inférieures plus grosses que les supérieures, tandis que les Boulangers ont celles-ci plus grosses que les inférieures. Il est très-important d'observer que les personnes qui n'ont fait aucun usage des corps, ont les muscles du dos plus forts & plus volumineux que les autres. On peut même dire qu'on a peine à démontrer les muscles du dos dans les femmes qui se sont distinguées à porter des corps étroits; cependant les Dames moins jalouses pour l'ordinaire de leur taille, lorsqu'elles sont parvenues à un certain âge, abandonnent l'usage des corps ou en prennent de plus grands & de plus lâches, & comme alors les muscles du dos sont prodigieusement affoiblis, elles se voûtent ou elles s'inclinent sur les côtés. Plusieurs qui sont devenues bossues vers leur temps critique, rapportent la cause de leur distorsion à la cessation du flux périodique, tandis que ce n'est qu'à la cessation de l'usage des corps, ce qui prouve qu'il est pernicieux d'en faire contracter l'habitude aux enfans. Les muscles sont chez eux assez forts pour maintenir & pour mouvoir l'épine; les bains froids, l'exercice même & les frictions sur le dos pourroient suffire à la redresser; mais dans un âge avancé, les muscles du dos, à force d'avoir été comprimés, & d'être restés dans l'inaction, sont devenus incapables de maintenir le tronc en équilibre.

En même temps que les muscles se sont affoiblis, la poitrine s'est développée & s'est portée en avant malgré les corps qui la comprimoient, les viscères de la poitrine & ceux du bas-ventre sont devenus plus pesans, ce qui augmente la

propension qu'a le tronc de s'incliner en avant, & par conséquent la résistance que les muscles du dos doivent vaincre pour le maintenir droit.

Il est vrai que ce surcroît de résistance seroit immense pour les muscles de l'épine les plus vigoureux; aussi la Nature a-t-elle concouru à la diminuer, en augmentant les courbures de l'épine (car elle approche d'autant plus de la ligne droite que la poitrine est petite, c'est un fait dont on peut se convaincre, en examinant les troncs des sujets de divers âges); mais malgré ces ressources de la Nature, le tronc a plus de propension dans les adultes & dans les vieillards à tomber en devant que dans les enfans; ils ont donc un plus grand besoin de corps, & il n'est pas douteux que les personnes qui ont malheureusement vieilli avec des corps, ne doivent en faire usage toute leur vie; puisque la Nature ne peut plus se suffire à elle-même, il faut que l'art vienne à son secours. Une ancienne habitude mérite beaucoup d'être respectée; d'ailleurs à un âge avancé les corps ne peuvent plus s'opposer à l'accroissement des parties, les côtes & tous les os du tronc sont assez fermes pour résister à la compression, pourvu toutefois qu'elle soit modérée; la poitrine est développée, & les quatre courbures de l'épine bien formées. Il n'en est pas de même dans l'enfance, on a pris un corps lorsqu'il falloit laisser la poitrine libre, on a comprimé les côtes & le sternum en dedans, au lieu de faciliter leur accroissement en dehors; les viscères du bas-ventre ont été refoulés vers la poitrine. Ainsi par une manœuvre mal combinée, on a nui aux plus importantes fonctions de l'économie animale. Plusieurs personnes sont mortes de phtisie, d'autres de quelques squires dans le foie, dans l'épiploon sur-tout, ou en un mot, dans quelqu'un des viscères du bas-ventre. On a vu des sujets périr du vomissement, par la compression que la pointe des corps, des busques ou des busquières avoient faite sur l'estomac ou sur les intestins. J'ai ouvert il y a environ deux ans le corps d'une fille de vingt à vingt-cinq ans, qui avoit péri d'atrophie & de vomissemens, & qui avoit porté des corps

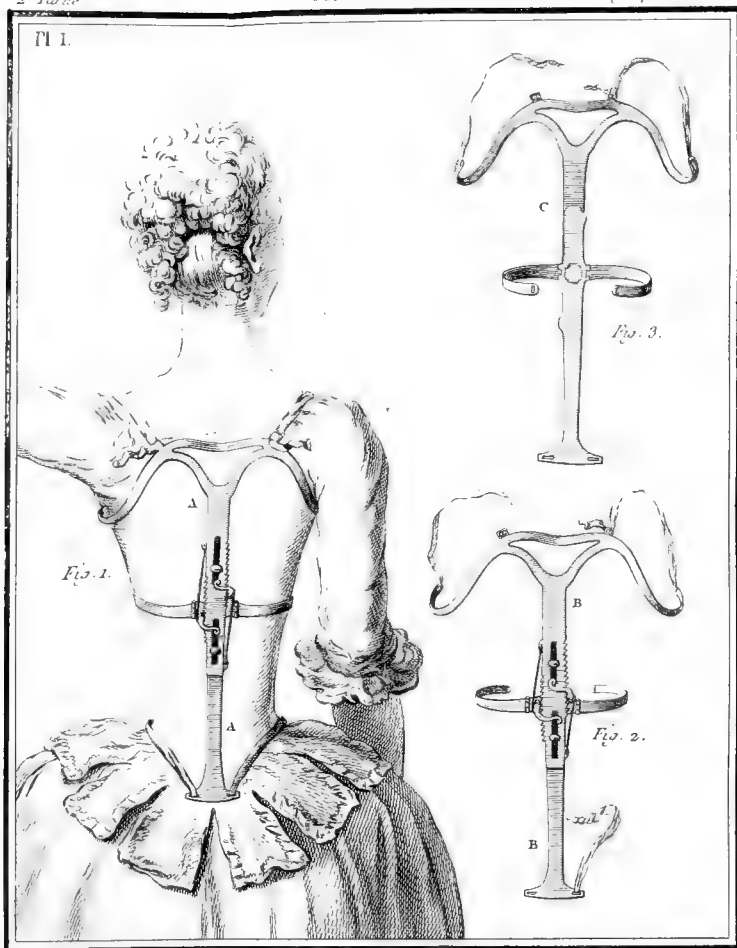
très-étroits. Je trouvai l'ileum tellement rétréci immédiatement au-dessous de l'ombilic, qu'à peine y pouvoit-on passer une plume à écrire. Cette fille avoit la poitrine fort aplatie en devant, & le sternum, chez elle, étoit courbé & déjeté en dedans. M. Morgagni nous a communiqué plusieurs observations analogues.

Qu'on me permette de faire remarquer en finissant, que la forme qu'on a donnée aux corps est la plus bizarre qu'il soit possible d'imaginer. La poitrine est naturellement plus large en bas qu'en haut; c'est pour ainsi-dire, une hotte renversée, & les corps sont faits au rebours; le bas-ventre est naturellement plus saillant que la poitrine; mais les corps produisent un effet contraire, ils repoussent les viscères & les refoulent contre le diaphragme qui s'élève dans la poitrine, & comprime les poudrons. L'épine, dans l'homme le mieux fait, a quatre courbures de devant en arrière, & les corps tendent à lui donner la figure droite; de sorte qu'outre l'inconvénient de nuire aux plus grandes fonctions, ils ont encore celui de rendre bossues les personnes qui en font usage, dans l'idée d'éviter, de corriger ou de guérir cette difformité.

Mais dans une personne qui a vieilli avec des corps, la Nature a résisté à leurs mauvais effets, ou bien le mal est fait, & il en résulteroit un plus grand d'en abandonner l'usage; c'est pourquoi nous ne craignons pas de le recommander. L'observation est pour nous, & la théorie ne nous est pas contraire.

Les personnes même qui n'ont point fait usage des corps doivent y recourir, si elles ont de la foiblesse dans les muscles du dos, ou que par quelqu'autre cause, leur épine se courbe trop vite: c'est le seul moyen de prévenir un plus grand dérangement de la taille. Pourquoi ne pas soutenir l'épine lorsqu'elle a commencé à se déjeter? Il est vrai qu'il faut varier la forme & la solidité des corps suivant les circonstances, & qu'il faut quelquefois leur substituer les machines. Par exemple, dans un renversement de l'épine sur le côté, j'ai employé avec succès une seule machine d'acier fort légère & qui soutint l'épine





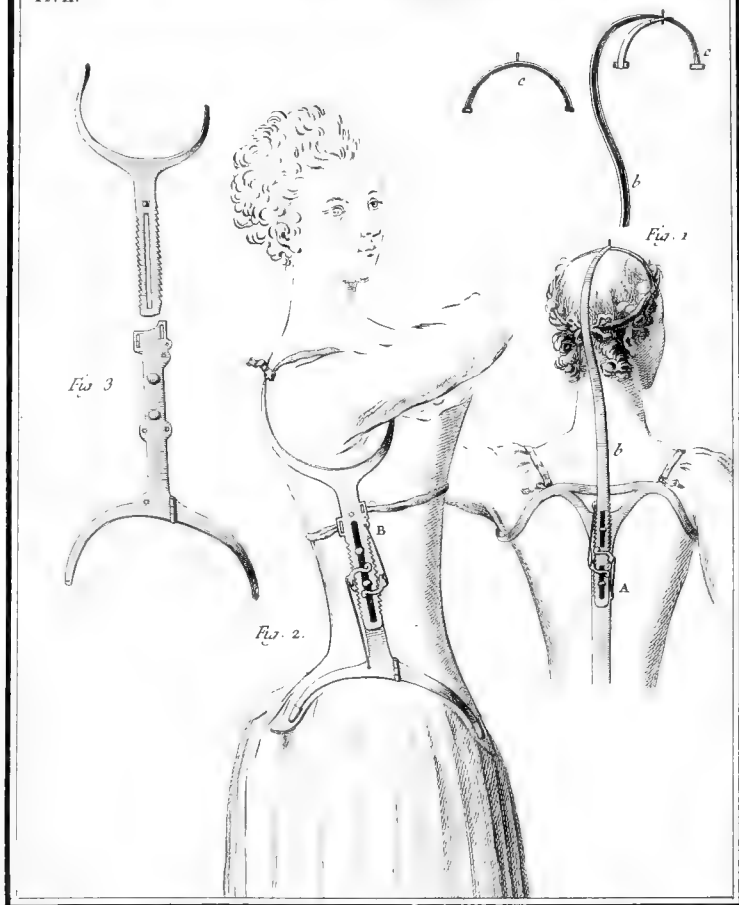
F. Goussier del.

F. le Veneur Sculp.





Pl. II.



Fournier del.

Fournier Sculp.

l'épine & les épaules (*a*). Dans un autre cas où l'épine étoit plus inclinée de devant en arrière que sur les côtés, je conseillai l'usage de deux croissans (*b*). En général, je crois qu'on peut & qu'on doit varier les moyens de redresser & de soutenir l'épine; mais ces objets sont susceptibles, & exigent même des détails dans lesquels je ne puis point entrer dans ce Mémoire.

## EXPLICATION DES FIGURES.

### PLANCHE I.

**FIGURE 1.** *A* représente une machine dont on s'est servi avec succès, pour maintenir la taille d'une jeune personne qui se courboit involontairement en avant quand elle n'étoit pas soutenue.

**Fig. 2.** *BB* représentent la même machine hors de place & vue par dehors.

**Fig. 3.** *C*, la même machine par-devant.

### PLANCHE II.

On voit dans la *Figure 1.* la machine *A* représentée dans la *planche I*, à laquelle on a adapté avec succès, pour redresser l'épine, la portion cervicale, principalement une tige perpendiculaire *b*, & un demi-cercle *C* mobile, qu'on assujettit à la tête avec un ruban.

La machine *B* (*fig. 2*), sert à maintenir une vieille femme, qui ne pouvoit marcher sans béquilles : son épine étoit singulièrement tombée sur les côtés.

**Fig. 3.** La machine *B* de la *figure 2*, dont on voit mieux le développement.

(*a*) Voyez la première Planche.

(*b*) Voyez la seconde Planche.



## R E M A R Q U E S

. S U R L A

## TOISE-ÉTALON DU CHÂTELET,

*Et sur les diverses Toises employées aux mesures des Degrés terrestres & à celle du Pendule à secondes.*

Par M. DE LA CONDAMINE.

20 Juillet  
1758.

**I**L me seroit aisé de prouver que la toise du Châtelet, si on entend par ce nom une mesure certaine & fixe, n'a jamais existé; mais ce qui suffit pour le cas présent, & dont tout le monde convient, c'est qu'elle n'existe plus aujourd'hui: M. de Mairan, le 24 Mai dernier, avertit l'Académie, que la barre de fer scellée dans le mur au pied de l'escalier du Châtelet, pour servir d'étalon à la toise, étoit altérée & faussée, & que sa longueur avoit changé. Il ajouta que les Magistrats à qui cette inspection est commise, étoient convenus avec lui de s'en rapporter à l'Académie pour la restauration de cette mesure publique.

Il faut avouer qu'un étalon qui ne semble destiné qu'à la vérification juridique des toises ordinaires des Maçons, des Menuisiers, ou, si l'on veut, des Architectes, ne paroît pas exiger des précautions bien scrupuleuses. On fait que dans le toisé des bâtimens on néglige les lignes; quelquefois même les pouces ne tirent pas à conséquence; mais puisque l'on consulte l'Académie sur la fixation du nouvel étalon, sans doute on en attend une exactitude digne d'elle.

Pour remplir ces vues, il faut commencer par convenir quelle est la toise employée par l'Académie dans la mesure des Degrés de la Terre, & cet éclaircissement ne permet pas la plus légère négligence. La moindre erreur sur la longueur de la toise se multiplie près de soixante mille fois sur la longueur du

Degré du Méridien; un centième de ligne, si nos sens aidés des instrumens les plus parfaits peuvent atteindre jusque-là, n'est pas à négliger volontairement sur la longueur du pendule à secondes, quand il est possible d'en tenir compte. Il en résulte quelques différences dans la Figure de la Terre & dans la théorie de la gravitation, Problèmes importans pour la Physique céleste.

L'Astronomie, la Géographie, la Navigation sont donc intéressées à la fixation de la toise de l'Académie. Il s'agit sur-tout de constater les différences, s'il s'en trouve, entre les différentes toises dont on s'est servi pour les mesures des divers Degrés, & de rapporter tout à la même mesure.

Si j'ai paru vouloir retarder la décision de cette question en demandant à lire un Mémoire, ce n'est que pour mettre l'Académie en état de prononcer avec pleine connoissance de cause sur un objet dont je me suis occupé depuis longtemps, dont j'ai senti toute l'importance, sur lequel j'ai déjà fait mon possible pour fixer l'attention de l'Académie, afin de ne laisser à l'avenir aucun doute sur cette matière. En 1749, me trouvant Directeur de l'Académie, je fis nommer, par une délibération de la Compagnie, qui doit être enregistrée, des Commissaires pour aller vérifier à l'Observatoire la longueur précise de la toise avec laquelle les Degrés de France avoient été mesurés; & j'ai requis depuis, plusieurs fois, l'exécution de cette délibération. Qu'il me soit permis de dire qu'il y a plus de vingt ans que j'ai prévu la sorte d'embaras où l'on tomberoit quelque jour, qui commence à se faire sentir, & dont les conséquences pourroient avec le temps devenir plus dangereuses; il est encore temps de les prévenir. Avant que de proposer les remèdes, remontons à l'origine de l'incertitude: j'ai recueilli sur cela quelques faits dont la tradition peut s'effacer, & qui méritent l'attention de l'Académie.

### *De la Toise de M. Picard.*

M. Picard dans son *Traité latin des Mesures*, inséré dans  
P p p ij

le *Tome VI* des anciens Mémoires de l'Académie, dit avec son laconisme ordinaire, que *l'ancienne toise des Maçons fut réformée & raccourcie de cinq lignes en 1668*, sans nous apprendre aucune autre circonstance. On fait seulement par tradition que, pour donner au nouvel étalon la véritable longueur qu'il devoit avoir, on se servit de la mesure de la largeur de l'arcade ou porte intérieure du grand pavillon qui sert d'entrée au vieux Louvre, du côté de la rue Fromenteau. Cette ouverture, suivant le plan, devoit avoir douze pieds de largeur; on en prit la moitié pour fixer la longueur de la nouvelle toise, qui se trouva plus courte de cinq lignes que l'ancienne.

Remarquons en passant que si cet expédient suffisoit pour reconnoître une erreur de cinq lignes, il n'étoit sûrement pas propre à retrouver la vraie longueur de la toise avec une grande précision. Car quelle sûreté a-t-on, 1.<sup>o</sup> que la largeur de douze pieds de la porte du Louvre, probablement mesurée, lors de la construction, avec un pied commun, & indiquée par deux piquets sur le terrain, ait été déterminée plus exactement que les autres mesures fondamentales d'un bâtiment, dans lesquelles quelques lignes de plus ou de moins, pour ne pas dire quelques pouces, sont un objet insensible, & sont comptées pour rien? 2.<sup>o</sup> Supposant gratuitement, & contre toute vraisemblance, que la distance de douze pieds entre les jambages de l'arcade ait été originairement fixée avec la dernière précision, comment a-t-on pu s'assurer depuis, à une ligne près, de la distance de deux murs construits d'une pierre poreuse, exposée aux injures de l'air, couverte d'un enduit de poussière délayée par la pluie, & d'une boue incorporée avec la pierre même? Si quelqu'un pense que j'exagère ici la difficulté, je l'invite à jeter les yeux, en sortant de l'Académie, sur l'endroit dont je parle, & je m'en rapporte à lui.

Quoi qu'il en soit, la toise ancienne du Châtelet, fut réformée en 1668; c'est M. Picard qui nous en assure, & dit qu'il se servit de la nouvelle toise pour la mesure de son

degré (a), compris entre les parallèles de Paris & d'Amiens. Si la toise employée par M. Picard fût restée en dépôt à l'Académie ou à l'Observatoire, où M. Picard dit formellement qu'elle *sera soigneusement conservée*, on n'eût pas manqué de la faire servir dans toutes les mesures de Degrés postérieures à la sienne; on les eût toutes rapportées à cette toise, & les doutes survenus depuis sur la longueur vraie de la base de M. Picard, eussent été promptement éclaircis; mais la toise de M. Picard ne subsiste plus, & nous n'avons de monument authentique, de son temps, qu'une barre de fer scellée dans le mur au pied de l'escalier du grand Châtelet, terminée par deux saillies ou redans en retour d'équerre, & qui servoit d'étalon aux mesures publiques. Cet étalon avoit été grossièrement construit; les angles s'étoient émouffés, & les faces intérieures des deux redans qui doivent comprendre la toise qu'on y présente, n'ont jamais été polies ni limées d'équerre, & parallèlement l'une à l'autre. Il n'est donc pas étonnant que les toises étalonnées en différens temps & par différentes personnes sur cet original défectueux, ne se trouvent pas parfaitement égales entr'elles.

Nous ne savons ni dans quelle saison de l'année, ni par qui le nouvel étalon du Châtelet fut posé. Si M. Picard y eût présidé, la circonstance de la saison paroît trop importante pour qu'il eût négligé de nous en instruire. Tout semble annoncer qu'on abandonna ce soin à quelqu'ouvrier, ou du moins à quelque subalterne peu intelligent. Il seroit donc possible que l'étalon eût été, dès le temps qu'il fut posé, plus long que la toise que M. Picard emporta pour mesurer son degré, ou qu'il se fut allongé depuis, en frappant à coups de marteau les clous qui l'attachoient au mur; d'ailleurs les deux équerres doivent s'être usées par la rouille, par le frottement continuel des mesures présentées, & peut-être en les dérouillant; il est donc fort apparent que leur distance s'est accrue: il ne seroit pas étonnant en ce cas que les nouvelles

---

(a) Mesure de la Terre de M. Picard, art. IV.

toises, présentées à cet étalon depuis vingt-cinq ou trente ans; fussent plus longues que celle de M. Picard, & par conséquent qu'on eut trouvé moins de toises que lui dans la mesure de sa base, entre Villejuive & Juvisy. (*Mém. de l'Acad. année 1754, p. 172*).

Il est juste de chercher tout ce qui peut excuser ce célèbre Académicien, qui ne mérite pas d'être condamné légèrement; mais il faut avouer que la conjecture précédente ne peut sauver l'erreur reconnue dans la base de Villejuive, à moins d'attribuer une autre erreur à M. Picard, puisque lui-même nous a laissé le moyen de vérifier la longueur de sa toise, *en l'attachant, ce sont ses termes, à un original, lequel étant tiré de la Nature même, doit être invariable & universel*. Il a trouvé que la mesure du pendule à secondes, à Paris, étoit de 36 pouces 8 lignes  $\frac{1}{2}$  de sa toise, & cette longueur très-peu différente de la vraie, est incompatible avec le nombre de toises qu'il donne à sa base: il faut donc convenir que M. Picard s'est trompé, soit en assignant deux cinquièmes de ligne de trop à son pendule, si la toise étoit bonne, soit en employant une toise trop courte de plus de quatre cinquièmes de ligne, si la mesure de son pendule est exacte.

Les autres toises connues de l'Académie, & différentes de celle de M. Picard, sont 1.<sup>o</sup> celle que M.<sup>rs</sup> Godin, Bouguer & moi, avons portée au Pérou en 1735, & qui nous a servi à mesurer les trois Degrés du méridien les plus voisins de l'Équateur; 2.<sup>o</sup> la toise avec laquelle M.<sup>rs</sup> de Maupertuis, Clairaut, Camus & le Monnier ont mesuré en 1736 & 1737, le Degré du méridien qui coupe le Cercle polaire en Laponie; 3.<sup>o</sup> la toise dont M. Cassini de Thury & M. l'abbé de la Caille, ont fait usage en 1739 & 1740, pour la vérification de la Méridienne de Paris; 4.<sup>o</sup> la toise employée par M. l'abbé de la Caille, à la mesure des 34.<sup>e</sup> & 35.<sup>e</sup> degré de latitude australe, au cap de Bonne-espérance en 1752; 5.<sup>o</sup> la toise de M. de Mairan, avec laquelle il fit ses expériences du pendule, en 1735. Toutes ces toises originairement ont eu pour modèle celle du Châtelet, qui



ne subsiste plus aujourd'hui: on les a toutes supposées égales entr'elles. Si leur égalité étoit parfaite, il n'y auroit pas de choix à faire, ou ce choix seroit indifférent, mais dans la dernière comparaison, qui en fut faite en 1756, à l'occasion de la nouvelle mesure de la base de Villejuive, on reconnut quelques différences entre ces différentes toises, & la précision que nous cherchons ici ne permet pas de les négliger.

Examinons donc laquelle de ces cinq toises mérite la préférence, & doit être censée la toise originale à laquelle il convient de rapporter les autres. Je ne parle point d'une fixième toise, comparée au même étalon par feu M. du Fay, & dont j'ai fait l'acquisition, parce qu'elle n'a servi qu'à des expériences particulières qui ne méritent pas qu'elle soit admise au concours.

### *De la Toise de l'Équateur.*

« Nous avons emporté avec nous en 1735 (b), une « règle de fer poli, de dix-sept lignes de largeur, sur quatre « & demie d'épaisseur. M. Godin aidé d'un artiste habile (le « sieur Langlois) avoit mis toute son attention à ajuster la « longueur de cette règle, sur celle de la toise *étalon*, qui avoit « été fixée en 1668 au pied de l'escalier du grand Châtelet « de Paris. Je prévis que cet ancien étalon, fait assez grossiè- « rement, & d'ailleurs exposé aux chocs, aux injures de l'air, « à la rouille, au contact de toutes les mesures qui y sont pré- « sentées, & à la malignité même de tout mal-intentionné, ne « feroit guère propre à vérifier dans la suite la toise qui alloit « servir à la mesure de la Terre, ni à devenir l'original auquel « les autres toises devoient être comparées. Il me parut donc « très-nécessaire, en emportant une toise bien vérifiée, d'en « laisser à Paris une autre de même matière & de même forme, « à laquelle on pût avoir recours, s'il arrivoit quelque accident « à la nôtre pendant un si long voyage: je me chargeai d'office « du soin d'en faire faire une pareille. Cette seconde toise fut «

---

(b) Mesure des trois premiers Degrés du-Méridien, pages 75 & 76.

- » construite par le même ouvrier, & avec les mêmes précautions  
 » que la première. Les deux toises furent comparées ensemble  
 » dans une de nos Assemblées, & l'une des deux resta en dépôt  
 » à l'Académie. C'est la même qui a depuis été portée en Lapponie  
 » par M. de Maupertuis, & qui a été employée à toutes les  
 opérations des Académiciens envoyés au Cercle polaire ».

Lorsque j'écrivois, en 1748, ce qui précède, & que je transcris littéralement de ma *mesure du Méridien*, je croyois que cette règle de fer, que j'appelle notre toise, étoit encore à Quito entre les mains de M. Godin, & j'ignorois qu'elle étoit à Paris depuis plusieurs mois. M. le Comte de Maurepas, alors Ministre, de l'Académie, avoit écrit en 1747, à M. Joseph de Jussieu, notre compagnon de voyage resté à Quito, & l'avoit chargé, à *ma requête*, de retirer de M. Godin une copie de ses observations, notre toise, & les autres instrumens de l'Académie, & de rapporter le tout en France, puisque M. Godin appelé dès 1747 à Lima, par le Vice-roi du Pérou, paroissoit s'être fixé dès-lors au service du roi d'Espagne. M. de Jussieu, que la lettre du Ministre atteignit au commencement de 1748, à cinquante lieues de Quito, dans la province de Canelos, prêt à s'embarquer pour revenir en France par la rivière des Amazones, revint sur ses pas à Quito, d'où il partit aussi-tôt pour se rendre à Lima, dans le dessein d'exécuter les ordres du Ministre (c). Il trouva M. Godin qui se préparoit à revenir en Europe. Tous deux prirent la route de Buénos-aires par terre, après avoir embarqué sur le vaisseau *le Condé*, prêt à faire voile pour la France, un quart-de-cercle, & notre toise renfermée dans son étui. Ces instrumens arrivés à bon port à la fin de 1748, ou vers le commencement de 1749, à l'adresse de M. le Comte de Maurepas, furent portés, sans que j'en eusse connoissance, au cabinet des machines de l'Académie, transporté depuis quelques années au Jardin royal des Plantes. M. Bouguer l'ayant su, retira seulement le quart-de-cercle qui faisoit partie

---

(c) Journal du Voyage à l'Équateur, 1751, page 217.

de l'envoi, c'étoit celui dont il s'étoit toujours servi pendant le cours du voyage. Trois ans & plus se passèrent, à compter de cette époque, sans que j'entendisse parler de notre toise, jusqu'à ce qu'en ayant demandé avec empressement des nouvelles à M. Godin, en 1752, à son arrivée d'Amérique; j'appris avec surprise que la toise étoit en France depuis près de quatre ans. Je me donnai tous les soins nécessaires pour en faire la recherche; enfin elle se trouva dans le garde-meuble du Jardin royal, en bon état, renfermée dans un étui de bois, solide & doublé de serge, où elle avoit toujours été conservée. Je ne voulus point la retirer, je réitérai seulement ma demande pour la vérification de la toise de M.<sup>rs</sup> Cassini, conservée à l'Observatoire, & pour sa comparaison à la nôtre.\*

*Raisons de préférence pour la toise de l'Équateur.*

Je suppose le même soin & la même adresse dans tous ceux qui ont étalonné les différentes toises entre lesquelles il s'agit de décider aujourd'hui: quand l'étalon du Châtelet subsisteroit encore, il étoit si grossièrement fabriqué & si mal traité, qu'il ne seroit pas possible de reconnoître laquelle des prétendues copies étoit originairement la plus conforme au défectueux original. Il ne reste donc plus d'autre raison de préférence entre ces différentes toises, que celle de la priorité de date. La nôtre fut présentée à l'Académie dans une assemblée du mois d'Avril 1735, comparée & reconnue égale à celle que j'y laissois en dépôt. Elle fut dès-lors adoptée par l'Académie, & personne ne réclama contre cette adoption. M. Godin, en l'ajustant sur l'étalon du Châtelet, avoit remarqué le degré que marquoit le thermomètre de M. de Reaumur, c'étoit 13 au-dessus de la congélation, température moyenne, & la même à laquelle on a rapporté les dernières mesures pour la vérification de la base de Villejuive en 1756.

La décision de l'Académie portée depuis vingt-trois ans, ne doit être révoquée que pour de bonnes raisons. Dira-t-on

---

\* Cette toise du Pérou est dans le cabinet de l'Académie (avril 1776).

Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.

que notre toise, dans un si long voyage, a pu souffrir quelque choc & changer de longueur ? Je répondrois qu'indépendamment des précautions avec lesquelles elle a toujours été conservée, la règle qui la forme a de longueur environ deux pouces de plus que les six pieds; qu'elle n'est coupée à la mesure d'une toise, que sur la moitié de sa largeur, & que les deux talons excédens d'environ un pouce à chaque extrémité, l'ont garantie de tout choc; que ses arêtes sont encore vives, & n'ont jamais été rouillées, comme il est aisé de s'en convaincre au premier aspect. Une autre preuve qu'elle ne s'est pas raccourcie, c'est qu'elle est plus longue que celle de M. de Mairan. Dira-t-on que les grandes chaleurs de la Zone torride peuvent au contraire l'avoir allongée ? Cette conjecture qui n'a pas la moindre vraisemblance, est détruite par des faits constans. On n'ignore plus que le thermomètre ne monte pas ordinairement plus haut sous la Ligne que dans les plus grandes chaleurs en France; je puis assurer que dans les dix années qu'a duré notre voyage, je n'ai pas vu le thermomètre de M. de Reaumur, en Amérique, passer 29 degrés au-dessus de la congélation; d'ailleurs j'ai la preuve directe, qu'une règle de fer exposée à une chaleur considérable, reprend sa longueur ordinaire, dans les expériences que j'ai faites sur l'expansion du fer par la chaleur, & que j'ai rapportées dans ma mesure du Méridien, *page 78*. En faisant ces expériences à Paris en 1749, j'avois exposé la toise du Nord, & non celle de l'Équateur, que je ne savois pas être revenue en France, au degré de chaleur indiqué par le thermomètre de M. de Reaumur, par 55 degrés au-dessus de la congélation; chaleur plus considérable que toutes celles auxquelles la toise de l'Équateur a été exposée; cette toise du Nord a repris sa longueur ordinaire: elle est même tant soit peu plus courte aujourd'hui que la nôtre, à laquelle elle étoit égale, différence dont nous examinerons la cause.

Enfin notre toise entre aujourd'hui sans effort dans son étalon, qui n'est pas sorti de Paris, & le remplit exactement. Il n'y a donc aucun prétexte pour supposer qu'elle a changé de longueur.

Cette même toise a servi pour la mesure actuelle des quatre bases fondamentales de nos triangles, aux deux extrémités de notre arc (*voyez le Journal du voyage à l'Équateur*). Nous avons, M.<sup>rs</sup> Godin, Bouguer & moi, déterminé sur ces mesures la longueur d'un arc de plus de trois degrés du Méridien, & celle du pendule à Quito, par un très-grand nombre d'expériences, dont le résultat s'accorde presque dans le centième de ligne; toutes ces mesures ont été consignées dans plusieurs Ouvrages depuis dix ans, tant par les mathématiciens Espagnols nos compagnons de voyage, que par M. Bouguer & moi : elles ont été gravées sur le marbre & sur la pierre (*d*) en divers monumens, & si quelques-uns ne subsistent plus, les livres imprimés & les Journaux en ont conservé la mémoire.

Si la toise égale à la nôtre, ajustée dans le même étalon & par le même artiste, fût restée en dépôt à l'Académie, où je l'avois laissée dans cette intention, elle eût sans doute servi de modèle à toutes les toises dont on a depuis fait usage pour la mesure des Degrés en France & en Afrique; mais M. de Maupertuis, en partant pour le Cercle polaire, un an après notre départ de Paris, m'écrivit qu'il ne balançoit pas à se servir de notre toise, pour que nous eussions une mesure commune; il ne tint que trop sa parole; n'ayant pas eu le temps de faire faire une nouvelle toise égale à la toise déposée, il emporta celle-ci à Torneâ, de l'aveu de l'Académie; nouvelle preuve que notre toise étoit regardée par l'Académie, comme celle à laquelle devoient être rapportées toutes les mesures postérieures.

### *Toise du Nord.*

Ainsi, la toise même déposée à l'Académie, & destinée à retrouver la juste longueur de la nôtre, si dans le transport il lui fût survenu quelques accidens, est celle dont les Académiciens du Nord ont fait usage dans toutes leurs opérations; nous sommes par-là d'autant plus assurés, que la longueur des

---

(d) Inscriptions laissées à Quito, à Tarqui & à Cotchesqui, &c.

Degrés mesurés sous l'Équateur & sous le Cercle polaire, est déterminée par une mesure commune.

Il est vrai que depuis que les deux toises sont revenues en France, on a cru trouver entr'elles, par une nouvelle comparaison, une légère différence, qu'on a jugée d'un vingtième ou d'un trentième de ligne (dont la toise du Nord est plus courte), en attendant une détermination plus précise (e). Mais il est plus que probable que cette différence n'est survenue que depuis la mesure du Degré qui coupe le Cercle polaire, & qu'elle provient du raccourcissement de la toise portée au Nord: & voici comment je le prouve. On fait que le vaisseau sur lequel elle fut embarquée, au retour, fit naufrage dans le golfe de Bothnie, la toise fut mouillée de l'eau de la mer; c'est sur-tout aux extrémités & aux arêtes d'un fer limé que la rouille s'attache. Cette rouille n'a pu être enlevée sans que la toise perdît un peu de sa longueur; elle doit donc nécessairement être un peu plus courte aujourd'hui qu'elle n'étoit en 1735, lorsqu'elle fut comparée à la nôtre. Elle l'est en effet, & c'est une nouvelle preuve de leur égalité primitive; mais le changement survenu à la toise du Nord, est postérieur à toutes les opérations faites en Lapponie; la base de 7000 toises qui leur a servi de fondement, a donc été mesurée avec une toise égale à la nôtre; la longueur du Degré du Nord, & celle de nos trois Degrés voisins de l'Équateur, ont donc été déterminées par une mesure commune. Les expériences sur la gravité faites par les Académiciens du Nord; leurs mesures du pendule à secondes, & toutes les nôtres ont donc été rapportées à la longueur de notre toise, à laquelle la leur étoit alors égale. Tous ces résultats sont publiés depuis vingt ans dans les livres sur la Figure de la Terre, de M. de Maupertuis & de M. Clairaut, dans la relation de M. l'abbé Outhier, dans la mesure du Degré entre Paris & Amiens, dans les

---

(e) Voyez le rapport des quatre Commissaires, inséré dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1754, p. 178; & le Journal des opérations de M. le Monnier, imprimé au Louvre en 1757, page 8, ligne 11.

Ouvrages des Mathématiciens de l'Europe qui ont traité de cette matière, & dans les Journaux Littéraires de toutes les Nations.

*Toise de l'Observatoire ou des Degrés de France.*

Les Degrés du Méridien, mesurés en France, surpassent en nombre la somme des Degrés mesurés ailleurs. La toise avec laquelle ils ont été mesurés en France, a donc eu plus de part que toutes les autres à la mesure de la Terre, & mérite par conséquent la plus grande attention.

En 1739 & 1740, M. Cassini de Thury & M. l'Abbé de la Caille vérifièrent de nouveau la Méridienne qui traverse la France, & qui comprend 8 degrés & demi depuis Dunkerque jusqu'à Collioure, en passant par l'Observatoire royal. Ils partirent sans mesurer de base, & calculèrent d'abord tous leurs triangles d'après l'ancienne base de Villejuive à Juvifi, mesurée par M. Picard. Arrivés à Bourges, ils mesurèrent sur le terrain une nouvelle base pour vérifier leurs opérations. Ils la trouvèrent, par leur mesure actuelle, notablement plus courte que par le calcul fondé sur la longueur qu'ils attribuoient, d'après M. Picard, à la base de Villejuive. Alors, pour la première fois, ils commencèrent à soupçonner cette base d'erreur. Ce soupçon communiqué par eux à feu M. Cassini, ne fit aucune impression sur lui; prévenu comme tout le monde en faveur de l'exactitude de M. Picard, & personnellement intéressé à croire exactement mesurée une base qu'il avoit prise pour fondement de toutes les mesures de l'ancienne Méridienne, il rejeta d'abord toute l'erreur sur les opérations de M. son fils & de M. l'Abbé de la Caille. Il les exhorta l'un & l'autre à revoir leurs calculs, & à répéter la mesure de leurs angles, & celle de leur base de Bourges. Tout cela fut fait : ils trouvèrent le même résultat. M. Cassini se vit alors obligé de vérifier à son tour la base de Villejuive. Il ne s'y détermina qu'à la dernière extrémité : ce ne fut même qu'après l'avoir mesurée trois fois, & l'avoir toujours trouvée plus courte que M. Picard d'environ une toise par mille, qu'il prit enfin sur lui d'en parler à l'Académie, & de demander

des Commissaires pour en constater contradictoirement la mesure. Encore la répéta-t-il une quatrième fois en particulier, avant la cinquième mesure dont les Commissaires nommés par l'Académie furent témoins.

On sait ce qui s'est passé depuis, & les dernières vérifications faites en 1756. S'il reste encore quelque doute à cet égard, ce ne peut être que sur le plus ou le moins; mais on s'accorde à conclure que M. Picard a compté trop de toises dans sa base. Les quatre Commissaires trouvent, comme M.<sup>rs</sup> de Thury & de la Caille, que c'est presque une toise sur 1000 ou 56 toises sur le Degré, que M. Picard a compté de trop. Ils trouvent cependant la différence moins grande que M. de Thury, d'un dixième de toise sur la base; savoir, 5748 toises 7 pouces & demi, au lieu de 5748 toises tout juste (*f*), ce qui fait une toise de moins sur le degré. M. le Monnier trouve que l'erreur de M. Picard n'est que de  $\frac{3}{4}$  de toise par mille & un peu moins, ce qui ne feroit que 42 toises sur le Degré pour l'erreur dans la mesure géodésique de M. Picard, au lieu de 56 qu'ont trouvé les quatre Commissaires.

Les trois règles de fer de 20 pieds dont M. Cassini s'étoit servi pour vérifier la base de Villejuive en 1740, avoient été réglées avec deux toises de fer conservées à l'Observatoire, dont l'une à quatre faces égales, avoit appartenu à feu M. de la Hire; la mesure de la même base par les quatre Commissaires, dont le rapport est imprimé (*g*), fut faite avec la toise du Nord, en 1756. Cette mesure s'accorde à un demi-pied près avec la mesure moyenne de M. Cassini, qui l'avoit répétée cinq fois en 1740, & celle-ci sert de fondement à toutes les distances conclues dans le Livre de la Méridienne de Paris, vérifiée. Cette comparaison tient lieu de la vérification ordonnée par la délibération de l'Académie, dont j'ai parlé plus haut, & de laquelle j'ai sollicité plusieurs fois l'exécution, pour connoître le rapport de la toise de l'Obser-

---

(*f*) Voyez Mérid. vérif. page 36, & le rapport des Commissaires, page 21.

(*g*) Voyez le rapport des Commissaires, imprimé in-8.<sup>e</sup> réimprimé dans les Mémoires de l'Académie, année 1754, page 172.



vatoire, ou de M. Cassini, à la nôtre; puisque par la nouvelle mesure de 1756, exécutée avec la toise du Nord, on a trouvé le même nombre de toises & de pieds à la base de Villejuive, qu'avoient trouvé feu M. Cassini & M. de la Caille en 1740, avec leur toise; il s'ensuit que la toise de l'Observatoire, avec laquelle les Degrés de France ont été mesurés, ne diffère pas sensiblement de la toise du Nord, & celle-ci, malgré son raccourcissement, ne diffère aujourd'hui de la nôtre que d'un  $25^e$  de ligne (la différence peut être vérifiée encore plus exactement, ainsi que celle de l'une & l'autre de ces deux toises à celle qui a servi à la mesure des Degrés de France), qui ne produiroit que deux toises & demie de différence sur la longueur du Degré, quand on négligeroit d'en tenir compte. La toise employée aux mesures des Degrés de France, peut donc être prise pour la nôtre.

J'avoue qu'en commençant ce Mémoire, je ne songeois qu'à prouver que la toise de l'Équateur, adoptée dès le mois d'Avril 1735, par l'Académie, & celle du Nord qui lui étoit parfaitement égale, lorsqu'elle a servi à mesurer le Degré sous le Cercle polaire, étoient les originaux auxquels toutes les autres toises employées postérieurement, devoient être rapportées, d'autant plus que feu M. Cassini, présent lorsque nous présentâmes notre toise à l'Académie en partant pour l'Équateur, & que nous en laissâmes un modèle, ne parla point de la sienne, que nous aurions prise volontiers, n'ayant alors aucune raison pour préférer la nôtre. Ce n'est qu'en examinant la chose en détail, que j'ai reconnu, comme je viens de le prouver, que la toise de l'Observatoire, avec laquelle les Degrés de France ont été mesurés, & de laquelle je desirois & craignois la comparaison avec la nôtre, en différoit si peu qu'il n'étoit guère permis d'espérer un pareil accord de deux mesures qui n'ont pas été construites sur un même étalon; en sorte que la réduction du Degré de France, pour les rapporter à notre toise, peut être négligée.

*Toise du Cap de Bonne - espérance.*

M. l'Abbé de la Caille nous apprend, dans les Mémoires

de l'Académie, pour l'année 1751, que la toise qu'il avoit portée au cap de Bonne-espérance, & dont il s'est servi pour la mesure de ses deux Degrés en 1752, étoit vérifiée sur l'étalon du sieur Langlois, qui a servi à fixer la longueur précise des autres toises portées au Pérou & en Lapponie (h). Cette toise, apportée par M. de la Caille à l'Académie, en 1756, pour la comparer aux autres lors de la dernière vérification de la base de Villejuive, ne s'est plus retrouvée; mais ayant été construite par le sieur Langlois, alors fort exercé dans ce genre de travail, & sur le même étalon que les toises de l'Équateur & du Nord, lequel est existant; on ne peut que supposer cette toise égale à la nôtre.

Voilà donc quatre mesures des Degrés terrestres exécutées en divers climats, par neuf Académiciens, avec la même toise ou des toises égales. Il ne faut donc plus demander laquelle des quatre est la véritable; le choix entre la toise de l'Équateur, celle du Nord, celle de l'Observatoire & celle du Cap, devient indifférent, puisque leur longueur est la même.

### *Toise de M. de Mairan.*

Il nous reste à parler de la toise de M. de Mairan, très-connue de l'Académie. Elle n'a pas été employée aux mesures des Degrés de nos Académiciens; mais elle est célèbre par les expériences du pendule portées à la plus grande précision, & dont M. de Mairan a rendu compte à l'Académie le 19 Novembre 1735. On y lit (i), que la toise est une règle de fer toute pareille à celle qui a été emportée au Pérou, & dont on a laissé le modèle à l'Académie, & qu'il l'avoit vérifiée sur l'étalon du Châtelet; mais soit que cette vérification ait été faite par une température d'air fort différente de celle de 13 degrés du thermomètre de M. de Reaumur, qu'observa M. Godin, lorsqu'il compara la toise de fer que nous portâmes à l'Équateur, soit, comme il est plus vraisemblable, que la différence vienne uniquement de la grossièreté de

---

(h) Mémoires de l'Académie, année 1751, page 433.

(i) Mémoires de l'Académie, année 1735, page 157.

l'étalon, telle, comme je l'ai déjà remarqué, que le même Observateur, en comparant deux fois la même toise, trouveroit des résultats différens; la toise de M. de Mairan est d'environ un dixième de ligne plus courte que la nôtre, par la confrontation immédiate qui en a été faite; elle a été jugée en 1756 d'un 15.<sup>e</sup> de ligne au moins plus courte que la toise du Nord, qui dans son état présent est plus courte d'un 25.<sup>e</sup> de ligne que celle de l'Équateur. La toise de l'Équateur est donc plus longue que celle de M. de Mairan d'un 15.<sup>e</sup> au moins, plus  $\frac{1}{25}$ , ce qui fait  $\frac{8}{75}$  au moins, ou plus d'un 10.<sup>e</sup>, & par conséquent, que toutes celles qui lui sont égales, & qui sont consacrées par les mesures des Degrés du Méridien en Laponie, en France & en Afrique, comme la nôtre par les trois Degrés mesurés en Amérique.

#### C O N C L U S I O N.

Après les faits que je viens d'exposer, qui se sont passés sous nos yeux, que chacun peut se rappeler, & dont les preuves par écrit sont entre les mains de tout le monde, peut-on mettre en question quelle est la toise de l'Académie? La toise de l'Académie est sans contredit celle qu'ont employée dans leurs opérations les Académiciens chargés de la mesure des Degrés terrestres. Elle est désignée sous ce nom dans tous les ouvrages des Mathématiciens de l'Europe; & c'est ce même nom que M.<sup>rs</sup> Hellot & Camus lui donnoient il y a douze ans, dans leur rapport sur la vérification de l'aune (*k*); il est vrai qu'ils supposoient que la toise de M. de Mairan étoit égale, je l'ai supposé moi-même dans mon Mémoire sur la *Mesure universelle* (1); j'ai depuis réglé la demi-toise que j'ai portée en Italie, sur la toise de M. de Mairan. Tant que celle-ci a passé pour être égale à la nôtre, elle a pu être prise pour la toise de l'Académie: aujourd'hui que l'on fait qu'elle en diffère, elles ne peuvent plus être prises l'une pour l'autre,

(*k*) Mémoires de l'Académie, année 1746, page 610.

(1) Voyez les Mémoires de l'Académie, année 1747, page 499.

quand il sera question de précision. Il y a moins d'inconvéniens sans doute à retrancher trois ou quatre centièmes de ligne, sur la longueur du seul pendule de Paris, que M. de Mairan a rapporté à sa toise particulière, qu'à changer non-seulement les résultats de toutes les expériences du pendule faites à Saint-Domingue, à Portobelo, à Panama, à Manta, à Quito, à Pitchincha, au Para, à Cayenne, à Torneâ & au cap de Bonne-espérance, mais encore toutes les longueurs des Degrés mesurés en diverses parties de la Terre, par neuf Académiciens chargés de ce travail par ordre du Roi.

S'il y avoit des différences sensibles entre les toises dont les divers Académiciens ont fait usage pour la mesure de leurs Degrés, au Pérou, en Lapponie, en France & au Cap, la toise que nous fîmes approuver par l'Académie en 1735, & dont M. de Mairan reconnoît que nous laissons le modèle, mériteroit la préférence, comme la plus authentique; mais j'ai prouvé que des quatre toises employées par nos Académiciens à la mesure de la Terre, trois sont identiquement la même que celle de l'Équateur, & que la quatrième n'en diffère que d'une quantité qui peut être négligée. On peut donc dire que nous avons trois témoins, & même quatre, qui déposent en faveur de la toise de l'Équateur; outre son droit que je viens d'établir, elle a vingt-trois ans de possession: l'Académie, après l'avoir adoptée sans que personne y mit opposition, ne peut aujourd'hui, sans tomber en contradiction avec elle-même, en adopter une autre pour la sienne; son premier jugement, s'il étoit rétracté, contre toute vraisemblance, après un si long temps, pourroit faire craindre que la seconde décision ne fût pas plus irrévocable que la première.

Je ne m'oppose point à ce que la toise du Châtelet soit étalonnée sur celle de M. de Mairan; mais en ce cas, il faudroit se souvenir que la toise du Châtelet ne sera pas exactement celle de l'Académie; cependant la réformation de l'étalon public ne doit pas se faire au nom de l'Académie, à moins que l'Académie n'emploie sa propre toise, celle qui a servi à la mesure des Degrés.

*Des moyens de conserver la longueur de la toise de l'Académie.*

Il ne suffit pas de constater, par une nouvelle délibération, la longueur de la toise académique ; il s'agit encore de conserver cette toise d'une manière invariable. Un étalon de fer ou d'acier ne suffit pas pour cela. Un autre moyen dont on devoit attendre plus de solidité, n'a pas été plus utilement pratiqué par feu M. Cassini. Aidé de M. l'abbé de la Caille, il avoit, en 1740, marqué sur des pierres très-unies qui font le pavé de la grande salle de l'Observatoire, où est la méridienne, la longueur de dix toises que formoit l'assemblage des trois règles de vingt pieds, avec laquelle il vérifia depuis la base de M. Picard. Le trait qui terminoit les dix toises subsiste encore sur le carreau ; mais l'autre terme de la mesure, un mur de sept pieds d'épaisseur qui paroïssoit inébranlable, s'est séparé du pavé, & laisse un vide de plus d'une ligne.

Pour mettre le nouvel étalon de la toise de l'Académie à l'abri des injures des temps & des accidens, il faut qu'il soit non-seulement d'une seule pièce, mais d'une matière sur laquelle la rouille n'ait point de prise. On pourroit faire cet étalon de marbre, mais cette pierre n'est pas assez dure ; elle seroit sujette à s'user par le contact des mesures présentées. Le porphyre est une matière trop rare en France ; mais nous avons des granites en Normandie, sur lesquels la lime n'a point de prise. Les anciens obélisques Égyptiens, transportés à Rome, sont de cette matière, & la plupart se sont conservés sains & entiers depuis près de quatre mille ans.

J'estime donc qu'au défaut du porphyre, le nouvel étalon devroit être creusé dans une table ou tablette de granite. Deux saillies d'équerre & dont les faces intérieures seroient parallèles & polies, comprendroient exactement la longueur de la toise de l'Académie. Les toises de fer, ou d'autres matières, qu'on demande de plusieurs endroits de l'Europe où l'on projette de mesurer les Degrés, ou celles que l'on enverroit désormais aux Académies étrangères, seroient ajustées

sur cet étalon , sans qu'il y eût à craindre que dans plusieurs siècles , il pût recevoir quelqu'altération ; on y feroit entrer exactement une règle de fer , qui serviroit au Châtelet de *verge conservatrice* , pour le nouvel étalon publiquement exposé ; sans préjudice d'un autre étalon pareil , que M. de Mairan propose de renfermer & de laisser à la garde des Magistrats , pour ne servir qu'une fois l'année.

Pour donner la facilité de prendre la longueur de la toise entre les pointes d'un compas , il seroit à propos de tracer avec le diamant sur la tablette de granite , une ligne fine parallèle à la longueur de l'étalon , terminée par deux points , & divisée au moins par les deux extrémités , en pouces & en lignes. On pourroit aussi , sur cette même ligne ou sur une autre voisine & parallèle , marquer la longueur du pendule.

A cette occasion , je ne puis m'empêcher de remarquer que la circonstance présente , où l'Académie est consultée pour réformer l'étalon de la mesure publique , seroit très-favorable pour proposer l'usage d'une mesure universelle si desirable , & dont la moindre attention peut faire sentir les avantages (m).

M. Mouton , Chanoine de Lyon , est le premier , que je sache , qui proposa cette mesure tirée du pendule ; ce fut en 1670 (n). Il y a bien de l'apparence que si cette idée heureuse , adoptée par M. Picard , en 1672 (dans sa *Mesure de la Terre*) ; & par M. Huygens , en 1673 (*de Horologio oscillatorio*) , eût été connue dès 1668 , lors de la réformation de la toise du Châtelet , au lieu de raccourcir de 5 lignes l'ancienne toise , comme on le fit alors , M. Picard , qui fut consulté sur cette toise , eût au contraire proposé de l'allonger , pour lui donner , par un changement à peine sensible , une longueur double du pendule à secondes. Il suffisoit alors d'ajouter 9 lignes  $\frac{1}{2}$  à l'ancienne toise , pour rendre la demi-toise égale au pendule équinoxial qui bat les secondes , & dont la longueur excède à peine 36 pouces 7 lignes ; aujour-

---

(m) Voyez le Mémoire sur cette matière , dans le Recueil de l'Académie , année 1747.

(n) *Observationes diam. Sol Lun.* Lyon , publiées en 1670.

d'hui que la toise du Châtelet est raccourcie de 5 lignes, il faudroit l'allonger d'un peu plus de 14 lignes.

Quoique ce changement de la toise puisse paroître considérable, les avantages de la mesure, que j'ai détaillés ailleurs, se feroient bientôt sentir. La réduction de toutes les mesures de France à celle que je propose avoit été agréée par le Gouvernement, sous le ministère de feu M. Orry; & si une mort prématurée n'eût enlevé M. du Fay, la demi-toise de France seroit aujourd'hui la mesure commune de toutes les Académies de l'Europe, en attendant qu'elle devînt celle de toutes les Nations.

### *Notes sur ce Mémoire.*

La proposition d'adopter la toise du Pérou, que faisoit M. de la Condamine en 1758, dans le Mémoire qui précède, n'eut pas d'abord d'exécution, par l'opposition de M. de Mairan: mais le 16 Mai 1766, il y eut une Déclaration du Roi, rendue par les soins de M. Trudaine de Montigny, en exécution de laquelle M. Tillet, de l'Académie des Sciences, a fait faire environ quatre-vingts toises semblables à celle qui avoit servi sous l'Équateur, qu'on a envoyées, de même que l'aune de Paris & le poids de marc, au Châtelet de Paris & aux Procureurs généraux des différens Parlemens: ainsi, la toise que M. de la Condamine décrit dans ce Mémoire, se trouve multipliée actuellement & ne sauroit plus se perdre. On l'a envoyée également en Guyanne, en Corse, à Vienne en Autriche, à Turin, à Florence, & M. Maskelyne y a rapporté la mesure du Degré faite dans l'Amérique angloise, (*Philosophical Transact.* année 1768, p. 326). L'original de toutes ces toises est déposé au cabinet de l'Académie.

Celle de M. de Mairan a été acquise par M. de la Lande, qui l'a trouvée d'environ un douzième de ligne plus petite que celle du Pérou, actuellement adoptée; mais on se propose de faire bientôt la comparaison authentique & exacte de ces deux toises avec celle du Nord, qui a servi à la vérification de 1756, & qui est entre les mains de M. le Monnier.



## M É M O I R E

*Sur le changement qu'éprouve l'Os de la partie des pieds de certains Quadrupèdes, appelé le Canon.*

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

J'AI communiqué en 1758, à l'Académie, une Remarque sur le changement qu'éprouvent les os d'une partie des pieds des bœufs & des moutons, que l'on nomme le *canon*, & je l'ai donnée au Public en 1759, dans un Ouvrage que je fis imprimer, & qui a pour titre : *Mémoire sur les os, pour servir de Réponse aux Objections proposées contre le sentiment de M. Duhamel du Monceau*, imprimé chez Guerin & Delatour. Ce fait singulier, dont je vais parler, que j'ai le premier observé, méritoit d'être suivi plus particulièrement. Avant de rapporter mon nouveau travail, je vais transcrire ce que j'ai dit dans les Mémoires que je viens de citer, sur ce changement dans l'os du pied de certains animaux.

Dans les cochons parvenus à leur dernier terme d'accroissement, les pieds de ces animaux sont terminés par quatre os longs, dont deux répondent aux deux pinces, les deux autres forment les phalanges de ce qu'on nomme l'*argot*.

Dans les bœufs, vaches, moutons, &c. lorsqu'on examine l'avant-dernière portion de la jambe de ces animaux, qui porte les pinces (*a*, pl. I.<sup>re</sup>, fig. 1, 2, 3, 4 & 5), que l'on nomme le *canon*, avant que cette partie soit parvenue à son dernier terme d'accroissement, on la voit composée d'un seul os (fig. 11), sur lequel paroît extérieurement un sillon *bb*, profond, qui n'a point échappé à M. Daubenton, dans la description qu'il a donnée de cette partie du bœuf (*a*); mais voici ce qui m'a paru digne d'être remarqué, & qui n'avoit point été vu par les Naturalistes & les Anatomistes.

---

(a) Histoire Naturelle, Tome IV, page 527, in-4.<sup>o</sup> édit. 1753.



Dans les fœtus des vaches & des brebis, dès que le canon (*a*, *fig. 1*), commence à prendre de la dureté, & que la charpente de l'animal se charge de la substance osseuse, on le voit composé (*fig. 2, a*) de deux os longs, cylindriques (*a*, *fig. 3*), séparés l'un de l'autre (*a*, *fig. 4*), & revêtus d'un périoste épais qui enveloppe comme d'une espèce de gaine ces deux os, mais que l'on a peine à distinguer dans la partie intermédiaire où ces os se touchent (*fig. 8, b*). Ces deux os augmentent en grosseur & en longueur (*fig. 6, 7 & 8, a*); les épiphyses deviennent adhérentes. Nous ne suivrons pas plus loin, & dans plus de détails, les progrès de cette ossification, mais nous dirons que dans ce moment les deux os dont nous venons de parler, peuvent encore se séparer; & que quelque temps après, ces deux cylindres osseux qui avoient été si distincts, se réunissent dans leur partie moyenne; que cette réunion se prolonge ensuite sur toute l'étendue des deux os, & qu'il est impossible pour lors de les séparer l'un de l'autre. Si dans ce temps on scie transversalement l'os, on voit encore distinctement dans son intérieur (*fig. 9*) les deux cylindres, & au milieu la partie intermédiaire, qui, dans ce moment, forme une double cloison. Quelques mois après, & à mesure que l'animal devient plus âgé, cette cloison perd de son épaisseur (*fig. 10*); elle ne forme plus qu'un tissu réticulaire, qui, avec le temps, s'évanouit entièrement. La cloison se perd, 1.<sup>o</sup> dans la partie moyenne de l'os; 2.<sup>o</sup> vers les épiphyses; enfin cette partie du pied de ces animaux, après leur dernier terme d'accroissement, n'est plus composée que d'un seul os; & si l'on coupe transversalement, dans cette circonstance, le canon, on n'y voit qu'une cavité intérieure (*fig. 11*): s'il subsiste quelque vestige de son ancienne forme, ce n'est que dans un sillon profond *bb*, sur la surface extérieure de cet os, qui a frappé les Naturalistes, sans qu'il ait pu les instruire de ce qui l'avoit produit, de manière qu'aucun n'avoit encore parlé des deux os qui formoient, dans le premier âge, cette partie des animaux à pieds fourchus.

Le squelette du corps humain est peut-être le seul que l'on

ait étudié depuis le fœtus jusqu'à l'état qui précède sa destruction. On s'est assuré de quelques changemens qu'il éprouve ; on en a découvert dans les parties molles ; on a aussi trouvé de nouvelles ossifications ou des changemens dans certains os, considérés en différens temps de la vie ; mais je crois que l'on n'a vu de comparable au fait dont nous parlons, que la destruction de quelques cloisons osseuses dans la mâchoire & dans les sinus de l'homme, qui s'effacent avec le temps. Le changement considérable que nous venons de décrire dans le canon des animaux à pieds fourchus, ne semble-t-il pas nous promettre de nouvelles connoissances, si l'on étudioit plus particulièrement l'anatomie des animaux ; & plus encore, si l'on examinoit, & si l'on comparoit le squelette d'un animal, dans différens âges, & dans les états par où il passe pendant le court temps de sa vie ?

J'ai pensé que le fait singulier dont je viens de parler, méritoit d'être suivi, & je me suis proposé, 1.<sup>o</sup> d'examiner le plus de fœtus d'animaux à pieds fourchus qu'il me seroit possible, pour juger s'il falloit restreindre cette singularité, ou la regarder comme presque générale aux espèces de cette classe.

2.<sup>o</sup> de m'assurer comment se faisoit le changement dans ces os, qui originairement séparés, se réunissent après, & n'en forment plus qu'un seul. Je croyois ce changement aisé à suivre dans les pieds des quadrupèdes, & je me flattois qu'en augmentant nos connoissances, je pourrois encore les rendre utiles à l'humanité, sans m'apercevoir que mes foibles lumières en Anatomie me faisoient labourer inutilement un champ où des personnes plus consommées auroient pu faire d'abondantes récoltes.

Maintenant j'avoue que malgré des dépenses & des soins ; je ne puis exposer que des faits qui ne me conduisent pas à tirer des conclusions à l'abri de tout doute.

Pour m'assurer si ce changement dans les os du canon, étoit seulement attaché à quelques espèces de quadrupèdes de la classe des pieds fourchus, ou s'il étoit général, ou presque général à la classe, je me suis procuré le plus qu'il  
m'a

m'a été possible de fœtus de ces animaux; & je puis assurer maintenant qu'il n'est pas particulier à ceux des vaches & des brebis, mais qu'il est commun aux fœtus de la chèvre, de la biche, du daim, du chevreuil, de sorte que ce fait semble si général aux pieds fourchus, qu'on peut plutôt citer les espèces de cette classe qui y feroient une exception, comme les porcs, les sangliers. Sur quoi il est bon d'observer que les sangliers-porcs sont les seuls dans la classe des pieds fourchus, (au moins dans nos contrées) qui ne ruminent point.

Je devois examiner cet os dans les différens états par où il passe avant d'arriver à son dernier terme d'accroissement, & comparer, avec le plus grand soin, tous les changemens.

Voici les remarques que j'ai faites en comparant la même partie du bœuf, & l'examinant en différens temps de sa vie.

Le sentiment le plus général des Anatomistes, est que dans les os longs, le canal médullaire augmente en diamètre, tant que l'os acquiert de l'épaisseur; mais je me suis assuré que le canal médullaire dans l'os du canon, augmente seulement jusqu'au terme où la cloison commence à se dissiper.

C'est environ neuf à dix semaines après la naissance de l'animal, que les os du canon sont joints, & que la cloison commence à s'anéantir; alors le canal médullaire paroît avoir, autant que l'on en peut juger, les mêmes dimensions qu'il aura, lorsque l'animal sera entièrement formé. Je m'en suis assuré en sciant un jeune os dans son milieu à égale distance de ses épiphyses, & un pareil os qui a pris son accroissement à égale distance de ses extrémités.

Je me crois aussi fondé à dire que l'os du canon doit son augmentation en grosseur à l'addition de nouvelles couches osseuses qui recouvrent le cylindre, sans se charger intérieurement de nouvelles lames osseuses qui rétréciroient nécessairement le diamètre du canal médullaire; ce qui ne s'accorde pas avec le fait.

J'ai pensé qu'en décomposant l'os du canon dans le temps où la cloison commence à s'évanouir, & dans le moment où elle perd de son épaisseur, il me seroit possible de juger

( par la texture de la partie cartilagineuse de cet os privé de la terre qui lui donne du soutien ), comment cet os acquiert son épaisseur par l'addition de nouvelles couches qui contournent & enveloppent le cylindre.

J'ai mis dans un acide adouci un des deux os, non encore réunis, qui dans le pied d'un jeune veau forment le canon. Les lames paroissent se suivre également dans cet os, tant intérieurement que dans son extérieur, & les lames tant internes qu'externes contournent tout le cylindre osseux.

J'ai coupé une portion d'un os d'un canon dans le temps où les deux cylindres ne faisant qu'un; on voyoit dans ce cylindre la cloison qui, déjà diminuée d'épaisseur, commençoit à se perdre.

J'ai mis cet os se décomposer dans un acide affoibli, pour examiner ensuite le cartilage qui en forme la charpente; les lames extérieures contournent entièrement le cylindre osseux; mais intérieurement les lames n'étoient pas aussi fortes aux endroits où portoit la cloison: on y voyoit des fibres qui se portoient dans cette cloison & dans toute l'épaisseur de cet os. Les fibres n'étoient point liées aussi intimement; on voyoit à l'endroit où étoit la cloison diminuée d'épaisseur, une désunion dans les fibres que je ne puis mieux comparer qu'à une étoffe dont la chaîne ou la trame seroient interrompues sur quelques fils; & l'on remarquoit ce même dérangement dans les deux parties du cylindre osseux où portoit la cloison.

Si les os longs, à mesure qu'ils croissent, devoient leur plus grande épaisseur à une addition de nouvelles couches osseuses qui se fit seulement extérieurement, & si le canal médullaire ne devoit ses plus grandes dimensions qu'à l'extension des lames osseuses internes, je crois qu'il seroit aisé de rendre raison, & d'expliquer comment la cloison diminue d'épaisseur, & comment elle se dissipe entièrement. Les nouvelles lames osseuses qui recouvrent les deux cylindres extérieurement & qui interrompent le passage de la matière terreuse dans la cloison intermédiaire, celles internes qui

s'étendent & donnent au canal médullaire un espace plus grand, expliqueroient clairement la diminution d'épaisseur de cette cloison qui ne recevant plus de matière crétacée, & la nourriture qui lui est propre, après avoir diminué ainsi d'épaisseur, se dissiperoit entièrement. Cette manière de rendre raison de ce fait, paroît conforme aux observations que je viens d'exposer.

Voici encore une autre difficulté qui s'offre dans le changement de ces deux os en un seul. Dans les premiers temps de la vie du bœuf, cette partie de sa jambe est composée de deux os remplis de moelle. Suivant les Anatomistes, cette moelle a dû avoir sa gaine; mais dans la suite cette cloison s'étant perdue, & ne restant plus qu'un canal médullaire, il n'y a plus qu'une moelle contenue par conséquent dans une seule gaine. Comment ce changement s'est-il fait? Est-ce par un déchirement de ces deux gaines médullaires? Combien de faits intéressans pourrions-nous apprendre, s'ils ne se refusoient pas autant à nos observations? Je n'ose pas prétendre expliquer ces faits; je me borne à exposer les difficultés qui s'offrent, à qui voudroit en donner des raisons.

J'ai ouvert un os du canon d'un veau qui avoit la cloison intermédiaire, & j'ai trouvé chaque canal rempli de moelle; j'ai suivi cette moelle dans le même os d'un bœuf, & je n'ai vu qu'une moelle contenue dans une seule gaine, excepté vers l'épiphyse supérieure où la cloison subsiste toujours, & où l'os conservant les deux tuyaux, la moelle se bifurque pour garnir les deux espaces.

L'observation & la comparaison de ces os en différens temps de la vie du bœuf, l'examen de la partie molle de l'os & de sa charpente, dénuée de la partie terreuse qui en fait un corps solide, ne m'instruisant pas autant que je le desirois, je résolus de faire des plaies à de jeunes animaux vivans, pour découvrir comment s'opéroit cette mutation & ce passage de deux os en un seul. J'ai cru devoir préférer des agneaux pris peu d'heures après leur naissance, en

choisissant les plus vigoureux. Malgré mon exactitude à porter l'attention & les soins multipliés qu'exigeoient ces animaux délicats auxquels je faisois des blessures, j'en ai perdu plusieurs qui, étant morts peu de temps après les opérations, n'ont pu contribuer à mon instruction. Aussi n'en parlerai-je point ici; & si ce travail a eu quelque succès, je le dois encore à M. Dupas, Chirurgien de la ville de Pithiviers, qui m'a aidé dans ces expériences, & qui s'y est prêté par le seul motif qu'il espéroit augmenter nos connoissances en Anatomie.

Voici le raisonnement d'après lequel j'ai commencé ces expériences; je disois, la Nature presque toujours constante & régulière dans sa marche, a donné aux pieds des sangliers & des cochons domestiques deux os dont chacun répond à l'une des deux pinces; elle en a aussi pourvu les moutons & les bœufs, & je crois pouvoir présumer que, si ces deux os se changent en un seul dans ces derniers animaux, ce changement pourroit n'être dû qu'à leur position, à leur pression & à la contraction produite par les membranes qui recouvrent ces os. Si au contraire ils ne se réunissent pas dans les porcs, sangliers, &c. j'augurois pouvoir penser que la graisse empêche leur réunion immédiate; & en laissant une libre circulation à la matière osseuse, elle donne naissance à l'exception que font ces animaux, à ce qui se passe assez généralement dans les pieds des animaux à pieds fourchus. J'attendois que l'expérience, le meilleur guide & le plus sûr, détruisît ou me confirmât dans l'idée que j'avois prise.

I.<sup>re</sup>

Expérience.

J'ai fait choisir dans le troupeau de mon fermier, un agneau de deux jours de naissance, & qui paroissoit bien constitué; je préférerai pour mon expérience un des pieds de derrière, parce que le canon est plus long que celui des jambes de devant; l'autre jambe de derrière devoit me servir d'objet de comparaison.

M. Dupas leva avec la plus grande attention la peau, les tégumens, en gênant le moins qu'il étoit possible les nerfs & les ligamens tendineux du pied; mon dessein étoit de passer une lame mince de plomb entre les deux os du canon qui

devoient être encore tendres & non liés, je croyois qu'il étoit possible de les séparer avec le secours d'un scalpel, & d'obliger les os de se réunir assez dans leur partie moyenne pour permettre qu'on introduisît cette lame entre les deux cylindres osseux. Je desirois voir si ce corps étranger, placé entre les deux cylindres, nuirait au changement qui devoit s'opérer dans cette partie: deux mois après, j'ai fait tuer l'animal, & voici l'état où j'ai trouvé le canon de son pied.

J'ai disséqué premièrement le pied de derrière sur lequel on n'avoit point opéré, pour juger avec plus de certitude de l'état naturel de cet os, & par conséquent des changemens que l'opération avoit produit sur l'autre.

Les deux os qui originairement formoient le canon, étoient réunis & extérieurement paroissoient ne plus former qu'un seul os; mais en le sciant suivant sa longueur, on pouvoit s'assurer que la cloison subsistoit dans toute l'étendue de l'os; elle étoit seulement diminuée d'épaisseur. J'avois séparé cet os longitudinalement, de façon que toute la cloison se trouvoit sur une des divisions, tandis que l'autre partie étoit creuse & sans cloison.

J'ai examiné ensuite le pied que l'on avoit opéré (*Pl. II, fig. 1.<sup>re</sup> & 2.<sup>e</sup>, a*); l'expérience n'avoit pas réussi, comme je l'avois désiré. On avoit fait seulement une ouverture à l'un des deux cylindres, mais qui ne l'avoit pas séparé de part en part, & l'ouverture (*a*) se trouvoit un peu en dehors de la cloison. L'os étoit creusé, enfoncé dans cette partie, & la lame que l'on y avoit introduite, au lieu de se trouver placée, comme je l'aurois désiré, entre les deux cylindres, avoit fait seulement l'office d'une pointe ou d'un clou.

J'ai séparé ce canon longitudinalement; les os étoient réunis dans toute leur longueur, ainsi que je les avois trouvés à l'autre pied du même animal; la cloison étoit aussi épaisse, mais le cylindre osseux, à l'endroit qui avoit été piqué, étoit beaucoup plus épais; la cloison l'étoit aussi davantage à cet endroit, & il s'étoit formé une ossification nouvelle qui bouchoit presque entièrement le canal d'un des

deux cylindres à l'endroit où on l'avoit blessé, que l'on reconnoissoit, comme je l'ai déjà dit, à la surface extérieure de l'os par un enfoncement (*fig. 2, a*). Cette ossification nouvelle dans un des deux cylindres s'étoit jointe à la cloison intermédiaire, & ne me donnoit aucune nouvelle connoissance; j'y voyois ce qui arrive aux os, ou piqués ou fracturés; mais rien ne m'y apprenoit ce que seroit devenu la cloison dont je voulois connoître la destruction; je résolus donc de répéter cette expérience, en faisant plus d'attention à l'endroit où l'on poseroit la lame, & en l'introduisant dans une plus grande ouverture; c'est-à-dire, en faisant son possible pour séparer dans une plus grande étendue les deux os l'un de l'autre, & plaçant entre les deux une lame de plomb plus forte & plus large que n'étoit la première; mon dessein étoit encore dans cette seconde expérience de laisser vivre plus de temps l'animal, avant de m'assurer des changemens qu'auroit pu occasionner la lame.

## II.

## Expérience.

L'animal a été opéré deux jours après sa naissance: on fit alors une plus large ouverture, & son possible pour placer la lame dans la partie moyenne de l'os, & à l'endroit où l'on jugeoit que devoit être la cloison intermédiaire, on y introduisit cette lame; trois mois après, je fis tuer l'animal, & voici l'état où je trouvai le canon de la jambe opérée (*fig. 3*), la comparant à celle du même animal à laquelle je n'avois pas touché.

La jambe saine avoit perdu presque entièrement la cloison; au moins cette cloison ne subsistoit plus dans la partie moyenne de l'os; le canal médullaire de celle dans laquelle j'avois introduit la lame de plomb, s'étoit presque entièrement bouché par une nouvelle substance osseuse: le corps étranger introduit dans l'os, les efforts que l'on avoit fait pour former une ouverture, & y interposer la lame, avoient produit un dérangement (*fig. 4*) dans la substance même du corps de l'os. La cloison, si elle subsistoit, étoit au milieu d'une matière osseuse parmi laquelle il étoit impossible de la reconnoître. Ces tentatives infructueuses & qui m'avoient fait



perdre plusieurs agneaux peu de jours après l'opération, me firent recourir à un autre moyen pour m'apprendre ce que devenoit la cloison.

Je regardai la lame placée entre les deux jeunes os du canon d'un agneau peu propre à m'instruire de ce que devenoit la cloison, & de ce qui pouvoit la forcer de s'anéantir.

Je disois, si le changement des deux os en un seul n'est dû qu'à la liaison étroite, qu'à la pression des deux cylindres osseux par les membranes qui les environnent, en coupant dans le jeune âge une portion de l'un des deux cylindres, & enlevant cette portion, la pression d'un os contre son voisin n'existant plus dans l'endroit coupé, la cloison subsistera dans cet endroit, même dans l'animal parvenu à l'âge le plus avancé, tandis qu'elle s'évanouira dans les parties de ces deux os que je laisserai subsister.

Je destinai donc encore un agneau à mon instruction. Nous sacrifions tant d'animaux à notre sensualité, je croyois les faire servir plus utilement encore à l'humanité. C'étoit ce seul motif qui pouvoit me faire surmonter la répugnance que j'avois à faire souffrir ces animaux.

M. Dupas fit cette opération sur un jeune agneau de vingt-quatre ou trente heures de naissance; il enleva une partie d'un des os du canon de cet animal, de la longueur environ de huit à dix lignes entre deux traits de scie; il voulut bien panser la plaie de cet animal, & le conduire jusqu'à son entière guérison, ce qui exigea de grands soins; je les multipliois à mesure que le terme où il devoit servir à mon instruction approchoit: enfin au bout de six mois, je fis tuer l'animal; voici l'état où je trouvai cette partie du pied malade, toujours la comparant au pied de derrière auquel on n'avoit pas touché.

III.

Expérience.

Le canon du pied sain avoit perdu presque entièrement la cloison intermédiaire; elle ne subsistoit plus que d'environ cinq lignes vers l'épiphyse supérieure, & de six lignes vers la jointure inférieure. Ces portions restantes de la cloison

étoient très-minces ; les bords de la portion supérieure étoient réticulaires (*fig. 6*).

L'os du canon de l'autre jambe s'étoit régénéré dans la partie où une portion avoit été enlevée, la lame osseuse étoit plus épaisse dans la partie du nouvel os (*fig. 5, a, b*), & la cloison vers l'épiphyse à l'articulation supérieure de cet os, étoit à peu-près de la même longueur que nous l'avons trouvée sur l'os de la première jambe ; mais au-dessous de la plaie (*b, fig. 7*), la partie de la cloison qui restoit étoit beaucoup plus longue, plus épaisse que l'os de l'autre jambe. Vers le bas de la plaie, il subsistoit encore des filets osseux longs, & qui ne tenoient que foiblement à la portion de l'os qui avoit été endommagée ; de sorte que l'on voyoit aisément que la plaie faite à l'os avoit nuit essentiellement, principalement au-dessous de la portion qui avoit été emportée, à la destruction de la cloison, qui peut-être encore a eu lieu d'une façon plus complète seulement depuis la régénération de la nouvelle portion du canon.

J'ai dit que mes expériences ne me mettoient pas encore en état de prononcer sur la façon dont s'évanouissoit cette cloison intermédiaire ; mais en m'appuyant des observations des Anatomistes sur la régénération des os, en consultant ce qu'ont écrit M.<sup>rs</sup> du Hamel & de Haller, sur leur formation, M. Hérissant, sur leurs parties constituantes ; & en résumant ce que j'ai observé sur ce même os plus ou moins jeune, comparé avec un os qui a acquis son terme d'accroissement, je vois évidemment une circulation de la partie terreuse dans la substance cartilagineuse qui forme la charpente de l'os. Dans le cas des deux os que j'observe ici, la Nature n'est point sortie de la route frayée, elle a mis deux os à l'animal, à qui elle avoit donné deux pinces ou deux doigts ; mais ces deux os, par leur position, n'étoient point destinés à conserver leur forme. Dans les parties où les os doivent conserver leurs liaisons & leur mouvement avec les os voisins, la sinovie sert à leur entretien ; ici au contraire, il arrive que, lorsque ce qui est nécessaire à l'entretien de ce mouvement

Mouvement vient à manquer dans deux os qui sont voisins, & qui sont destinés à être séparés, il se forme une liaison contraire à l'état ordinaire; & peut-être par la suite ces os malades se réuniroient-ils au point, comme ici, de ne faire qu'un seul os.

J'imagine que la pression que doit éprouver cette cloison intermédiaire par les nouvelles couches osseuses qui se forment & qui donnent une plus grande épaisseur à ces deux os en les enveloppant, empêche la matière terreuse de circuler dans cette partie de ces os. La lame que j'ai introduite dans la seconde expérience entre les deux canons, a arrêté la circulation de cette substance terreuse, & il s'est formé un amas de suc terreux le long de la lame. Dans la troisième expérience, la plaie que j'ai faite à une partie du canon ayant oblitéré les passages de cette substance crétacée, la cloison a subsisté plus long-temps au-dessous de la plaie.

Ces expériences me paroissent encore indiquer le chemin que parcourt la matière terreuse qui donne de la solidité aux os, & comment ils perdent leur consistance, lorsque cette terre les abandonne. Quand on donne ouverture aux tuyaux qui lui servent de passage, elle s'extravase en forme de concrétions organisées si elle se dépose dans des lames de périoste déjà tuméfiées, & elle ne laisse qu'un amas terreux sans organisation lorsqu'elle n'est point distribuée dans des membranes du périoste.

Dans le cas des deux os que nous examinons, où de nouvelles couches osseuses contournent & enveloppent les premières déjà formées, alors la matière terreuse ne rentre plus dans la cloison intermédiaire, & elle se détruira avec le temps.

Que les Anatomistes consultent les Mémoires dans lesquels M. du Hamel traite de la formation & de la régénération des os, il leur sera aisé de faire l'application de ce qu'il a dit à ce qui se passe ici. L'on expliquera pour lors facilement comment se fait la réunion des deux os du canon dans les animaux à pieds fourchus, & le changement de ces deux os en un seul.

*Mem. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

T t t

tandis que ce même fait contribuera encore à confirmer le sentiment de cet Académicien, qu'il a développé dans les différens Mémoires que je viens de citer.

La matière colorante de la garance, qui a été si utile à M. du Hamel, pour suivre le progrès de l'ossification, ne pouvoit m'être d'aucun secours. Il s'agit ici non d'une formation nouvelle, mais d'une destruction. D'ailleurs, comment s'en servir pour des agneaux qu'il faudroit soumettre à cette nourriture dans leur premier âge? Je me renferme donc dans les bornes que je me suis prescrites; j'annonce ce que j'ai fait; j'ajoute même que je n'ai pas réussi comme je l'espérois, en n'épargnant ni les soins ni la dépense; je desirerai que des personnes éclairées en Anatomie soient assez frappées de l'utilité que l'on pourroit retirer du principe de ce fait singulier, pour tenter encore de nouvelles expériences.

## EXPLICATION DES FIGURES.

### P L A N C H E I.

**FIGURE 1.** La jambe entière d'un fœtus de mouton.

(a) la partie du pied que l'on nomme le canon.

**Fig. 2.** Ce pied dont la peau est ôtée pour faire voir le canon

(a) dans la place qu'il occupe.

**Fig. 3.** Ce canon (a) séparé.

**Fig. 4.** Les deux os qui composent ce canon (a).

**Fig. 5.** Le pied d'un jeune veau.

**Fig. 6.** Le canon de ce fœtus.

**Fig. 7.** Les deux os séparés qui le composent.

**Fig. 8.** Ces deux os avec le périoste qui les recouvre.

**Fig. 9.** Ces deux os qui dans un âge plus avancé se réunissent, & ne forment plus qu'un seul os divisé cependant par une cloison.

**Fig. 10.** L'os du canon dans un âge encore plus avancé. La cloison diminue d'épaisseur.

**Fig. 11.** Cet os parvenu à son dernier terme d'accroissement. On ne voit plus de cloison, mais seulement à l'extérieur un sillon profond (b b).

Fig. 6.



Fig. 7.



Fig. 8.



Fig. 11.



Fig. 10.



Fig. 9.



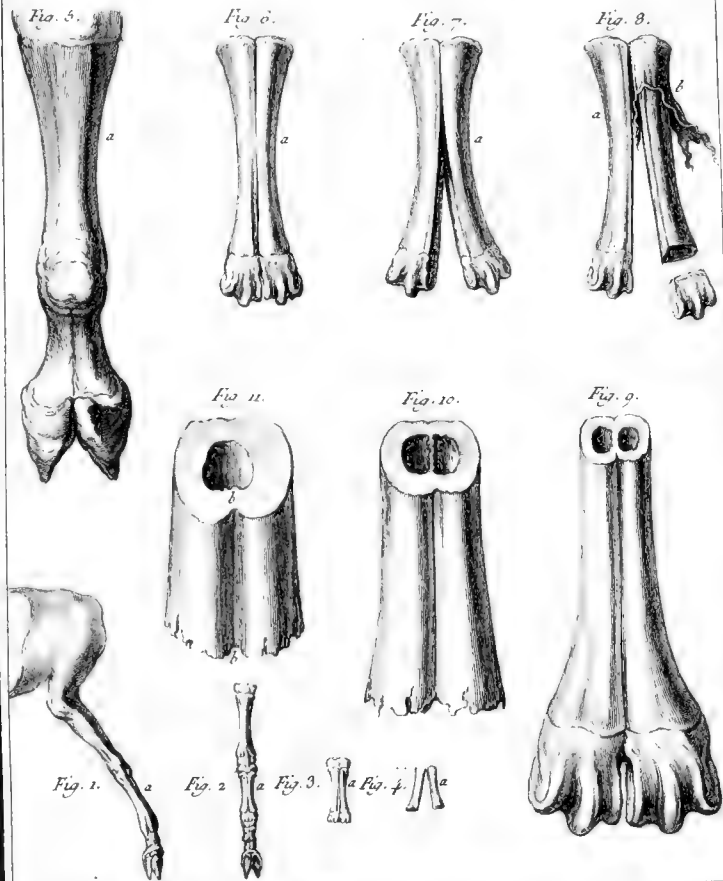
Fig. 3.



Fig. 4.

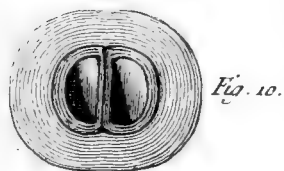
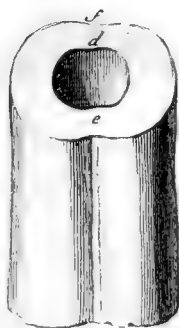
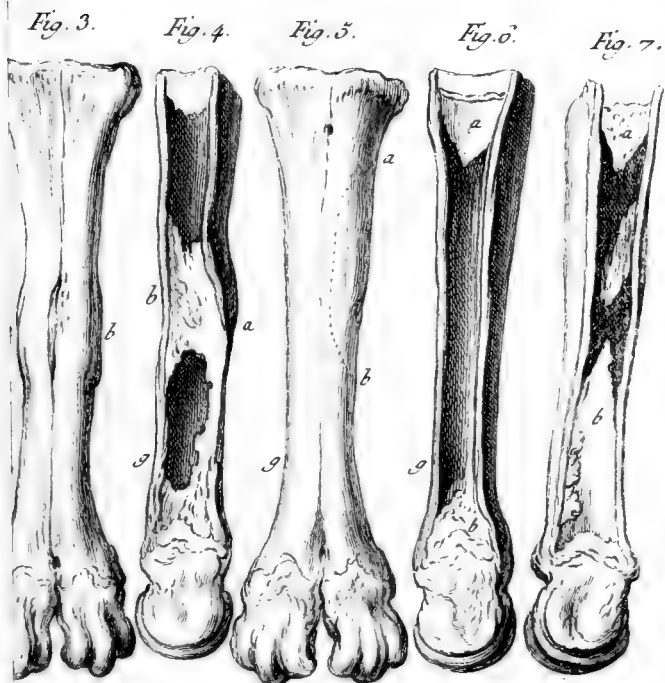


Pl. I.

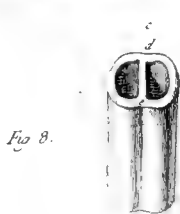
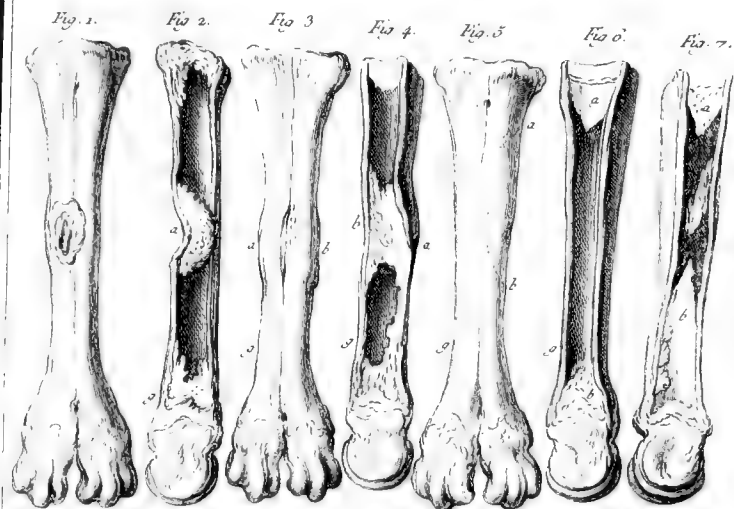


Ingram del.

Y. le Cour: Sculp.



Pl. II.





## PLANCHE II.

*Fig. 1.* L'os du canon d'un agneau dans lequel on vouloit introduire une lame de métal.

*Fig. 2.* Cet os ouvert suivant sa longueur (*a*). La matière osseuse nouvellement formée.

*Fig. 3.* L'os du canon d'un agneau dans lequel on a introduit une lame de plomb entre les deux os (*a, b*) qui composoient dans le jeune âge le canon de l'animal.

*Fig. 4.* Cet os ouvert suivant sa longueur. L'os (*a, b*) a changé de forme. Il s'est fait une nouvelle ossification en *a & b*.

*Fig. 5.* Le canon d'un agneau dont un des deux os a été coupé en sifflet depuis *a*, jusqu'en *b*.

*Fig. 6.* L'os de la jambe de cet animal qui n'a point été opérée, & que l'on a coupé suivant sa longueur, pour le pouvoir comparer à l'os de la jambe qui a souffert l'opération. *a, b*, les restes de la cloison.

*Fig. 7.* Le canon de la jambe opérée. *a*, la cloison presque détruite. *b*, la cloison beaucoup plus longue & plus apparente qu'elle ne l'est en *b* dans la *figure 6*.

*Fig. 8.* Un os de veau de neuf à dix semaines. Le canal médullaire *de*, aussi grand qu'il le sera dans un âge plus avancé (*fig. 9*), mais il devient plus épais avec l'âge, ce qui est exprimé par les traits ponctués *ef*. Lorsqu'on a décomposé l'os par un acide, cette cloison se détruit, & il reste en *de* deux espèces de rainures.

*Fig. 9.* Un os parvenu à son dernier terme d'accroissement. *de*, le canal médullaire; *df*, l'épaisseur de l'os. Après avoir laissé quelque temps cet os dans un acide, on le voit composé de couches ou de lames qui se couvrent les unes les autres.

*Fig. 10.* La coupe d'un os pour montrer la différence que l'on croit avoir remarquée entre l'arrangement des lames d'un jeune os, & de celles d'un os parvenu à son dernier terme d'accroissement.



# M É M O I R E

## SUR L'ÉLIMINATION\*.

Par M. VANDERMONDE.

**L**E terme de toutes les Recherches générales sur l'Élimination des inconnues dans les équations algébriques, ou sur l'art de ramener les équations qui renferment plusieurs inconnues, à des équations qui n'en renferment qu'une, seroit d'obtenir une formule d'élimination générale & unique, sous la forme la plus concise & la plus commode, & où le nombre d'équations & leurs degrés fussent désignés par des lettres indéterminées. Nous sommes sans doute très-éloignés de ce terme, mais on peut entrevoir quelque possibilité de l'atteindre. C'est ce que je me propose de faire sentir dans ce Mémoire. Je donnerai pour un nombre  $n$  d'équations du premier degré, une formule d'élimination qui est une espèce de fonction de  $n$ , & dont la forme est très-concise & très-commode; & je ferai voir que les formules connues d'élimination entre deux équations de degrés élevés, paroissent propres à recevoir une forme systématique, & à devenir une espèce de fonction de leur degré commun. J'ai été bientôt arrêté dans cette recherche, & il sera facile d'en sentir la raison. Parmi les ressources qui nous manquent pour faire des progrès en ce genre, la plus indispensable seroit, sans doute, de réunir un nombre suffisant de coopérateurs.

---

\* Ce Mémoire a été lu pour la première fois à l'Académie le 12 Janvier 1771. Il contenoit différentes choses que j'ai supprimées ici, parce qu'elles ont été publiées depuis par d'autres Géomètres.

ARTICLE I.<sup>er</sup>*Des Équations du premier degré.*

Je suppose que l'on représente par  $\overset{1}{i}$ ,  $\overset{2}{i}$ ,  $\overset{3}{i}$ , &c.  $\overset{1}{2}$ ,  $\overset{2}{2}$ ,  $\overset{3}{2}$ , &c.  $\overset{1}{3}$ ,  $\overset{2}{3}$ ,  $\overset{3}{3}$ , &c. &c. autant de différentes quantités générales, dont l'une quelconque soit  $\overset{a}{a}$ , une autre quelconque soit  $\overset{\beta}{b}$ , &c. & que le produit des deux soit désigné à l'ordinaire par  $\overset{a}{a} \cdot \overset{\beta}{b}$ .

Des deux nombres ordinaux  $a$  &  $a$ , le premier, par exemple, désignera de quelle équation est pris le coefficient  $\overset{a}{a}$ , & le second désignera le rang que tient ce coefficient dans l'équation, comme on le verra ci-après.

Je suppose encore le système suivant d'abréviations, & que l'on fasse

$$\frac{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}}{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}} = \frac{\overset{a}{a}\overset{\beta}{b}}{a \cdot b} - \frac{\overset{a}{a}\overset{\beta}{b}}{b \cdot a}$$

$$\frac{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}}{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}} = \frac{\overset{a}{a}}{a} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}}{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}} + \frac{\overset{a}{a}}{b} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}}{\overset{\gamma}{c}|\overset{a}{a}} + \frac{\overset{a}{a}}{c} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}}{\overset{a}{a}|\overset{b}{b}}$$

$$\frac{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}}{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}} = \frac{\overset{a}{a}}{a} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}}{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}} - \frac{\overset{a}{a}}{b} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}}{\overset{\gamma}{c}|\overset{a}{a}|\overset{\delta}{d}} + \frac{\overset{a}{a}}{c} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}}{\overset{a}{a}|\overset{b}{b}|\overset{\delta}{d}} - \frac{\overset{a}{a}}{d} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}}{\overset{a}{a}|\overset{b}{b}|\overset{\gamma}{c}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}}{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}} &= \frac{\overset{a}{a}}{a} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}}{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}} + \frac{\overset{a}{a}}{b} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}}{\overset{\gamma}{c}|\overset{a}{a}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}} + \frac{\overset{a}{a}}{c} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}}{\overset{a}{a}|\overset{b}{b}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}} \\ &\quad + \frac{\overset{a}{a}}{d} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}}{\overset{a}{a}|\overset{b}{b}|\overset{\epsilon}{e}|\overset{c}{c}} + \frac{\overset{a}{a}}{e} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}}{\overset{a}{a}|\overset{b}{b}|\overset{c}{c}|\overset{d}{d}} \end{aligned}$$

$$\frac{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}|\overset{\zeta}{f}}{\overset{a}{a}|\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}|\overset{\zeta}{f}} = \frac{\overset{a}{a}}{a} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}|\overset{\zeta}{f}}{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}|\overset{\zeta}{f}} - \frac{\overset{a}{a}}{b} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}|\overset{\zeta}{f}}{\overset{\gamma}{c}|\overset{a}{a}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}|\overset{\zeta}{f}} + \frac{\overset{a}{a}}{c} \cdot \frac{\overset{\beta}{b}|\overset{\gamma}{c}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}|\overset{\zeta}{f}}{\overset{a}{a}|\overset{b}{b}|\overset{\delta}{d}|\overset{\epsilon}{e}|\overset{\zeta}{f}} + \dots$$

Le symbole  $\frac{a}{b} \frac{c}{d} \frac{e}{f} \dots$  sert ici de caractéristique.

Les seules choses à observer sont l'ordre des signes, & la loi des permutations entre les lettres  $a, b, c, d$ , &c. qui me paroissent suffisamment indiqués ci-dessus.

Au lieu de transposer les lettres  $a, b, c, d$ , &c. on pouvoit les laisser dans l'ordre alphabétique, & transposer au contraire les lettres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , &c. les résultats auroient été parfaitement les mêmes; ce qui a lieu aussi par rapport aux conclusions suivantes.

Premièrement, il est clair que  $\frac{a}{b}$  représente deux termes différens, l'un positif, & l'autre négatif, résultans d'autant de permutations possibles de  $a$  &  $b$ ; que  $\frac{a}{b} \frac{c}{d} \frac{e}{f}$  en représente six, trois positifs & trois négatifs, résultans d'autant de permutations possibles de  $a, b$  &  $c$ ; que  $\frac{a}{b} \frac{c}{d} \frac{e}{f} \frac{g}{h}$  en représente vingt-quatre, douze positifs & douze négatifs, résultans d'autant de permutations possibles entre  $a, b, c$  &  $d$ ; & ainsi de suite.

Mais de plus, la formation de ces quantités est telle que l'unique changement qui puisse résulter d'une permutation, quelle qu'elle soit, faite entre les lettres du même alphabet, dans l'une de ces abréviations, sera un changement dans le signe de sa première valeur.

La démonstration de cette vérité & la recherche du signe résultant d'une permutation déterminée, dépendent généralement de deux propositions qui peuvent être énoncées ainsi qu'il suit, en se servant de nombres pour indiquer le rang des lettres.

La première est que

$$\frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{3}{3} \dots \frac{m}{m} \frac{m+1}{m+1} \dots \frac{n}{n} = \frac{1}{m} \frac{2}{m+1} \frac{3}{m+2} \dots \frac{n-m+1}{n} \frac{n-m+2}{1} \frac{n-m+3}{2} \dots \frac{n}{m-1}$$

le signe — n'ayant lieu que dans le cas où  $n$  &  $m$  sont l'un & l'autre des nombres pairs.

La seconde est que

$$\frac{1}{1} \left| \frac{2}{2} \right| \frac{3}{3} \left| \dots \right| \frac{m}{m} \left| \frac{m+1}{m+1} \right| \dots \left| \frac{n}{n} \right| = - \frac{1}{1} \left| \frac{2}{2} \right| \frac{3}{3} \left| \dots \right| \frac{m-1}{m-1} \left| \frac{m}{m} \right| \frac{m+1}{m+1} \left| \frac{m+2}{m+2} \right| \dots \left| \frac{n}{n} \right|.$$

Il sera facile de voir que, la première équation supposée, celle-ci n'a besoin d'être prouvée que pour un seul cas, comme, par exemple, celui de  $m = n - 1$ , c'est-à-dire, celui où les deux lettres transposées sont les deux dernières.

Au lieu de démontrer généralement ces deux équations, ce qui exigeroit un calcul embarrassant plutôt que difficile, je me contenterai de développer les exemples les plus simples; cela suffira pour saisir l'esprit de la démonstration.

Selon l'une & l'autre équation, on a

$$\frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| = - \frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{a} \right|$$

mais selon l'ordre de formation prescrit ci-dessus,  $\frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{a} \right|$

$$= \frac{a}{b.a} - \frac{a}{a.b} \text{ qui égale en effet } - \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right|.$$

Selon la première équation, on a

$$\frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c} = \frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{a} = \frac{a}{c} \left| \frac{\beta}{a} \right| \frac{\gamma}{b};$$

mais selon l'ordre de formation,

$$\frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{a} = \frac{a}{b.c} \left| \frac{\beta}{a} \right| \frac{\gamma}{c} + \frac{a}{c} \left| \frac{\beta}{a} \right| \frac{\gamma}{b} + \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c},$$

&

$$\frac{a}{c} \left| \frac{\beta}{a} \right| \frac{\gamma}{b} = \frac{a}{c.a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c} + \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c} + \frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{a},$$

qui ne diffèrent du développement ci-dessus de  $\frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c}$ , que par une simple transposition entre les termes.

Selon la seconde, on a

$$\frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c} = - \frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{a} \right| \frac{\gamma}{c} = - \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{b};$$

mais on a déjà selon la première  $\frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{a} \right| \frac{\gamma}{c} = \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{b}$ ;

donc il suffit de prouver que selon l'ordre de formation

$$\frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c} = - \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{b} : \text{or on a}$$

$$\frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{b} = \frac{a}{a} \cdot \frac{\beta}{c} \left| \frac{\gamma}{b} \right| + \frac{a}{c} \cdot \frac{\beta}{b} \left| \frac{\gamma}{a} \right| + \frac{a}{b} \cdot \frac{\beta}{a} \left| \frac{\gamma}{c} \right|$$

(qui en supposant  $\frac{1}{1} \left| \frac{2}{2} \right| = - \frac{1}{2} \left| \frac{2}{1} \right|$ , comme cela a été prouvé ci-dessus) est,

$$= - \frac{a}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \left| \frac{\gamma}{c} \right| - \frac{a}{c} \cdot \frac{\beta}{a} \left| \frac{\gamma}{b} \right| - \frac{a}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \left| \frac{\gamma}{a} \right| = - \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c}.$$

Quant à  $\frac{a}{c} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{a}$ , il égale par conséquent  $- \frac{a}{c} \left| \frac{\beta}{a} \right| \frac{\gamma}{b}$ ,

ou  $- \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c}$ .

On a de même selon notre première équation,

$$\frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c} \left| \frac{\delta}{d} \right| = - \frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{d} \left| \frac{\delta}{a} \right| = \frac{a}{c} \left| \frac{\beta}{d} \right| \frac{\gamma}{a} \left| \frac{\delta}{b} \right| = - \frac{a}{d} \left| \frac{\beta}{a} \right| \frac{\gamma}{b} \left| \frac{\delta}{c} \right|.$$

Et en effet, selon l'ordre de formation, on a, par exemple,

$$\frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{d} \left| \frac{\delta}{a} \right| = \frac{a}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \left| \frac{\gamma}{d} \right| \left| \frac{\delta}{a} \right| - \frac{a}{c} \cdot \frac{\beta}{d} \left| \frac{\gamma}{a} \right| \left| \frac{\delta}{b} \right| + \frac{a}{d} \cdot \frac{\beta}{a} \left| \frac{\gamma}{b} \right| \left| \frac{\delta}{c} \right| - \frac{a}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \left| \frac{\gamma}{c} \right| \left| \frac{\delta}{d} \right|$$

qui ne diffère du développement ci-dessus de  $\frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c} \left| \frac{\delta}{d} \right|$

que par une simple transposition entre les termes & le signe du tout.

Selon la seconde équation, on a

$$\frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{c} \left| \frac{\delta}{d} \right| = - \frac{a}{b} \left| \frac{\beta}{a} \right| \frac{\gamma}{c} \left| \frac{\delta}{d} \right| = - \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{c} \right| \frac{\gamma}{b} \left| \frac{\delta}{d} \right| = - \frac{a}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \frac{\gamma}{d} \left| \frac{\delta}{c} \right|.$$

&c

& il s'agit de prouver seulement que  $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} =$

$$-\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|d|c}, \text{ ou que } \frac{1|2|3|4}{1|2|3|4} = -\frac{1|2|3|4}{1|2|4|3};$$

car selon notre première équation

$$\begin{aligned} \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{b|a|c|d} &= \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{c|d|b|a} = -\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{c|d|a|b} = -\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} \\ \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|c|b|d} &= -\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{d|a|c|b} = \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{d|a|b|c} = -\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}, \end{aligned}$$

or

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|d|c} = \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|d|c} - \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{b|d|c|a} + \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{d|c|a|b} - \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{c|a|b|d}.$$

Je considère dans ce développement, d'abord les deux derniers termes, & ensuite les premiers.

Comme selon notre première équation  $\frac{\beta|\gamma|\delta}{c|a|b} = \frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|c}$ ,

&  $\frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|d} = \frac{\beta|\gamma|\delta}{d|a|b}$ , il est clair que les deux derniers

termes comparés à ceux du développement de  $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$ ,

sont les mêmes, mais de signe contraire; quant aux premiers,

pour qu'ils soient aussi les mêmes, mais de signe contraire,

il faut que  $\frac{\beta|\gamma|\delta}{b|d|c} = -\frac{\beta|\gamma|\delta}{b|c|d}$  &  $\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|c|a} = -\frac{\beta|\gamma|\delta}{c|d|a}$ ;

or,  $\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|c|a} = \frac{\beta|\gamma|\delta}{c|a|d}$ , il suffit donc (notre première

équation supposée) que l'on ait  $\frac{1|2|3}{1|2|3} = -\frac{1|2|3}{1|3|2}$  pour

avoir  $\frac{1|2|3|4}{1|2|3|4} = -\frac{1|2|3|4}{1|2|4|3}$ ; or, c'est ce qui a lieu en

effet. On tirera de-là ce qui résulte de toutes les autres permutations de a, b, c & d; & si l'on procède semblablement pour le cas de cinq lettres du même alphabet, &c. On verra

qu'en général la démonstration de notre seconde équation pour le cas de  $n = a$ , dépend de cette même équation pour le cas de  $n = a - 1$ , quel que soit  $a$ ; d'où il suit

que puisque  $\frac{1|2}{1|2} = -\frac{1|2}{2|1}$ , elle est généralement vraie.

Cela suppose la vérité de la première qui est manifeste d'après l'ordre de formation.

Ceux qui ont connoissance des symboles abrégés que j'ai nommés *types partiels de combinaison*, dans mon *Mémoire sur la résolution des équations* \*, reconnoîtront ici la formation du *type partiel* dépendant du second degré, pour un nombre quelconque de lettres; ils verront sans peine qu'en prenant ici nos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , &c. par exemple, pour des exposans, tous les termes de même signe, dans le développement de l'une de nos abréviations, seront aussi le développement du *type partiel* dépendant du second degré, & formé d'un pareil nombre de lettres; ce que démontrent nos opérations précédentes.

De ce que nous avons dit jusqu'ici, il suit que

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\dots\dots}{a|b|c|d|\dots\dots} = 0,$$

*si deux lettres quelconques du même alphabet sont égales entr'elles*; car quelque part que soient les deux lettres égales, on peut les transposer aux deux dernières places de leur rang, ce qui ne fera au plus que changer le signe de la valeur; alors, de leur permutation particulière, il ne peut, d'une part, résulter aucun changement, puisqu'elles sont égales; d'autre part, selon notre seconde équation ci-dessus, il doit en résulter un changement de signe; cette contradiction ne peut être levée

qu'en supposant la valeur zéro. En effet,  $\frac{\alpha}{a} \Big| \frac{\alpha}{b} = 0$ ,

---

\* Voyez les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1771, page 365.



$$\frac{\alpha}{a} \frac{\beta}{b} \frac{\beta}{c} = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \frac{\beta}{c} + \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \frac{\beta}{a} + \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{\beta}{a} \frac{\beta}{b} = 0, \text{ \&c.}$$

Tout cela posé; puisque l'on a identiquement,

$$\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{2}{1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \frac{2}{2} = 0,$$

$$\frac{2}{1} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{2}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \frac{2}{2} = 0,$$

Si l'on propose de trouver les valeurs de  $\xi_1$  & de  $\xi_2$  qui satisfont aux deux équations

$$\frac{1}{1} \cdot \xi_1 + \frac{1}{2} \cdot \xi_2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{2}{1} \cdot \xi_1 + \frac{2}{2} \cdot \xi_2 + \frac{2}{3} = 0,$$

on pourra comparer, & l'on aura

$$\xi_1 = \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{3}}{\frac{1}{1} \frac{2}{2}}, \quad \xi_2 = \frac{\frac{1}{3} \frac{2}{1}}{\frac{1}{1} \frac{2}{2}}$$

De même, puisque l'on a identiquement,

$$\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{2}{1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \frac{2}{2} = 0,$$

$$\frac{2}{1} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} - \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{2}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{2}{1} - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{1} \frac{2}{2} = 0,$$

$$\frac{3}{1} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{2}{4} + \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{2}{1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} \frac{2}{2} = 0;$$

Si l'on propose de trouver les valeurs de  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  &  $\xi_3$ , qui satisfont aux trois équations

$$1.\overset{1}{\xi}1 + 2.\overset{2}{\xi}2 + 3.\overset{3}{\xi}3 + 4 = 0,$$

$$1.\overset{2}{\xi}1 + 2.\overset{3}{\xi}2 + 3.\overset{4}{\xi}3 + 4 = 0,$$

$$1.\overset{3}{\xi}1 + 2.\overset{4}{\xi}2 + 3.\overset{5}{\xi}3 + 4 = 0;$$

on pourra comparer, & l'on aura

$$\xi_1 = \frac{\frac{1|2|3}{2|3|4}}{\frac{1|2|3}{1|2|3}}, \quad \xi_2 = \frac{\frac{1|2|3}{3|4|1}}{\frac{1|2|3}{1|2|3}}, \quad \xi_3 = \frac{\frac{1|2|3}{4|1|2}}{\frac{1|2|3}{1|2|3}}.$$

&c.

Il est clair que ces valeurs n'ont point de facteurs inutiles; mais pour les rendre aussi commodes qu'il est possible dans les applications, & particulièrement dans celles où l'on veut faire usage des logarithmes, il sera bon d'y employer le plus qu'il se pourra, la multiplication des facteurs complexes. J'observe donc 1.<sup>o</sup> que si l'on substitue dans le développement de  $\frac{a}{a}|\frac{\beta}{b}|\frac{\gamma}{c}|\frac{\delta}{d}$ , les valeurs des  $\frac{a}{a}|\frac{\beta}{b}|\frac{\gamma}{c}$  en  $\frac{a}{a}|\frac{\beta}{b}$ , on aura, en réduisant & ordonnant, d'après les observations ci-dessus,

$$\frac{a}{a}|\frac{\beta}{b}|\frac{\gamma}{c}|\frac{\delta}{d} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{a}|\frac{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{c}|\frac{\delta}{d} - \frac{a}{a}|\frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{b}|\frac{\delta}{d} + \frac{a}{a}|\frac{\beta}{d} \cdot \frac{\gamma}{b}|\frac{\delta}{c} \\ + \frac{a}{b}|\frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{a}|\frac{\delta}{d} - \frac{a}{b}|\frac{\beta}{d} \cdot \frac{\gamma}{a}|\frac{\delta}{c} \\ + \frac{a}{c}|\frac{\beta}{d} \cdot \frac{\gamma}{a}|\frac{\delta}{b} \end{array} \right.$$

si de même on substitue dans le développement de  $\frac{a}{a}|\frac{\beta}{b}|\frac{\gamma}{c}|\frac{\delta}{d}|\frac{\epsilon}{e}$ , les valeurs des  $\frac{a}{a}|\frac{\beta}{b}|\frac{\gamma}{c}|\frac{\delta}{d}|\frac{\epsilon}{e}$  en  $\frac{a}{a}|\frac{\beta}{b}|\frac{\gamma}{c}|\frac{\delta}{d}$ , on aura, en réduisant & ordonnant, d'après les observations ci-dessus,

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|b|c|d|e|f} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha|\beta}{a|b} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{c|d|e|f} - \frac{\alpha|\beta}{a|c} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{b|d|e|f} + \frac{\alpha|\beta}{a|d} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{b|c|e|f} \\ + \frac{\alpha|\beta}{b|c} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|d|e|f} - \frac{\alpha|\beta}{b|d} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|c|e|f} + \frac{\alpha|\beta}{b|e} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|c|d|f} \\ + \frac{\alpha|\beta}{c|d} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|b|e|f} - \frac{\alpha|\beta}{c|e} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|b|d|f} + \frac{\alpha|\beta}{c|f} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|b|d|e} \\ + \frac{\alpha|\beta}{d|e} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|b|c|f} - \frac{\alpha|\beta}{d|f} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|b|c|e} \\ + \frac{\alpha|\beta}{e|f} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|b|c|d} \\ - \frac{\alpha|\beta}{a|e} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{b|c|d|f} + \frac{\alpha|\beta}{a|f} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{b|c|d|e} \\ - \frac{\alpha|\beta}{b|f} \cdot \frac{\gamma|\delta|\epsilon|\zeta}{a|c|d|e} \end{array} \right.$$

La loi des permutations & des signes est assez manifeste dans ces exemples, pour qu'on en puisse conclure des développemens pareils pour les cas de huit & dix lettres, &c. du même alphabet: alors, en employant les premiers développemens pour les cas d'un nombre impair de ces lettres, on aura les formules d'élimination du premier degré, sous la forme la plus concise qu'il soit possible.

Si l'on veut exprimer ces formules, généralement pour un nombre  $n$  d'équations,

$$1. \xi_1 + 2. \xi_2 + 3. \xi_3 + \dots + m. \xi_m + \dots + n. \xi_n + (n+1) = 0,$$

$$2. \xi_1 + 2. \xi_2 + 3. \xi_3 + \dots + m. \xi_m + \dots + n. \xi_n + (n+1) = 0,$$

&c.

La valeur de l'inconnue quelconque  $\xi_m$ , sera renfermée dans l'équation suivante, à une seule inconnue.

$$\frac{1}{2} \left| \frac{2}{2} \right| \frac{3}{3} \left| \dots \right| \frac{n}{n} \cdot \xi_m \pm \frac{1}{m+1} \left| \frac{2}{m+2} \right| \frac{3}{m+3} \left| \dots \right| \frac{n-m}{n} \left| \frac{n-m+1}{n+1} \right| \frac{n-m+2}{2} \left| \frac{n-m+3}{2} \right| \dots \left| \frac{n}{n-1} \right| = 0,$$

le signe  $+$  ayant lieu seulement dans le cas où  $m$  &  $n$  sont impairs l'un & l'autre.

## ARTICLE II.

*De l'Élimination entre deux Équations de degrés élevés.*

Si l'on a deux équations du degré  $m$ , & représentées ;  
l'une par  $1 \cdot x^m + 2 \cdot x^{m-1} + 3 \cdot x^{m-2} + \&c. = 0$  ;  
l'autre par  $1 \cdot x^m + 2 \cdot x^{m-1} + 3 \cdot x^{m-2} + \&c. = 0$  ;  
& qu'afin de simplifier davantage, on écrive,

$$\overline{a|b} \text{ pour } \frac{1}{a} \bigg| \frac{2}{b}, \text{ ou pour } \overline{a \cdot b} - \overline{b \cdot a}.$$

On aura, si les équations sont du second degré, ou si  $m = 2$  ;  
l'équation

$$-\frac{\overline{1|3} \cdot \overline{1|3}}{\overline{1|2} \cdot \overline{2|3}} = 0.$$

Si  $m = 3$ , on aura

$$\overline{1|4} \cdot \left\{ -2 \cdot \frac{\overline{1|4} \cdot \overline{1|4}}{\overline{1|2} \cdot \overline{3|4}} \right\} - \overline{1|3} \cdot \left\{ -\frac{\overline{1|4} \cdot \overline{2|4}}{\overline{1|3} \cdot \overline{3|4}} \right\} + \overline{1|2} \cdot \left\{ -\frac{\overline{2|4} \cdot \overline{2|4}}{\overline{2|3} \cdot \overline{3|4}} \right\} = 0.$$

Si  $m = 4$ , on aura,

$$\begin{aligned} & \overline{1|5} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \overline{2|5} \left\{ -3 \cdot \frac{\overline{1|5} \cdot \overline{1|5}}{\overline{1|2} \cdot \overline{4|5}} \right\} \\ - \overline{1|3} \left\{ -\frac{2 \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{3|5}}{\overline{1|4} \cdot \overline{4|5}} \right\} \\ + 3 \cdot \overline{1|2} \left\{ -\frac{\overline{2|5} \cdot \overline{3|5}}{\overline{2|4} \cdot \overline{4|5}} \right\} \end{array} \right\} - \overline{1|4} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \overline{2|5} \left\{ -2 \cdot \frac{\overline{1|5} \cdot \overline{1|5}}{\overline{1|2} \cdot \overline{4|5}} \right\} \\ - \overline{1|4} \left\{ -\frac{\overline{1|5} \cdot \overline{3|5}}{\overline{1|4} \cdot \overline{4|5}} \right\} \\ + 2 \cdot \overline{1|2} \left\{ -\frac{\overline{3|5} \cdot \overline{3|5}}{\overline{3|4} \cdot \overline{4|5}} \right\} \end{array} \right\} \\ & + \overline{1|3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \overline{2|5} \left\{ -2 \cdot \frac{\overline{1|5} \cdot \overline{2|5}}{\overline{1|3} \cdot \overline{4|5}} \right\} \\ - \overline{2|4} \left\{ -\frac{\overline{1|5} \cdot \overline{3|5}}{\overline{1|4} \cdot \overline{4|5}} \right\} \\ + \overline{1|3} \left\{ -\frac{\overline{3|5} \cdot \overline{3|5}}{\overline{3|4} \cdot \overline{4|5}} \right\} \end{array} \right\} - \overline{1|2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \overline{2|5} \left\{ -2 \cdot \frac{\overline{2|5} \cdot \overline{2|5}}{\overline{2|3} \cdot \overline{4|5}} \right\} \\ - \overline{2|4} \left\{ -\frac{\overline{2|5} \cdot \overline{3|5}}{\overline{2|4} \cdot \overline{4|5}} \right\} \\ + \overline{2|3} \left\{ -\frac{\overline{3|5} \cdot \overline{3|5}}{\overline{3|4} \cdot \overline{4|5}} \right\} \end{array} \right\} \Bigg\} = 0. \end{aligned}$$

On observera que les nombres hors du signe  $\top$ , & qu'on a distingués ici & dans la suite par un plus gros caractère, sont des nombres nombrans, ou des coefficients numériques & déterminés. Il faudroit en trouver la loi avant de parvenir à une formule générale d'élimination qui fut fonction du degré  $m$ .

J'avois trouvé sans peine les formes précédentes, & dans le dessein de découvrir une loi, j'entrepris de chercher une forme semblable pour le cas de  $m = 5$ . Les difficultés que j'ai rencontrées, & qui m'ont fait abandonner cette recherche, pourront être vaincues; c'est pourquoi je vais en donner une idée, & indiquer les procédés que j'ai suivis.

Je suppose nos formules toutes calculées & mises en facteurs de la forme  $a\top b$ , telles que les donnent plusieurs méthodes connues; & qu'il n'est plus question que de les réduire au moindre nombre de termes, comme le sont celles que nous venons de voir, ce qui est nécessaire pour les mettre sous la forme systématique en question.

J'observe d'abord qu'il ne peut y avoir de réduction qu'entre des termes composés des mêmes coefficients; c'est-à-dire ici, entre des termes où il n'entre que les mêmes nombres ordinaux, répétés le même nombre de fois, tels que ceux-ci.

$$\begin{array}{r} \text{---} \\ \text{---} \quad 2 \cdot \frac{1\overline{2} \cdot 1\overline{4} \cdot 3\overline{4}}{1\overline{3} \cdot 1\overline{4} \cdot 2\overline{4}} \\ \text{---} \quad \frac{1\overline{4} \cdot 1\overline{4} \cdot 2\overline{3}}{1\overline{4} \cdot 1\overline{4} \cdot 2\overline{3}} \end{array}$$

où 1 se trouve deux fois, 2 une fois, 3 une fois, & 4 deux fois.

Si donc on se propose une réduction à faire, il faut rassembler les termes entre lesquels elle peut avoir lieu, & ne considérer que ceux-là.

Le fondement de toutes les réductions possibles entre des termes de cette espèce se trouve, comme on le verra bientôt, dans une suite d'équations données par M. Fontaine, au commencement de sa seconde méthode de calcul intégral, dans le Recueil de ses Mémoires. Elles se réduisent à cette

528 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
proposition identique, facile à vérifier généralement,

$$\overline{a|b \cdot c|d} - \overline{a|c \cdot b|d} + \overline{a|d \cdot b|c} = 0.$$

Les trois termes ci-dessus, par exemple, sont visiblement réductibles; car on a,

$$\overline{1|2 \cdot 3|4} - \overline{1|3 \cdot 2|4} + \overline{1|4 \cdot 2|3} = 0,$$

qui étant multiplié par  $-\overline{1|4}$ , & ajouté aux trois termes; donne,

$$\begin{aligned} & -2 \cdot \overline{1|2 \cdot 1|4 \cdot 3|4} \\ & - \overline{1|3 \cdot 1|4 \cdot 2|4}, \end{aligned}$$

pour résultat.

Mais il est évident qu'il y a ici un choix arbitraire des termes à faire évanouir, & qu'on peut s'égarer de deux manières, lorsqu'il y a beaucoup de termes; l'une, en s'éloignant de la route qui mène à en faire évanouir le plus qu'il est possible; l'autre, en amenant un résultat qui, quoique du moindre nombre de termes, ne soit cependant pas propre à la forme systématique.

Quelques essais me firent soupçonner d'abord que j'évitais ces deux inconvénients en faisant usage du procédé suivant.

$$\text{J'ai supposé } \overline{a \cdot a} - \overline{a \cdot a} = \overline{a|a}.$$

Je suppose de nouveau

$$\overline{a \cdot b \cdot a \cdot \beta} + \overline{a \cdot \beta \cdot a \cdot b} = \overline{ab|a\beta},$$

$$\overline{a \cdot b \cdot c \cdot a \cdot \beta \cdot \gamma} - \overline{a \cdot \beta \cdot \gamma \cdot a \cdot b \cdot c} = \overline{abc|a\beta\gamma},$$

$$\overline{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot a \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta} + \overline{a \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d} = \overline{abcd|a\beta\gamma\delta};$$

&c.

d'où il suit que  $\overline{a|a} = -\overline{a|a}$ ,  $\overline{a\beta|ab} = \overline{ab|a\beta}$ ,  $\overline{a\beta\gamma|abc} = -\overline{abc|a\beta\gamma}$ , &c. & que les permutations entre les lettres qui sont d'un même côté du signe  $\overline{\quad}$ , sont indifférentes relativement à la valeur de l'abréviation.

Cela posé, l'on a

$$\overline{a|a \cdot b|\beta} = \overline{ab|a\beta} - \overline{a\beta|ab}$$

$$\overline{a|a \cdot b|\beta \cdot c|\gamma} = \overline{abc|a\beta\gamma} - \overline{a\beta\gamma|abc} - \overline{a\beta c|a\beta\gamma} + \overline{a\beta\gamma|abc},$$

&c.

ce

ce qui revient à avoir le résultat des multiplications indiquées, quoique l'on n'en écrive que la moitié des termes.

Étant donc proposée une suite de termes composés de facteurs de la forme  $\overline{a|a}$ , on peut développer tous les produits & opérer comme dans l'exemple suivant. On aura, toute réduction faite dans le second membre,

$$\left. \begin{array}{l} - \\ - 2 \\ + \end{array} \frac{\overline{1|2 \cdot 1|4 \cdot 3|4}}{\overline{1|3 \cdot 1|4 \cdot 2|4}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \\ - 2 \\ + \\ + \\ - \end{array} \frac{\overline{112|344}}{\overline{113|244}} \right.$$

Si l'on compare le terme  $\frac{\overline{112|344}}{\overline{112|344}}$  avec celui  $\frac{\overline{abc|\alpha\beta\gamma}}{\overline{abc|\alpha\beta\gamma}}$ , pris dans l'une des formules ci-dessus, on aura

$$\frac{\overline{1|3 \cdot 1|4 \cdot 2|4}}{\overline{1|3 \cdot 1|4 \cdot 2|4}} = \frac{\overline{112|344}}{\overline{112|344}} - \frac{\overline{114|234}}{\overline{114|234}} - \frac{\overline{124|134}}{\overline{124|134}} - \frac{\overline{123|144}}{\overline{123|144}},$$

& substituant, l'on a

$$\left. \begin{array}{l} - \\ - 2 \\ + \end{array} \frac{\overline{1|2 \cdot 1|4 \cdot 3|4}}{\overline{1|3 \cdot 1|4 \cdot 2|4}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \\ - 2 \\ + \\ + \\ - \end{array} \frac{\overline{1|3 \cdot 1|4 \cdot 2|4}}{\overline{113|244}} \right.$$

comparant de nouveau  $\frac{\overline{113|244}}{\overline{113|244}}$  avec  $\frac{\overline{abc|\alpha\beta\gamma}}{\overline{abc|\alpha\beta\gamma}}$ , & substituant, on aura, comme ci-dessus,

$$\left. \begin{array}{l} - \\ - 2 \\ - \end{array} \frac{\overline{1|2 \cdot 1|4 \cdot 3|4}}{\overline{1|3 \cdot 1|4 \cdot 2|4}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \\ - 2 \end{array} \frac{\overline{1|3 \cdot 1|4 \cdot 2|4}}{\overline{112 \cdot 1|4 \cdot 3|4}} \right.$$

Maintenant, ce qu'avoit de particulier le procédé dont je viens de parler, consistoit à choisir toujours entre les termes de la forme  $\frac{\overline{abc...|\alpha\beta\gamma...}}{\overline{abc...|\alpha\beta\gamma...}}$ , restans dans le second membre, celui où les nombres de l'un des côtés du signe étoient les plus petits, pour le comparer à  $\frac{\overline{abc...|\alpha\beta\gamma...}}{\overline{abc...|\alpha\beta\gamma...}}$ .

Le succès de ce procédé empirique n'a commencé à se

démentir que dans un petit nombre de réductions de la formule pour le cinquième degré; & il se peut que celles-ci tiennent à quelqu'autre observation de cette espèce, qui ne s'est pas présentée à moi.

La méthode directe que je vais exposer lèveroit toute difficulté, si elle étoit praticable; mais je n'ai pas vu de moyens de la rendre telle. L'exemple suivant suffira pour la faire entendre.

Je suppose que l'on ait à réduire la quantité

$$\begin{aligned} & \text{--- } 4 \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{3|5} \cdot \overline{4|5} \\ & \text{--- } 3 \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{3|4} \cdot \overline{3|5} \\ & \text{--- } 3 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|3} \cdot \overline{4|5} \\ & \text{--- } \overline{1|5} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|3} \cdot \overline{3|4} \end{aligned}$$

& soit cette quantité désignée par  $M$ ; on a les cinq équations identiques,

$$\begin{aligned} \overline{1|2} \cdot \overline{3|4} & \text{--- } \overline{1|3} \cdot \overline{2|4} + \overline{1|4} \cdot \overline{2|3} = 0, \\ \overline{1|2} \cdot \overline{3|5} & \text{--- } \overline{1|3} \cdot \overline{2|5} + \overline{1|5} \cdot \overline{2|3} = 0, \\ \overline{1|2} \cdot \overline{4|5} & \text{--- } \overline{1|4} \cdot \overline{2|5} + \overline{1|5} \cdot \overline{2|4} = 0, \\ \overline{1|3} \cdot \overline{4|5} & \text{--- } \overline{1|4} \cdot \overline{3|5} + \overline{1|5} \cdot \overline{3|4} = 0, \\ \overline{2|3} \cdot \overline{4|5} & \text{--- } \overline{2|4} \cdot \overline{3|5} + \overline{2|5} \cdot \overline{3|4} = 0, \end{aligned}$$

Il faut multiplier chacune de ces cinq équations par le facteur le plus général qui puisse donner pour produit une expression où les nombres ordinaux soient les mêmes que dans  $M$ , & répétés le même nombre de fois. Multipliant donc

la première par...  $\alpha \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{3|5}$ ,

la seconde par...  $\beta 1 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{4|5} + \beta 2 \cdot \overline{1|4} \cdot \overline{3|5} + \beta 3 \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{3|4}$ ;

la troisième par...  $\gamma \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{3|5}$ ,

la quatrième par...  $\delta 1 \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{3|5} + \delta 2 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{2|5} + \delta 3 \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|3}$ ;

& la cinquième par...  $\epsilon \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|5}$ ;



ajoutant ces produits à la quantité  $M$ , & égalant cette somme, qui est  $M$ , à l'expression

$$\begin{array}{ll}
 a\ 1 \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{3|5} \cdot \overline{4|5} & + a\ 6 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|3} \cdot \overline{4|5} \\
 + a\ 2 \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{1|4} \cdot \overline{3|5} \cdot \overline{3|5} & + a\ 7 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|4} \cdot \overline{3|5} \\
 + a\ 3 \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{3|4} \cdot \overline{3|5} & + a\ 8 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|5} \cdot \overline{3|4} \\
 + a\ 4 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{2|5} \cdot \overline{4|5} & + a\ 9 \cdot \overline{1|4} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|3} \cdot \overline{3|5} \\
 + a\ 5 \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{1|4} \cdot \overline{2|5} \cdot \overline{3|5} & + a\ 10 \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{2|3} \cdot \overline{3|4}
 \end{array}$$

qui est la plus générale que l'on puisse former avec les nombres ordinaux qui entrent dans  $M$ ; on trouve après avoir tiré les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  1,  $\beta$  2, &c. que pour que  $M$  soit égale à cette expression générale, il suffit que les quatre équations suivantes aient lieu,

$$\begin{array}{l}
 a\ 1 + a\ 2 + a\ 4 + a\ 5 + 4 = 0, \\
 a\ 1 + a\ 2 - a\ 6 - a\ 7 - a\ 9 + 1 = 0, \\
 a\ 2 + a\ 3 + a\ 5 + a\ 7 + a\ 8 + 3 = 0, \\
 a\ 2 + a\ 3 - a\ 9 - a\ 10 + 2 = 0.
 \end{array}$$

Il s'agit donc de satisfaire à ces quatre équations, en faisant zéro le plus de ces dix indéterminées qu'il se pourra, ce qui est toujours possible, en épuisant toutes les combinaisons. On trouvera que l'on peut en faire sept égales à zéro, & non pas huit. On satisfait, par exemple, en faisant  $a\ 1 = -1$ ,  $a\ 5 = -3$ ,  $a\ 10 = 2$ ; ou en faisant  $a\ 2 = -2$ ,  $a\ 4 = -2$ ,  $a\ 7 = -1$ ; &c. Il reste à faire un choix entre toutes ces manières, relativement à la forme systématique; ce qui peut se faire encore, en épuisant toutes les combinaisons: mais on sent combien cette exhaustion entraîneroit de longueurs. Elle devient tout-à-fait impraticable pour le cinquième degré. Pour réduire, par exemple, la quantité

$$\begin{array}{l}
 \text{—} \quad \overline{1|5 \cdot 1|3 \cdot 2|6 \cdot 2|5 \cdot 4|6} \\
 \text{—} \quad 3 \cdot \overline{1|4 \cdot 1|3 \cdot 2|6 \cdot 2|5 \cdot 5|6} \\
 \text{—} \quad 3 \cdot \overline{1|5 \cdot 1|2 \cdot 2|5 \cdot 3|6 \cdot 4|6} \\
 \text{—} \quad 8 \cdot \overline{1|5 \cdot 1|2 \cdot 2|6 \cdot 3|4 \cdot 5|6} \\
 \text{+} \quad \overline{1|6 \cdot 1|2 \cdot 2|3 \cdot 4|5 \cdot 5|6} \\
 \text{+} \quad \overline{1|2 \cdot 1|2 \cdot 3|4 \cdot 5|6 \cdot 5|6}
 \end{array}$$

que l'on trouvera à son rang ci-après, il faut satisfaire à neuf équations entre quarante-six indéterminées, ce qu'on ne peut pas se proposer de faire par cette méthode.

La formule pour le cinquième degré, ou pour le cas de  $m = 5$ , dans nos équations en  $x$ , devra être réduite à cent vingt termes, avant de pouvoir être mise sous une forme systématique analogue à celles ci-dessus. On la trouvera dans la Table ci-jointe, réduite à cent vingt-quatre: mes essais n'ont pas été plus loin.

*Nota.* M. l'Abbé de Gua, Membre de l'Académie, a calculé de son côté, dans des vues & par des méthodes qui lui sont particulières, les formules d'élimination entre deux équations du second, du troisième, du quatrième & du cinquième degré. Il a cherché aussi à les réduire au moindre nombre de termes, & y est parvenu pour le quatrième degré & les degrés inférieurs. Dans un manuscrit de sa formule pour le cinquième, qu'il a bien voulu me communiquer, elle étoit réduite à cent vingt-cinq termes, mais il croit l'avoir ramenée dans le temps à cent vingt-quatre, ainsi que moi; ce qui peut être remarquable, en ce que, quoique M. l'Abbé de Gua n'ait fait ce calcul particulier que plus de deux ans après la première lecture de mon Mémoire, il n'a eu cependant aucune connoissance de mes résultats, jusqu'au moment de l'impression.



—

$\rangle = 0.$

—

[illegible]

## A D D I T I O N S

*Aux recherches sur le Calcul intégral & sur le système du Monde\*.*

Par M. DE LA PLACE.

CES additions ont pour objet, 1.<sup>o</sup> l'éclaircissement d'une difficulté que présente la méthode d'approximation exposée au commencement de ces recherches; 2.<sup>o</sup> quelques nouvelles recherches sur l'équilibre des sphéroïdes homogènes.

## I.

*Sur les Approximations.*

La méthode que nous avons donnée pour cela, consiste à faire varier les constantes arbitraires dans les intégrales approchées. Reprenons le premier exemple auquel nous l'avons appliquée dans l'article 1.<sup>er</sup> des Recherches citées; (il est nécessaire d'avoir cet article sous les yeux). Nous sommes parvenus aux deux équations  $\delta p = \frac{a}{4} T \cdot q$ ;  $\delta q = \frac{a}{4} T \cdot p$ ;  $\delta p$  étant la variation de  $p$  après l'intervalle  $T$ , &  $\delta q$  celle de  $q$  après le même intervalle. Pour tirer de ces équations les valeurs de  $p$  & de  $q$ , nous avons observé qu'en nommant  $'p$  &  $'q$ , ce que deviennent  $p$  &  $q$ , après l'intervalle  $T$ , & faisant  $\frac{a}{4} \cdot T = x$ ,  $'p$  &  $'q$  étoient fonctions de  $x$ , & que l'on avoit

$$'p = p + x \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \&c.$$

$$'q = q + x \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \&c.$$

$$\text{donc } \delta p = x \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \&c. \text{ \& } \delta q = x \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \&c.$$

\* Voyez ci-dessus, pages 267. & suiv.

partant on a, en comparant les termes multipliés par  $x$ ,  
 $\frac{\partial p}{\partial x} = q$ , &  $\frac{\partial q}{\partial x} = p$ ; mais on doit remarquer que  $p$ ,  
 $q$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial x}$ , ne sont point fonctions de  $x$ , puisque ce sont  
 les valeurs de  $'p$ ,  $'q$ ,  $\frac{\partial 'p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial 'q}{\partial x}$ , lorsque  $x = 0$ ; cepen-  
 dant en intégrant, comme nous l'avons fait dans l'article  
 cité, les équations  $\frac{\partial p}{\partial x} = q$ , &  $\frac{\partial q}{\partial x} = p$ , nous avons  
 regardé ces quantités comme fonctions de  $x$ .

Pour résoudre cette difficulté, & pour répandre en même  
 temps un nouveau jour sur la méthode dont il s'agit, nous  
 allons faire voir que les équations  $\frac{\partial p}{\partial x} = q$ , &  $\frac{\partial q}{\partial x} = p$ ,  
 ont également lieu,  $x$  étant quelconque, & le raisonnement  
 que nous allons faire, pouvant s'appliquer généralement à  
 tous les exemples que nous avons intégrés, servira non-seu-  
 lement à mettre cette méthode hors de toute atteinte, mais  
 encore à présenter une idée nette du principe métaphysique  
 sur lequel elle est fondée.

Si l'on fait dans l'équation (1) de l'article cité,  $t = T + t_1$ ,  
 on parviendra à l'équation (3), & si l'on fait  $t = T + T'$   
 $+ t_1$ , on aura une expression de  $y$ , semblable à celle que  
 donne l'équation (3), en écrivant dans celle-ci  $''p$  au lieu  
 de  $'p$ ,  $''q$  au lieu de  $'q$ ,  $t_1$  au lieu de  $t$ , &  $T + T'$  au lieu  
 de  $T$ ;  $''p$  &  $''q$  étant deux nouvelles constantes arbitraires,  
 que l'on déterminera au moyen des valeurs de  $y$  & de  $\frac{\partial y}{\partial t_1}$ ,  
 lorsque  $t_1 = 0$ . Cela posé, si l'on compare cette nouvelle  
 expression de  $y$ , avec celle que donne l'équation (3), on aura  
 $''p - 'p = \frac{\alpha}{4} T' \cdot 'q$ , &  $''q - 'q = \frac{\alpha}{4} T' \cdot 'p$ ; donc  
 si l'on fait  $\frac{\alpha}{4} T' = x'$ , on aura, comme dans l'article cité,  
 $\frac{\partial 'p}{\partial x'} = 'q$ , &  $\frac{\partial 'q}{\partial x'} = 'p$ ,  $'p$  &  $'q$  étant fonctions de  $\frac{\alpha}{4} T$ ,  
 ou de  $x$ ; partant si l'on fait, comme cela est permis,  $\partial x' = \partial x$ ,

on aura  $\frac{\partial p}{\partial x} = q$ , &  $\frac{\partial q}{\partial x} = p$ , c'est-à-dire que les équations  $\frac{\partial p}{\partial x} = q$ , &  $\frac{\partial q}{\partial x} = p$ , ont lieu,  $x$  étant quelconque, & qu'ainsi on peut, en les intégrant, regarder  $p$  &  $q$  comme fonctions de  $x$ .

Un avantage particulier à la méthode précédente, & qui la rend d'un usage extrêmement simple, consiste en ce que, par les méthodes ordinaires, on peut pousser aussi loin que l'on veut les approximations, en conservant les arcs-de-cercle, & qu'il suffit ensuite, d'une seule opération, pour les faire disparaître, comme nous l'avons fait voir dans le second article des recherches citées; or, on peut encore appliquer à ce cas le raisonnement que nous venons de faire, en sorte qu'il ne doit rester aucune difficulté sur cet objet.

Ayant envoyé cette méthode à M. de la Grange, il me fit l'honneur de me répondre, qu'il en avoit pareillement imaginé une qui y a rapport; comme tout ce qui sort de la plume de ce grand Analyste, ne peut qu'intéresser les Sciences, & que d'ailleurs cette méthode n'est point connue, je pense que les Géomètres la verront ici avec plaisir; je vais donc la donner telle que M. de la Grange me l'a envoyée.

« Ayant l'équation  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y + \Omega = 0$ , où  $y$  est supposé très-petit, & où  $\Omega$  est une fonction rationnelle & entière de  $y$  & de  $\sin.t$ ,  $\cos.t$ , &c. j'observe que les deux premiers termes donnent  $y = p \cdot \sin.t + q \cdot \cos.t$ ;  $p$  &  $q$  étant des constantes. Je fais maintenant  $y = p \cdot \sin.t + q \cdot \cos.t + z$ , & je regarde  $p$  &  $q$  comme variables, j'ai la transformée

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + z + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial q}{\partial t}\right) \cdot \sin.t + \left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial p}{\partial t}\right) \cdot \cos.t + \Omega = 0.$$

Je fais  $= 0$ , les termes affectés de  $\sin.t$  & de  $\cos.t$ , & d'où résulteroient des arcs-de-cercle dans l'intégrale, j'ai deux équations qui serviront à déterminer  $p$  &  $q$ ; on peut étendre cette méthode à tant d'équations qu'on voudra, & lui donner toute l'exactitude qu'on désirera. »

Cette méthode conduit à deux équations différentielles du second ordre entre  $p$  &  $q$ , mais on verra avec un peu d'attention, que les termes  $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$  &  $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$  sont d'un ordre moindre que  $\frac{\partial p}{\partial t}$  &  $\frac{\partial q}{\partial t}$ , & qu'ainsi ils peuvent être négligés; les équations différentielles du second ordre s'abaissent par-là au premier ordre, & rentrent dans celles que donne notre méthode.

## I I.

*De l'Équilibre des Sphéroïdes homogènes.*

Les Géomètres qui se sont occupés de cet objet, ont supposé au sphéroïde une figure déterminée, & ils ont cherché si l'équilibre pouvoit subsister avec cette figure. Je me propose ici de résoudre le problème inverse, & de chercher directement la figure qui convient à l'équilibre. Je ne fais d'autres suppositions que les deux suivantes; savoir, que le sphéroïde est un solide de révolution, & qu'il diffère infiniment peu de la sphère. En partant de ces suppositions, je parviens à une équation différentielle très-simple, mais d'un degré infini, & qui embrasse généralement toutes les figures qui conviennent à l'équilibre; la figure elliptique satisfait visiblement à cette équation différentielle; mais quoique je démontre l'impossibilité de l'équilibre pour un très-grand nombre de figures, & que je n'en connoisse aucune autre que celle de l'ellipsoïde avec laquelle il soit possible, je n'ose cependant assurer qu'elle soit la seule. Il faudroit pour cela connoître en termes finis l'intégrale complète de l'équation différentielle du Problème, & je n'ai pu encore y parvenir. Au reste, si mes recherches ne m'ont pas conduit à trouver généralement la figure du Méridien, & par conséquent la loi de la variation des degrés de l'Équateur aux Pôles, elles m'ont fait connoître celle de la variation de la pesanteur, & j'ai trouvé ce théorème remarquable, savoir,

que



que sur un sphéroïde homogène, quelle que soit sa figure, pourvu qu'elle tienne le sphéroïde en équilibre, la variation de la pesanteur de l'Équateur aux Pôles, suit précisément la même loi que sur le sphéroïde elliptique homogène.

## PROBLÈME.

Déterminer l'attraction d'un sphéroïde de révolution infiniment peu différent de la sphère, sur un point quelconque pris dans son intérieur.

## SOLUTION.

Soit  $AMBm.A$  la courbe qui par sa révolution autour de l'axe  $AB$ , engendre le sphéroïde, &  $ANBn.A$ , un cercle décrit sur  $AB$ , comme diamètre; que l'on fasse  $CA = a$ , & l'angle  $NCA = \theta$ ,  $C$  étant le milieu de  $AB$ , on aura visiblement  $NC = a$ ; ensuite  $MN$  est infiniment petit par la condition du problème; représentant donc par  $\alpha$  une quantité infiniment petite, on pourra supposer  $MN$  de l'ordre  $\alpha$ . Si l'on fait maintenant  $\theta$  négatif, & tel que l'on ait  $AN = An$ , on a, non-seulement  $CN = Cn$ , mais encore  $CM = Cm$ ; donc  $MN = mn$ ; représentant donc  $MN$  par une fonction quelconque de l'angle  $\theta$ , cette fonction doit être telle qu'elle reste la même en changeant le signe de  $\theta$ ; & comme le cosinus de l'angle  $\theta$  a cette propriété, il en résulte qu'on peut généralement représenter  $MN$  par une fonction quelconque de  $a \cos. \theta$ ; désignant donc par  $\varphi (a \cos. \theta)$  une fonction de  $a \cos. \theta$ , on pourra supposer  $MN = \alpha a . \varphi (a \cos. \theta)$ , en sorte que l'on aura

$$CM = a [1 + \alpha \varphi (a \cos. \theta)],$$

& cette équation peut représenter toutes les courbes rentrantes, composées de deux parties égales, & semblablement placées de part & d'autre de l'axe  $AB$ .

Avant que d'aller plus loin, il ne sera pas inutile de faire la remarque suivante.

Si l'on change le signe de  $\theta$  sans changer sa valeur,  $\cos. \theta$

Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.

Y y y

reste de même valeur & de même signe; partant toute fonction de ce cosinus sera constamment la même; cependant le sinus de  $\theta$  peut toujours être donné en fonction du cosinus de cet angle, d'où il sembleroit qu'il ne doit point changer de valeur, en faisant  $\theta$  négatif, ce qui n'est pas. Pour résoudre cette difficulté, j'observe qu'on a  $\sin. \theta = \pm \sqrt{1 - \cos. \theta^2}$ ; ainsi à cause de l'ambiguïté de signe, l'expression analytique de  $\sin. \theta$  a deux valeurs; or la condition qui détermine laquelle de ces valeurs il faut employer, est que le sinus étant une perpendiculaire abaissée de l'extrémité de l'arc sur le diamètre, on doit prendre le radical en  $+$  ou en  $-$ , suivant que cette extrémité est au-dessus ou au-dessous du diamètre; ce n'est donc point parce que la fonction qui exprime la valeur du sinus en cosinus change de valeur, lorsqu'on fait  $\theta$  négatif, mais parce qu'elle change de forme, que  $\sin. \theta$  devient de positif, négatif. On doit dire la même chose de l'arc, & généralement de toutes les quantités qui dépendantes de l'angle  $\theta$ , & pouvant être conséquemment exprimées par une fonction de son cosinus, changent de valeur en faisant  $\theta$  négatif. Les fonctions transcendantes, telles que l'expression de l'arc par le cosinus, ne diffèrent à cet égard des fonctions algébriques, telles que l'expression du sinus par le cosinus, qu'en ce qu'elles renferment une infinité de formes différentes, au lieu que le nombre des dernières est limité.

La fonction  $\phi(a \cos. \theta)$  doit toujours rester la même, tant que la quantité  $a \cos. \theta$ , enveloppée sous le signe  $\phi$ , reste la même. Cette fonction ne doit donc être sujette à aucune ambiguïté de formes, & si, par exemple, on prend pour elle  $\sqrt{1 - \cos. \theta^2}$ , il faut prendre constamment le radical soit en plus, soit en moins. Cela posé,

$T$  étant un point quelconque placé sur le plan  $AMB$  dans l'intérieur du sphéroïde, soit  $TC = h$ , & considérons une molécule quelconque du sphéroïde, située au point  $R$  dont  $Z$  est la projection sur le plan  $AMB$ ; soit  $TR = r$ , & par le point  $T$  soient menées les deux droites  $TI$  &  $TQ$ , la première dans le plan  $AMB$ , & perpendiculairement à

la droite  $TC$ ; la seconde perpendiculairement au plan  $AMB$ ; soit  $p$  l'angle  $QTR$ , &  $q$  l'angle  $ZTI$ ; on aura

$$TZ = r \cdot \sin. p, \text{ \& } ZR = r \cdot \cos. p,$$

en sorte que la position du point  $R$  sera déterminée par les trois quantités  $p$ ,  $q$  &  $r$ .

$r$  &  $p$  restant invariables, si l'on fait varier  $q$ , de la différence  $\partial q$ , on aura un nouveau point  $R'$  dont  $Z'$  sera la projection sur le plan  $AMB$ ; & il est clair que l'on aura  $ZZ' = RR'$ ; or on a  $ZZ' = r \partial q \cdot \sin. p$ ; donc  $RR' = r \partial q \cdot \sin. p$ .

Si l'on fait ensuite varier  $r$ , de la quantité  $\partial r$ ,  $p$  &  $q$  étant constans, on aura un troisième point  $R''$ , tel que  $RR'' = \partial r$ .

Enfin si l'on fait varier  $p$ , de la quantité  $\partial p$ ,  $r$  &  $q$  étant constans, on aura un quatrième point  $R'''$ , tel que  $RR''' = r \partial p$ .

Maintenant les trois lignes  $RR'$ ,  $RR''$ ,  $RR'''$ , étant perpendiculaires entre elles, leur produit formera un parallépipède que nous pouvons prendre pour la molécule même placée au point  $R$ ; or ce produit est  $r^2 \sin. p \cdot \partial p \cdot \partial q \cdot \partial r$ , & en le divisant par le quarré  $r^2$  de la distance  $r$  du point  $T$  à la molécule, on aura  $\sin. p \cdot \partial p \cdot \partial q \cdot \partial r$  pour l'action suivant  $TR$  de la molécule placée en  $R$ , sur le point  $T$ .

Je décompose cette action en trois autres; la première, perpendiculairement au plan  $AMB$ , & dont il est inutile de tenir compte, parce qu'elle est détruite par l'action d'une autre molécule égale à la molécule  $R$ , & semblablement placée par rapport au point  $T$ , au-dessous de ce plan; la seconde, suivant le rayon  $TC$ , & la troisième, perpendiculairement à ce rayon dans le plan  $AMB$ .

Si du point  $Z$ , on abaisse  $ZL$  perpendiculairement sur  $TC$ , il est visible que l'expression de la force suivant  $TC$  sera  $\sin. p \cdot \partial p \cdot \partial q \cdot \partial r \cdot \frac{TL}{TR}$ ; or on a  $\frac{TL}{TR} = \sin. p \cdot \sin. q$ ; ainsi la force suivant  $TC$ , est égale à  $\partial p \cdot \partial q \cdot \partial r \cdot \sin. p^2 \cdot \sin. q$ .

Y y ij

L'expression de la force perpendiculaire à  $TC$ , & agissante de  $T$  vers  $I$ , est  $\sin. p. \partial p. \partial q. \partial r. \frac{ZL}{TR}$ ; or on a

$$\frac{ZL}{TR} = \sin. p. \cos. q; \text{ ainsi la force perpendiculaire à } TC \text{ est } \partial p. \partial q. \partial r. \sin. p^2. \cos. q.$$

Pour avoir présentement l'attraction entière du sphéroïde, il faut prendre les intégrales  $\iiint \partial p. \partial q. \partial r. \sin. p^2. \sin. q$ , &  $\iiint \partial p. \partial q. \partial r. \sin. p^2. \cos. q$ , pour toute l'étendue du corps, en intégrant successivement par rapport aux trois variables  $r, q$  &  $p$ .

En intégrant d'abord par rapport à  $r$ , elles deviennent

$$\iint \partial p. \partial q. (r' + r) \sin. p^2. \sin. q,$$

&

$$\iint \partial p. \partial q. (r' - r) \sin. p^2. \cos. q,$$

en représentant par  $r'$  le rayon  $TR$  prolongé depuis  $T$  jusqu'au point où il sort du sphéroïde; & par  $r$ , ce même rayon prolongé de l'autre côté de  $TC$ , jusqu'au point de sortie; d'où l'on voit que  $r$  est négatif.

Pour intégrer présentement les différentielles  $\partial p \partial q (r' + r) \sin. p^2. \sin. q$ , &  $\partial p. \partial q. (r' - r) \sin. p^2. \cos. q$ , par rapport aux variables  $p$  &  $q$ , il faut connoître  $r'$  &  $r$  en fonctions de  $p$  & de  $q$ . Je suppose conséquemment le point  $R$  à la surface du sphéroïde; en menant de ce point à l'axe  $AB$  la perpendiculaire  $RK$ , on aura par la nature de la courbe génératrice  $AMB$ ,  $\overline{RC}^2 = a^2 [1 + a\phi(CK)]^2$ ; & si, comme je le ferai toujours dans la suite, on néglige les quantités de l'ordre  $a^2$ , on aura  $\overline{RC}^2 = a^2 [1 + 2a\phi(CK)]$ . Cherchons présentement les expressions de  $RC$  & de  $CK$ .

On a, par ce qui précède,  $ZL = r. \sin. p. \cos. q$ , &  $TL = r. \sin. p. \sin. q$ ; donc,  $LC = h - r. \sin. p. \sin. q$ , & si l'on mène  $LH$  perpendiculairement sur  $CA$ , on aura,

$$CH = LC. \cos. \theta = (h - r. \sin. p. \sin. q). \cos. \theta.$$

Si du point  $Z$  on abaisse  $ZS$  perpendiculairement sur

$LH$ , on aura  $ZS = ZL \cdot \sin. \theta = r \cdot \sin. p \cdot \cos. q \cdot \sin. \theta$ ;  
or  $ZK$  étant perpendiculaire sur  $AB$ , on a  $ZS = KH$ ;  
donc  $KH = r \cdot \sin. p \cdot \cos. q \cdot \sin. \theta$ ; partant

$$CK = CH + HK = h \cdot \cos. \theta + r \cdot \sin. p \cdot (\sin. \theta \cos. q - \cos. \theta \cdot \sin. q),$$

ou  $CK = h \cdot \cos. \theta + r \cdot \sin. p \cdot \sin. (\theta - q)$ .

Présentement, on a  $\overline{ZC}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{LZ}^2 = (h - r \sin. p \cdot \sin. q)^2 + r^2 \cdot \sin. p^2 \cdot \cos. q^2$ , &  $\overline{RZ}^2 = r^2 \cos. p^2$ , donc  
 $\overline{RC}^2 = (h - r \sin. p \cdot \sin. q)^2 + r^2 \cdot \sin. p^2 \cdot \cos. q^2 + r^2 \cos. p^2$   
 $= h^2 - 2hr \cdot \sin. p \cdot \sin. q + r^2$ ; l'équation

$$\overline{RC}^2 = a^2 [1 + 2\alpha \phi(CK)],$$

devient donc  $r^2 - 2hr \cdot \sin. p \cdot \sin. q = a^2 - h^2 + 2\alpha a^2 \phi \cdot [h \cos. \theta + r \cdot \sin. p \cdot \sin. (\theta - q)]$ ;  
partant

$$r = h \cdot \sin. p \cdot \sin. q \pm \sqrt{\{a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2 + 2\alpha a^2 \phi \cdot [h \cos. \theta + r \sin. p \cdot \sin. (\theta - q)]\}},$$

ou

$$r = h \cdot \sin. p \cdot \sin. q \pm \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2) + \frac{\alpha a^2 \phi \cdot [h \cos. \theta + r \sin. p \cdot \sin. (\theta - q)]}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}}}.$$

Il est aisé de voir que l'on aura  $r'$ , en prenant le radical en  $+$ , & en substituant sous le signe  $\phi$ , au lieu de  $r$  la valeur que l'on auroit en supposant  $\alpha = 0$ , & prenant le radical en  $+$ , ce qui donne

$$r' = h \cdot \sin. p \cdot \sin. q + \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2) + \frac{\alpha \cdot a^2 \cdot \phi \cdot [h \cos. \theta + (h \sin. p^2 \cdot \sin. q + \sin. p \cdot \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}) \cdot \sin. (\theta - q)]}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}}},$$

on trouvera pareillement,

$$r = h \cdot \sin. p \cdot \sin. q - \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2) - \frac{\alpha \cdot a^2 \cdot \phi \cdot [h \cos. \theta + (h \sin. p^2 \cdot \sin. q - \sin. p \cdot \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}) \cdot \sin. (\theta - q)]}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}}};$$

On aura ainsi, pour l'attraction du sphéroïde suivant  $TC$ ,

$$\iint \partial p \partial q (r' + r) \cdot \sin. p^2 \cdot \sin. q = \iint 2 h \partial p \partial q \cdot \sin. p^3 \cdot \sin. q^3$$

$$+ \iint \frac{\alpha \partial p \cdot \partial q \cdot \sin. p^3 \cdot \sin. q \cdot a^3}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}} \left\{ \begin{aligned} &\varphi [h \cdot \cos. \theta + (h \sin. p^2 \cdot \sin. q + \sin. p \cdot \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}) \cdot \sin. (\theta - q)] \\ &- \varphi [h \cdot \cos. \theta + (h \sin. p^2 \cdot \sin. q - \sin. p \cdot \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}) \cdot \sin. (\theta - q)] \end{aligned} \right\}$$

& pour l'attraction suivante  $TI$ ,

$$\iint \partial p \cdot \partial q (r' + r) \cdot \sin. p^2 \cdot \cos. q = \iint 2 h \partial p \partial q \cdot \sin. p^3 \cdot \sin. q \cdot \cos. q$$

$$+ \iint \frac{\alpha \partial p \cdot \partial q \cdot \sin. p^3 \cdot \cos. q \cdot a^3}{\sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}} \left\{ \begin{aligned} &\varphi [h \cos. \theta + (h \sin. p^2 \sin. q + \sin. p \cdot \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}) \cdot \sin. (\theta - q)] \\ &- \varphi [h \cos. \theta + (h \sin. p^2 \sin. q - \sin. p \cdot \sqrt{(a^2 - h^2 + h^2 \sin. p^2 \cdot \sin. q^2)}) \cdot \sin. (\theta - q)] \end{aligned} \right\}$$

Il faut présentement intégrer ces quantités depuis  $q = 0$  &  $p = 0$ , jusqu'à  $q = 180^\circ$ , &  $p = 180^\circ$ , & l'on aura l'action entière du sphéroïde sur le point  $T$ ; de-là il suit que dans le développement de ces différentielles, on peut négliger les termes dans lesquels  $\cos. q$  se trouve élevé à une puissance impaire; car soit  $P \cdot \partial q \cdot \cos. q$ , un de ces termes,  $P$  étant une fonction quelconque de  $\sin. q$  & de  $\cos. q^2$ , il est clair que  $P$  sera le même pour deux valeurs de  $q$ , prises à égale distance de  $90^\circ$ ; mais  $\cos. q$  sera le même avec des signes contraires; d'où l'on voit que la somme des deux différentielles,  $P \partial q \cdot \cos. q$ , correspondantes, l'une à  $q = 90^\circ - q'$ , & l'autre à  $90^\circ + q'$ , sera nulle, & qu'ainsi l'intégrale entière,  $\int P \partial q \cdot \cos. q$ , sera zéro, en la prenant depuis  $q = 0$ , jusqu'à  $q = 180^\circ$ .

## III.

Si le point  $T$  est à la surface du sphéroïde, & tombe par conséquent sur le point  $M$ , il est visible que l'action du sphéroïde sur un point quelconque pris dans son intérieur, & infiniment voisin de  $M$ , est la même que sur  $M$ ; ainsi les formules de l'article précédent, ont également lieu pour ce cas; mais on peut observer qu'alors la différence de  $a$  & de  $h$ , étant de l'ordre  $\alpha$ , on peut, dans les termes multipliés par  $\alpha$ , substituer  $a$  au lieu de  $h$ ; de plus on a, par l'article I,  $h = a [1 + \alpha \varphi(a \cos. \theta)]$ , & si l'on intègre depuis

$q = 0$ , jusqu'à  $q = 180^\circ$ , on a  $\iint 2h \partial p \partial q \cdot \sin. p^3 \cdot \sin. q^2$   
 $= \iint h \partial p \cdot \sin. p^3 (\partial q - \partial q \cdot \cos. 2q) = \pi \cdot \int h \partial p \cdot \sin. p^3$ ,  
 en désignant par  $\pi$  le rapport de la circonférence au diamètre;  
 or en intégrant depuis  $p = 0$  jusqu'à  $p = 180^\circ$ , on a  
 $\int \partial p \cdot \sin. p^3 = \frac{4}{3}$ , donc  $\iint 2h \partial p \partial q \cdot \sin. p^3 \cdot \sin. q^2 = \frac{4}{3} h \pi$   
 $= \frac{4}{3} a \pi \cdot [1 + a \varphi(a \cos. \theta)]$ ; on a pareillement  $\iint \partial p \partial q \cdot \sin. p = 2\pi$ ,

&  $\iint 2h \partial p \partial q \cdot \sin. p^3 \sin. q \cdot \cos. q = 0$ ; donc si l'on fait pour  
 plus de simplicité,  $a = 1$ , on aura pour l'attraction du  
 sphéroïde sur le point  $M$ , suivant  $MC$ ,

$$\iint (r' + r) \partial p \cdot \partial q \cdot \sin. p^2 \cdot \sin. q = \frac{4}{3} \pi - \frac{2}{3} \pi \cdot a \cdot \varphi(\cos. \theta) \\
 + \iint a \partial p \partial q \cdot \sin. p \cdot \varphi[\cos. \theta + 2 \sin. p^2 \cdot \sin. q \cdot \sin. (\theta - q)];$$

je nomme  $A$  cette quantité.

On aura ensuite, pour l'action du sphéroïde suivant  $MO$   
 perpendiculaire à  $MC$ ,

$$\iint (r' + r) \partial p \partial q \cdot \sin. p^3 \cdot \cos. q = \iint \frac{a \partial p \partial q \cdot \sin. p \cdot \cos. q}{\sin. q} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \varphi[\cos. \theta + 2 \sin. p^2 \sin. q \cdot \sin. (\theta - q)] \\ - \varphi(\cos. \theta) \end{array} \right\},$$

je nomme  $aB$  cette quantité, & j'observe qu'elle peut être  
 mise sous une forme plus simple; car, en intégrant par  
 rapport à  $p$ , on a,

$$B = - \cos. p \int \frac{\partial q \cdot \cos. q}{\sin. q} \left\{ \begin{array}{l} \varphi[\cos. \theta + 2 \sin. p^2 \cdot \sin. q \cdot \sin. (\theta - q)] \\ - \varphi(\cos. \theta) \end{array} \right\} + C$$

$$+ \iint 4 \partial p \partial q \cdot \sin. p \cdot \cos. p^2 \cdot \cos. q \cdot \sin. (\theta - q) \cdot \varphi'[\cos. \theta + 2 \sin. p^2 \cdot \sin. q \cdot \sin. (\theta - q)]$$

en désignant par  $\varphi'(\theta)$ , la différence de  $\varphi(\theta)$ , divisée par  
 $\partial \cos. \theta$ ; la constante arbitraire  $C$  doit être déterminée par la  
 condition que l'intégrale commence lorsque  $p = 0$ , & cette  
 intégrale doit se terminer lorsque  $p = 180^\circ$ ; or on a  
 dans ces deux cas,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi[\cos. \theta + 2 \sin. p^2 \cdot \sin. q \cdot \sin. (\theta - q)] \\ - \varphi(\cos. \theta) \end{array} \right\} = 0;$$

donc  $C = 0$ , partant,

$$B = \iint 4 \partial p \partial q \cdot \sin. p \cdot \cos. p^2 \cdot \cos. q \cdot \sin. (\theta - q) \cdot$$

$$\varphi' [\cos. \theta + 2 \sin. p^2 \cdot \sin. q \cdot \sin. (\theta - q)];$$

or on a,  $2 \cos. q \cdot \sin. (\theta - q) = \sin. \theta + \sin. (\theta - 2q)$ ,

&  $2 \sin. q \cdot \sin. (\theta - q) = \cos. (\theta - 2q) - \cos. \theta$ ,

$$\text{donc, } B = \iint 2 \partial p \cdot \partial q \cdot \sin. p \cdot \cos. p^2 \cdot \sin. \theta \cdot$$

$$\varphi' [\cos. \theta + \sin. p^2 \cdot \cos. (\theta - 2q) - \sin. p^2 \cdot \cos. \theta]$$

$$+ \iint 2 \partial p \partial q \cdot \sin. p \cdot \cos. p^2 \cdot \sin. (\theta - 2q)$$

$$\varphi' [\cos. \theta + \sin. p^2 \cdot \cos. (\theta - 2q) - \sin. p^2 \cdot \cos. \theta].$$

J'observe maintenant que l'on a en intégrant par rapport à  $q$ ,

$$\int 2 \partial q \cdot \sin. p^2 \cdot \sin. (\theta - 2q) \cdot \varphi' [\cos. \theta - \sin. p^2 \cos. \theta + \sin. p^2 \cos. (\theta - 2q)]$$

$$= \varphi [\cos. \theta - \sin. p^2 \cos. \theta + \sin. p^2 \cos. (\theta - 2q)] + C;$$

la constante doit se déterminer par cette condition que l'intégrale est nulle, lorsque  $q = 0$ , ce qui donne  $C = -\varphi(\cos. \theta)$ ;

de plus, l'intégrale doit se terminer lorsque  $q = 180^\circ$ ;

or on a dans ce cas,  $\cos. (\theta - 2q) = \cos. \theta$ ; partant (article I)

$$\varphi [\cos. \theta - \sin. p^2 \cos. \theta + \sin. p^2 \cos. (\theta - 2q)] = \varphi(\cos. \theta);$$

donc,

$$\int 2 \partial q \cdot \sin. p^2 \cdot \sin. (\theta - 2q) \cdot$$

$$\varphi' [\cos. \theta - \sin. p^2 \cos. \theta + \sin. p^2 \cos. (\theta - 2q)]$$

$$= \varphi(\cos. \theta) - \varphi(\cos. \theta) = 0.$$

L'expression précédente de  $B$  se réduira donc à celle-ci,

$$B = \iint 2 \partial p \cdot \partial q \cdot \sin. p \cdot \cos. p^2 \cdot \sin. \theta \cdot$$

$$\varphi' [\cos. \theta - \sin. p^2 \cos. \theta + \sin. p^2 \cos. (\theta - 2q)].$$

Cette expression de  $B$  nous fournit un rapport remarquable & qui nous sera très-utile dans la suite, entre les deux quantités  $A$  &  $B$ . En effet, si l'on différencie par rapport à  $\theta$ ,



à  $\theta$ , l'expression précédente de  $A$ , après y avoir substitué  $\cos.(\theta - 2q) - \cos.\theta$ , au lieu de  $2 \sin.q \cdot \sin.(\theta - q)$ , on aura,

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{2}{3} \pi \cdot \alpha \cdot \sin.\theta \cdot \varphi'(\cos.\theta) \\ - \iint \alpha \partial p \partial q \cdot \sin.p \cdot [\sin.\theta \cdot \cos.p^2 + \sin.p^2 \cdot \sin.(\theta - 2q)] \\ \varphi'[\cos.\theta + \sin.p^2 \cdot \cos.(\theta - 2q) - \sin.p^2 \cdot \cos.\theta];$$

or on a, comme on vient de le voir,  $\iint 2 \partial q \cdot \sin.p^2 \cdot \sin.(\theta - 2q) \varphi'[\cos.\theta + \sin.p^2 \cdot \cos.(\theta - 2q) - \sin.p^2 \cdot \cos.\theta] = 0$ ; partant,

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{2}{3} \pi \alpha \sin.\theta \cdot \varphi'(\cos.\theta) - \frac{\alpha B}{2}; (V).$$

## I V.

Pour qu'un sphéroïde homogène soit en équilibre, il suffit que la direction de la pesanteur soit perpendiculaire à sa surface; cette proposition se trouve démontrée dans différens endroits (*voyez sur-tout l'excellent Ouvrage de M. Clairaut sur la figure de la Terre*). Or il faut pour cela que la force dont le point  $M$  est animé, suivant la tangente  $MV$ , soit nulle; cela posé, la force  $\alpha B$ , dirigée suivant  $MO$ , donne, en négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , une force égale à  $\alpha B$ , suivant  $MV$ , parce que le sphéroïde différant infiniment peu de la sphère, l'angle  $OMV$ , est de l'ordre  $\alpha$ . De plus, en faisant toujours

$$MC = h, \text{ on a } \cos.VMC = \frac{\partial h}{h \partial \theta} = -\alpha \sin.\theta \cdot \varphi'(\cos.\theta),$$

en substituant au lieu de  $h$ ,  $1 + \alpha \varphi(\cos.\theta)$ , & négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ ; or la force  $A$  dirigée suivant  $MC$ , donne suivant  $MV$ , une force égale à  $A \cdot \cos.VMC$ ; l'action entière du sphéroïde produira donc suivant  $MV$ , une force égale à  $\alpha B - \alpha A \sin.\theta \cdot \varphi'(\cos.\theta)$ ; donc en substituant au lieu de  $A$ , sa valeur trouvée dans l'article précédent, & négligeant les quantités de l'ordre  $\alpha^2$ , on aura  $\alpha B - \frac{4}{3} \pi \alpha \sin.\theta \cdot \varphi'(\cos.\theta)$ , pour cette force.

Mém. 1772, II.<sup>e</sup> Partie.

Z z z

Soit maintenant  $\alpha f$ , la force centrifuge à l'équateur du sphéroïde, c'est-à-dire, lorsque  $\theta = 90$  degrés, cette force au point  $M$ , sera  $\alpha f. \sin. \theta$ , & elle donnera, suivant la tangente  $MV$ , une force égale à  $-\alpha f. \sin. \theta. \cos. \theta$ , je lui donne le signe  $-$ , parce qu'elle agit de  $M$  vers  $V'$ ; donc la force dont le point  $M$  est animé suivant la tangente  $MV$ , est,  $\alpha B - \frac{4}{3} \pi \alpha. \sin. \theta. \Phi'(\cos. \theta) - \alpha f. \sin. \theta. \cos. \theta$ , & comme elle doit être nulle dans le cas de l'équilibre, on aura pour déterminer la figure du sphéroïde homogène en équilibre, l'équation

$$B - \frac{4}{3} \pi. \sin. \theta. \Phi'(\cos. \theta) = f. \sin. \theta. \cos. \theta; (Z)$$

& l'on connoîtra par son moyen la loi de la variation des degrés de l'Équateur aux Pôles.

## V.

Pour avoir la loi de la pesanteur, j'observe que la force centrifuge au point  $M$  donne suivant  $MC$ , une force égale à  $-\alpha f. \sin. \theta^2$ ; ainsi la force totale dont le point  $M$  est animé suivant  $MC$  est  $A - \alpha f. \sin. \theta^2$ ; mais la pesanteur à ce point est la résultante de la force suivant  $MC$ , & de la force suivant  $MO$  perpendiculaire à  $MC$ ; or, cette dernière force étant de l'ordre  $\alpha$ , il est clair que la résultante ne différera de la force suivant  $MC$ , que d'une quantité de l'ordre  $\alpha^2$ ; on peut donc prendre pour la pesanteur, la force suivant  $MC$ ; ainsi nommant  $P$  la pesanteur au point  $M$ , on aura  $P = A - \alpha f. \sin. \theta^2$ ; donc  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta} - 2\alpha f. \sin. \theta. \cos. \theta$ , & substituant au lieu de  $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ , sa valeur que donne l'équation

(V); de l'article III; on aura,

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{2}{3} \alpha \pi. \sin. \theta. \Phi'(\cos. \theta) - \frac{\alpha B}{2} - 2\alpha f. \sin. \theta. \cos. \theta;$$

si l'on substitue, au lieu de  $\frac{B}{2}$ , sa valeur que donne l'équation (Z) de l'équilibre, trouvée dans l'article précédent, on aura  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \alpha f. \sin. \theta. \cos. \theta$ ; donc en intégrant,

$P = C + \frac{1}{4} af \cdot \cos. \theta^2$ ; soit  $P'$  la pesanteur à l'Équateur, c'est-à-dire, lorsque  $\cos. \theta = 0$ , &  $am$ , le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'Équateur, on aura  $af = am P'$ , &  $P' = C$ ; donc  $P = P' (1 + \frac{1}{4} am \cdot \cos. \theta^2)$ ; cette équation donne la loi de la variation de la pesanteur de l'Équateur aux Pôles, & il en résulte que cette variation est proportionnelle au carré du sinus de la latitude.

## V I.

Reprenons maintenant l'équation (Z) de l'article IV, en y substituant au lieu de  $B$ , sa valeur

$\iint 2 \partial p \cdot \partial q \cdot \sin. p \cdot \cos. p^2 \cdot \sin. \theta \cdot \Phi' \cdot [\cos. \theta - \sin. p^2 \cos. \theta - \sin. p^2 \cos. (\theta - 2q)]$ , trouvée dans l'article III, on aura

$\iint 2 \partial p \cdot \partial q \cdot \sin. p \cdot \cos. p^2 \cdot \Phi' \cdot [\cos. \theta - \sin. p^2 \cos. \theta - \sin. p^2 \cos. (\theta - 2q)] - \frac{4}{3} \pi \cdot \Phi' (\cos. \theta) = f \cdot \cos. \theta$ ; soit  $\cos. \theta = x$ , &  $\Phi' (\cos. \theta) = y$ ,

on aura  $\Phi' (\cos. \theta) = \frac{\partial y}{\partial x}$ ; de plus, on a par la théorie des suites,  $\Phi' [\cos. \theta - \sin. p^2 \cos. \theta - \sin. p^2 \cos. (\theta - 2q)]$

$$= \frac{\partial y}{\partial x} - \sin. p^2 \cdot [\cos. \theta - \cos. (\theta - 2q)] \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$+ \sin. p^4 \cdot [\cos. \theta - \cos. (\theta - 2q)]^2 \cdot \frac{\partial^3 y}{1 \cdot 2 \cdot \partial x^3},$$

$$- \sin. p^6 \cdot [\cos. \theta - \cos. (\theta - 2q)]^3 \cdot \frac{\partial^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial x^4},$$

+ &c.

L'équation précédente deviendra donc, en observant que  $\iint 2 \partial p \cdot \partial q \cdot \sin. p \cdot \cos. p^2 = \frac{4}{3} \pi$ ,

$$-\frac{1}{2} f x = \iint \partial p \cdot \partial q \cdot \sin. p^3 \cdot \cos. p^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} [\cos. \theta - \cos. (\theta - 2q)] \\ - \frac{\partial^3 y}{1 \cdot 2 \cdot \partial x^3} \cdot \sin. p^2 \cdot [\cos. \theta - \cos. (\theta - 2q)]^2 \\ + \&c. \end{array} \right\} (C);$$

or on a  $1.^o [\cos. \theta - \cos. (\theta - 2q)]^r = \cos. \theta^r - r \cdot \cos. \theta^{r-1} \cdot$

$\cos. (\theta - 2q) + \frac{r \cdot (r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \cos. \theta^{r-2} \cdot \cos. (\theta - 2q)^2 - \&c.$

Z z z ij

2.<sup>o</sup> Si l'on fait,  $\cos. (\theta - 2q)^i = A + B. \cos. (\theta - 2q) + C. \cos. 2(\theta - 2q) + \&c.$  on a, comme l'on fait,  $A = 0$ , lorsque  $i$  est impair, &  $A = \frac{1.3.5 \dots (i-1)}{2.4.6 \dots i}$ , lorsque  $i$  est pair; 3.<sup>o</sup> en intégrant depuis  $q = 0$ , jusque  $q = 180$  degrés, on a  $\int \partial q. \cos. m(\theta - 2q) = 0$ ,  $m$  étant un nombre entier quelconque; de-là il est aisé de conclure,

$$\int \partial q. [\cos. \theta - \cos. (\theta - 2q)]^r = \pi. \left\{ \begin{aligned} & x^r + \frac{r(r-1)}{2^2} \cdot x^{r-2} + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2^2 \cdot 4^2} \cdot x^{r-4} \\ & + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot x^{r-6} + \&c. \end{aligned} \right.$$

l'équation (C) deviendra donc

$$-\frac{f_4}{2\pi} = \int \partial p. \sin. p. \cos. p^2. \left\{ \begin{aligned} & \sin. p^2. \cdot \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} \cdot x \\ & - \sin. p^4. \cdot \frac{\partial^2 y}{1.2. \partial x^2} \cdot (x^2 + \frac{1}{2}) \\ & + \sin. p^6. \cdot \frac{\partial^4 y}{1.2.3. \partial x^2} \cdot (x^3 + \frac{3}{2}x) \\ & - \&c. \\ & + \sin. p^{2n-2}. \cdot \frac{\partial^n y}{1.2.3 \dots (n-1). \partial x^n} \cdot [x^{n-1} \\ & + \frac{(n-1)(n-2)}{2^2} \cdot x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2^2 \cdot 4^2} \cdot x^{n-5} + \&c.] \\ & - \&c. \end{aligned} \right\} (D).$$

Le signe + ayant lieu si  $n$  est pair, & le signe — s'il est impair.  
Mais on a

$$\int \partial p. \sin. p^{2n-1}. \cos. p^2 = \frac{1}{2n} \cdot \sin. p^{2n}. \cos. p + \frac{1}{2n} \int \partial p. \sin. p^{2n+1};$$

& en intégrant depuis  $p = 0$ , jusqu'à  $p = 180^\circ$ , on a

$$\int \partial p. \sin. p^{2n-1}. \cos. p^2 = \frac{1}{2n} \cdot \int \partial p. \sin. p^{2n+1};$$

de plus,

$$\int \partial p. \sin. p^{2n+1} = \frac{2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)}{1.3.5 \dots (2n+1)};$$

donc

$$\int dp \cdot \sin p^{2n-1} \cdot \cos p^2 = \frac{2^n \cdot [1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)]}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)},$$

l'équation (D) deviendra donc

$$\begin{aligned} - \frac{fx}{2\pi} &= \frac{2^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot x - \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot (x^2 + \frac{1}{2}) + \&c. \\ &= 2^n \cdot \frac{\partial^n y}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \cdot \partial x^n} \cdot \left\{ \begin{aligned} &x^{n-1} + \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2^2} \cdot x^{n-3} + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{2^2 \cdot 4^2} \cdot x^{n-5} \\ &+ \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot x^{n-7} + \&c. \end{aligned} \right\} (E). \\ &= \&c. \end{aligned}$$

Telle est l'équation infinie qu'il faut résoudre pour avoir la valeur de  $y$ .

## V I I.

Il est évident que l'équation  $\partial^3 y = 0$ , en est une intégrale particulière, ce qui donne une ellipse pour la courbe du Méridien; on aura dans ce cas,  $y = cx^2 + bx + a$ ; l'équation (E) donne, en y substituant au lieu de  $y$  cette valeur,  $c = -\frac{15}{16} \cdot \frac{f}{\pi}$ ; de plus, il est visible à l'inspection de la figure, que  $y$  est zéro, lorsque  $x = 1$ , & lorsque  $x = -1$ , ce qui donne  $c + b + a = 0$ , &  $c - b + a = 0$ , d'où l'on tire  $b = 0$ , &  $a = -c$ ; partant,

$$y = \frac{15}{16} \cdot \frac{f}{\pi} \cdot (1 - x^2) = \frac{15}{16} \cdot \frac{f}{\pi} \cdot \sin^2 \theta;$$

donc le rayon  $CM$  du sphéroïde est égal à

$$1 + \alpha \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{f}{\pi} \cdot \sin^2 \theta.$$

Je suppose qu'à l'Équateur, la force centrifuge soit à la pesanteur comme  $\alpha m : 1$ , on pourra, en regardant le sphéroïde comme une sphère, supposer la pesanteur égale à la masse divisée par le carré du rayon  $CA$ , ce qui donne  $\frac{4}{3}\pi$ , pour l'expression de cette force; on a donc  $\alpha f = \alpha m \cdot \frac{4}{3}\pi$ ;

partant,  $CM = 1 + \frac{5}{4} \alpha m \cdot \sin. \theta^2$ . Il suit de-là que le rayon de l'Équateur est égal à  $1 + \frac{5}{4} \alpha m$ , & par conséquent que l'aplatissement de la masse est égal à  $\frac{5}{4} \alpha m$ , ce que l'on fait d'ailleurs.

## V I I I.

Je suppose dans l'équation (E) de l'art. VI,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2c + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

elle donnera

$$-\frac{f}{2\pi} \cdot x = \frac{2^3}{3 \cdot 5} \cdot cx + \frac{2^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} x - \frac{2^5}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \cdot (x^2 + \frac{1}{2}) + \&c.$$

en faisant  $c = -\frac{15}{16} \cdot \frac{f}{\pi}$ , on aura

$$0 = \frac{2^3}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot x - \frac{2^5}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \cdot (x^2 + \frac{1}{2}) + \&c.$$

Soit  $z = \phi(x)$ , l'intégrale de cette équation; on aura

$$y = \phi(x) + cx^2 + bx + a;$$

la supposition de  $f = 0$ , donne  $y = z = \phi(x)$ ; on voit ainsi que le mouvement de rotation du corps ne fait qu'ajouter à la valeur de  $y$ , la quantité  $cx^2 + bx + a$ ; ainsi, toutes les figures de révolution dans lesquelles l'équilibre a lieu lorsque la masse est immobile, ont également lieu lorsqu'elle tourne autour de son axe de révolution, pourvu qu'on ajoute à l'expression de  $y$ ,  $cx^2 + bx + a$ ; mais lorsque  $f = 0$ , existe-t-il d'autre cas d'équilibre que la figure sphérique? Il paroît difficile de prononcer sur cet objet; voici cependant un théorème fort général qui exclut un grand nombre de figures.

## T H É O R È M E.

L'expression de  $y$  ne peut avoir cette forme,

$$y = \frac{a \cdot x^\mu + a' \cdot x^{\mu'} + a'' \cdot x^{\mu''} + \&c.}{b \cdot x^r + b' \cdot x^{r'} + b'' \cdot x^{r''} + \&c.},$$

$\mu, \mu', \mu'', \&c. r, r', r'', \&c.$  étant des nombres quelconques réels.

Je suppose d'abord que le dénominateur de cette expression se réduise à l'unité, & que l'on ait

$$y = a \cdot x^{\mu} + a' \cdot x^{\mu'} + a'' \cdot x^{\mu''} + \&c.$$

soit  $\mu$  le plus grand des exposans  $\mu, \mu', \mu'', \&c.$  en substituant dans l'équation (D) de l'art. VI, au lieu de  $y$ , l'expression précédente, & supposant  $f = 0$ , le terme  $ax^{\mu}$ , en donnera un de cette forme,

$$\mu \cdot ax^{\mu-1} \cdot \int \partial p \cdot \sin p \cdot \cos p^2 \cdot [(\mu-1) \cdot \sin p^2 - \frac{(\mu-1) \cdot (\mu-2)}{1 \cdot 2} \sin p^4 + \frac{(\mu-1) \cdot (\mu-2) \cdot (\mu-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin p^6 - \&c.],$$

& comme ce terme est le plus élevé par rapport à  $x$ , il doit être séparément égal à zéro, ce qui donne

$$0 = \mu \int \partial p \cdot \sin p \cdot \cos p^2 \cdot [(\mu-1) \cdot \sin p^2 - \frac{(\mu-1) \cdot (\mu-2)}{1 \cdot 2} \sin p^4 + \&c.];$$

or on a

$$(\mu-1) \cdot \sin p^2 - \frac{(\mu-1) \cdot (\mu-2)}{1 \cdot 2} \sin p^4 + \&c.$$

$$= 1 - (1 - \sin p^2)^{\mu-1} = 1 - \cos p^{2\mu-2};$$

donc

$$0 = \mu \cdot \int \partial p \cdot \sin p \cdot \cos p^2 - \mu \int \partial p \cdot \sin p \cdot \cos p^{2\mu},$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$0 = \mu \cdot [C + \frac{1}{2\mu+1} \cdot \cos p^{2\mu+1} - \frac{1}{3} \cdot \cos p^3].$$

Il faut déterminer la constante arbitraire  $C$ , de manière que l'intégrale soit nulle, lorsque  $\cos p = 1$ , & faire ensuite  $\cos p = -1$ ; l'équation précédente devient ainsi,

$$0 = \mu \left[ \frac{2}{3} (2\mu+1) - 1 + (-1)^{2\mu+1} \right] (T);$$

l'équation (T) donne d'abord  $\mu = 0$ ; il peut ensuite arriver trois cas.

1.° La valeur de  $\mu$  peut être telle que l'on ait  $(-1)^{2\mu+1} = 1$ ;

552 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
 l'équation  $(T)$  donne alors  $\mu = -\frac{1}{2}$ ; mais cette valeur de  $\mu$  doit être rejetée, parce que le terme  $ax^\mu$ , deviendrait imaginaire, lorsque  $x$  seroit négatif, & que d'ailleurs  $\mu$  étant le plus grand des exposans  $\mu, \mu', \&c.$  la valeur de  $y$  seroit infinie lorsque  $x$  seroit nul.

2.<sup>o</sup> La valeur de  $\mu$  peut être telle que l'on ait  $(-1)^{2\mu+1} = -1$ , l'équation  $(T)$  donne dans ce cas,  $\mu = 1$ .

3.<sup>o</sup> Enfin, on peut supposer que  $(-1)^{2\mu+1}$  est imaginaire; mais alors l'équation  $(T)$  donneroit pour  $\mu$  une valeur imaginaire, ce qui est contre l'hypothèse dont nous sommes partis.

Il suit de-là que l'expression de  $y$  ne peut avoir que cette forme,

$$y = ax + a' + a'' \cdot x^{\mu''} + a''' \cdot x^{\mu'''} + \&c.$$

$\mu'', \mu'''$ , &c. étant moindres que l'unité, & différens de zéro; or, en substituant cette valeur dans l'équation  $(E)$  de l'article VI, & supposant  $f = 0$ , il est visible que si l'expression précédente de  $y$  y satisfait, celle-ci,

$$y = a'' \cdot x^{\mu''} + a''' \cdot x^{\mu'''} + \&c.$$

y satisfera pareillement, puisque l'équation  $(E)$  ne renferme point  $y$ , ni sa première différence; or, il faut pour cela, comme on vient de le voir, que le plus grand des exposans  $\mu'', \mu'''$ , &c. soit zéro, ou l'unité, ce qui n'est pas; donc; si l'équation  $y = ax^\mu + a' \cdot x^{\mu'} + \&c.$  est possible; elle ne peut avoir que cette forme,  $y = ax + a'$ ; maintenant on a  $y = 0$ , lorsque  $x = 1$ , & lorsque  $x = -1$ , d'où l'on tire  $a = 0$ , &  $a' = 0$ ; partant  $y = 0$ , ce qui montre que le sphéroïde est une sphère.

Je dois observer ici que M. d'Alembert a déjà fait la même remarque pour le c: où les exposans  $\mu, \mu', \&c.$  sont des nombres entiers positifs (voyez le tom. V des *Opuscules de ce grand Géomètre*).

Supposons



Supposons présentement que l'expression de  $y$  ait un dénominateur, & que l'on ait

$$y = \frac{a.x^\mu + a'.x^{\mu^1} + a''.x^{\mu^{11}} + \&c.}{bx^r + b'.x^{r^1} + b''.x^{r^{11}} + \&c.};$$

soit  $\mu$  le plus grand des exposans  $\mu, \mu^1, \&c.$  &  $r$  le plus grand des exposans  $r, r^1, r^{11}, \&c.$  on aura, en divisant le numérateur & le dénominateur de l'expression de  $y$ , par  $x^r$ ,

$$y = \frac{ax^{\mu-r} + a'.x^{\mu^1-r} + \&c.}{b + b'.x^{r^1-r} + \&c.}.$$

En réduisant le dénominateur en série, on aura pour  $y$  une suite infinie de cette forme,

$$\frac{a}{b} x^{\mu-r} + hx^l + h'.x^{l^1} + \&c.$$

les exposans  $\mu - r, l, l^1, \&c.$  allant toujours en décroissant; or, si l'on substitue, au lieu de  $y$ , cette valeur dans l'équation (E) de l'art. VI, en supposant  $f = 0$ , on prouvera comme ci-dessus, que  $\mu - r$  doit être égal à zéro ou à l'unité ou à  $-\frac{1}{2}$ . Si  $\mu - r = -\frac{1}{2}$ , on aura  $r = \mu + \frac{1}{2}$ ; donc

$$y = \frac{ax^\mu + a'.x^{\mu^1} + \&c.}{bx^{\mu+\frac{1}{2}} + b'.x^{r^1} + \&c.};$$

or, en faisant  $x$  négatif,  $x^\mu$  est réel ou imaginaire; dans le premier cas, le dénominateur de l'expression de  $y$ , & dans le second cas, son numérateur devient imaginaire; on doit donc rejeter l'équation  $\mu - r = -\frac{1}{2}$ .

Si  $\mu - r$  est égal à zéro, on a l'unité, en divisant le numérateur de l'expression de  $y$  par son dénominateur, on pourra la mettre sous cette forme,

$$y = hx + h' + \frac{ex^i + c'.x^{i^1} + \&c.}{bx^r + b'.x^{r^1} + \&c.},$$

$i$  ne surpassant  $r$  ni de zéro, ni de l'unité, & puisque cette valeur de  $y$  satisfait à l'équation (E), en supposant  $f = 0$ ,

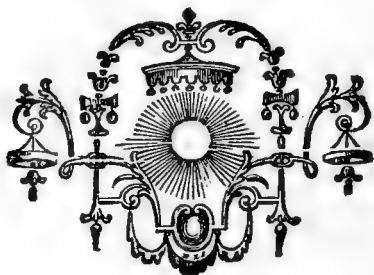
celle-ci,  $y = \frac{cx^i + c'.x^{i'} + \&c.}{bx^r + b'.x^{r'} + \&c.}$ , y satisfera pareillement;

or, pour cela il faut, par ce qui précède, que  $i$  surpasse  $r$  de zéro ou de l'unité, ce qui n'est pas; donc, généralement,

l'expression  $y = \frac{ax^\mu + a'.x^{\mu'} + \&c.}{bx^r + b'.x^{r'} + \&c.}$ , se réduit à celle-ci,

$y = ax + a'$ ; d'où l'on tire  $y = 0$ , & par conséquent, que le sphéroïde est une sphère.

Quoiqu'en vertu de ce théorème, un grand nombre de figures se trouvent exclues du cas de l'équilibre, il n'est cependant pas démontré que la figure elliptique soit la seule possible; mais il est très-remarquable qu'indépendamment de cela, nous soyons parvenus à déterminer généralement la loi de la pesanteur, & que cette loi soit la même sur tous les sphéroïdes de révolution, pourvu que leur figure convienne à l'équilibre.



## M É M O I R E

S U R

## L'USAGE DE L'ESPRIT-DE-VIN

D A N S

## L'ANALYSE DES EAUX MINÉRALES.

Par M. L A V O I S I E R.

**L**A partie de la Chimie qui porte le nom de *Halotechnie*, celle qui traite des Sels, est une des dernières qui semble avoir fixé l'attention des anciens Chimistes; l'analyse des Eaux minérales, qui appartient essentiellement à cette partie, s'est ressentie de ce retard; à peine y a-t-il cinquante ans que les Chimistes commencent à acquérir des idées nettes sur les différentes substances qui entrent dans leur composition, encore est-ce de nos jours que ces progrès ont été les plus rapides.

Ceux qui se sont occupés particulièrement de cet objet, savent qu'il reste encore beaucoup à faire, & les différences énormes qui se trouvent dans les analyses d'une même eau, faites par différens Chimistes, prouvent combien cet Art peut encore prêter à l'arbitraire, ou au moins combien est grande l'extension des erreurs qu'on peut commettre: j'avoue que c'est quelquefois plutôt à l'Artiste qu'à l'Art qu'il faut imputer ce défaut de succès; mais il n'en est pas moins vrai qu'en simplifiant l'Art, on le mettra à portée d'un plus grand nombre d'Artistes.

La difficulté de l'analyse des Eaux minérales, consiste principalement à séparer les différentes substances qui s'y rencontrent, à purifier les sels qui souvent sont imprégnés d'eau-mère, de matières extractives, ou de parties bitumineuses.

C'est pour faire cette séparation dans la plus scrupuleuse exactitude que je propose aujourd'hui une méthode, non pas peut-être absolument neuve, puisqu'elle existe entre les mains des Chimistes, mais dont ils ne paroissent pas avoir senti tout le mérite & toute l'importance, & dont je ne sache pas qu'il ait encore été fait aucune application suivie.

M. Macquer est le premier qui ait entrepris une suite d'expériences sur la solubilité des sels dans l'esprit-de-vin, & qui ait déterminé jusqu'à quel point alloit cette solubilité; les connoissances qu'on avoit acquises avant lui sur cet objet n'étoient pas très-étendues; elles se trouvoient d'ailleurs éparées dans un grand nombre d'Auteurs. Le travail de M. Macquer les a rassemblées, y a infiniment ajouté, & a complété en quelque façon toute cette partie de la Chimie.

Le Mémoire de M. Macquer, qui se trouve dans la Collection académique de Turin, est donc la base de ce que je donne aujourd'hui; c'est le point d'où je suis parti, & par d'autres expériences, j'ai reconnu qu'indépendamment des sels qui se dissolvent dans l'esprit-de-vin le plus déflégré, la plupart des autres devenoient également solubles dans ce menstrue, en y mélangeant une certaine portion d'eau, & je me suis même assuré qu'il étoit possible, dans plusieurs circonstances, de tellement proportionner les doses, que le mélange pût dissoudre un sel, sans en attaquer un autre.

Les bornes que les circonstances me prescrivent \*, ne me permettent pas d'exposer ici comment j'ai été conduit à cette découverte, ni de présenter dans tout leur détail les expériences nombreuses que j'ai été obligé de faire pour en tirer parti.

Je me contenterai donc de dire qu'après avoir mélangé de l'esprit-de-vin & de l'eau distillée dans huit proportions différentes, j'ai examiné, soit à chaud, soit à froid, quelle étoit l'action de ces mélanges sur différentes espèces de sels, & que j'ai reconnu :

---

\* Ce Mémoire étoit destiné pour une Séance publique.

1.<sup>o</sup> Que le sel marin & le nitre à base terreuse, se dissolvoient dans l'esprit-de-vin avec beaucoup de facilité.

2.<sup>o</sup> Que le même esprit-de-vin seul ne dissolvait ni le sel marin, ni le sel de Glauber, ni l'alkali de la soude, ni le sel d'Epsom, ni le sel marin à base de sel d'Epsom; mais qu'il enlevait seulement au sel de Glauber son eau de cristallisation, & le réduisait en une poudre fine.

3.<sup>o</sup> Qu'un mélange de deux parties d'esprit-de-vin & une d'eau, dissolvait à chaud une quantité considérable de sel marin, sans qu'il se fit aucune cristallisation par le refroidissement.

4.<sup>o</sup> Que le sel de Glauber ne se dissolvait point à froid dans tout mélange, où il entrait plus d'esprit-de-vin que d'eau; qu'il se dissolvait au contraire en quantité notable par l'ébullition, mais que la totalité cristallisait par le refroidissement, sur-tout si l'on avait employé un mélange de deux parties d'esprit-de-vin, contre une de sel de Glauber.

5.<sup>o</sup> Que le sel d'Epsom donnait dans sa solution, par un mélange d'eau & d'esprit-de-vin, à peu-près les mêmes résultats que le sel de Glauber, à l'exception qu'il était un peu moins soluble; de sorte que, par exemple, si ces deux sels avaient été dissous par un même mélange à chaud, le sel d'Epsom cristallisait ou se déposait le premier.

Il aurait été intéressant, sans doute, d'étendre ces expériences aux différentes espèces de sels que nous connaissons, & de compléter, s'il avait été possible, cette partie de la Chimie; le temps ne m'a pas encore permis d'exécuter ce travail; mais en attendant j'ai cru devoir publier les expériences qui ont un rapport plus immédiat avec l'analyse des eaux.

Il ne sera pas inutile, à cette occasion, de donner ici une idée générale des substances salines qui se rencontrent dans les eaux, ou qui peuvent s'y rencontrer; le nombre de ces substances est moins considérable qu'on ne le croirait au premier coup-d'œil; il se réduit à peu-près aux suivantes: *la terre calcaire, la sélénite, l'alkali fixe de la soude, le sel*

*marin à base saline & terreuse, le sel de Glauber, le sel d'Epsom & l'alun.* Je ne parlerai pas ici du fer & du cuivre, l'alcali phlogistique est un spécifique sûr pour reconnoître la présence de ces métaux, & pour en évaluer la quantité.

Toutes les analyses d'eaux minérales, données jusqu'ici, prouvent que ces substances sont à peu-près les seules qui se rencontrent dans les eaux ; mais quand il seroit possible de former quelques doutes à cet égard, ils seront facilement détruits par les réflexions suivantes.

Les Chimistes & les Naturalistes conviennent la plupart qu'il n'existe que deux acides dans le règne minéral, l'acide vitriolique & l'acide marin ; ils ne sont pas tous d'accord, il est vrai, sur l'origine de celui de nitre, les uns pensent qu'il appartient au règne végétal, les autres qu'il est le produit de la putréfaction des matières, soit animales, soit végétales ; mais tous conviennent au moins qu'il est étranger au règne minéral, & qu'il ne s'y trouve que par accident.

Je fais qu'un Auteur moderne a cru devoir introduire un nouvel acide dans le règne minéral, sous le nom d'*acide phosphorique* ; mais quelque ingénieuse que soit la théorie qu'il adopte, comme elle ne paroît pas encore suffisamment appuyée par l'expérience, je crois qu'on peut généralement réduire à deux le nombre des acides vraiment minéraux. D'ailleurs, quand il en existeroit d'autres, il est probable qu'ils forment des sels absolument insolubles, & que c'est par cette raison qu'on ne les trouve pas dans les eaux. On peut donc regarder comme constant, d'après l'expérience & d'après la théorie, qu'il ne peut se trouver dans les eaux minérales que des sels vitrioliques ou marins ; or, il est aisé de faire voir que le nombre des sels de cette classe qui peuvent être chariés par les eaux n'est pas très-considérable.

Premièrement, la plupart des demi-métaux ne sont point susceptibles de dissolution dans l'acide vitriolique, ils exigent du moins un acide vitriolique concentré & bouillant : or, ces deux circonstances réunies, ne se rencontrent jamais dans la Nature, puisque même l'acide vitriolique ne s'y trouve que

très-rarement à nu. On ne doit donc pas s'attendre à trouver dans les eaux, ni mercure, ni antimoine, ni cobalt, ni bismuth dissous par l'acide vitriolique, il en est à-peu-près de même des métaux, sur-tout des métaux blancs, auxquels les Chimistes ont coutume de donner le nom de *métaux lunaires*; ils sont de même indissolubles dans l'acide vitriolique, à moins qu'il ne soit bouillant & concentré. On ne doit donc pas s'étonner, s'il ne se trouve dans la Nature, & particulièrement dans les eaux, ni vitriol d'or, ni d'argent, ni de plomb, ni d'étain; le fer & le cuivre sont les seuls que l'acide vitriolique puisse dissoudre aisément, & c'est ce qui fait que ces deux métaux, sur-tout le premier, se trouvent si communément dans les eaux. On a indiqué plus haut les moyens de reconnoître la présence de ces métaux, & d'en évaluer la quantité. Tout ce qu'on vient de dire des dissolutions métalliques par l'acide vitriolique, peut également s'appliquer à celles par l'acide marin; toutes ces dissolutions, à l'exception de celles du fer & du cuivre, se font avec beaucoup de difficulté, elles exigent même la plupart des manœuvres particulières que la Nature ne peut employer; tous les sels de cette section doivent donc être mis au nombre de ceux qui ne peuvent se rencontrer dans les eaux.

On ne connoît jusqu'à présent que trois alkalis dans le règne minéral, celui de la soude, l'alkali terreux, ou la terre calcaire, & la base du sel d'Epsom; je ne parle pas de la base de l'alun parce que sa nature n'est pas encore suffisamment déterminée, & qu'on ne voit pas d'ailleurs qu'elle se trouve bien communément dans les eaux. Ces trois alkalis combinés avec les deux acides proprement appelés *minéraux*, ne peuvent former que six espèces de sel, la sélénite, le sel de Glauber, le sel d'Epsom, le sel marin, le sel marin à base terreuse, le sel marin à base de sel d'Epsom: ces six sels sont ceux qui se trouvent communément dans les eaux, & c'est pour cette raison, comme je l'ai déjà dit, que j'ai examiné de préférence l'action que l'esprit-de-vin pouvoit avoir sur eux.

L'eau de mer est le résultat du lavage de toute la surface du globe; ce sont en quelque façon les rinçures du grand laboratoire de la Nature, on doit donc s'attendre à trouver réunis dans cette eau, tous les sels qui peuvent se rencontrer dans le règne minéral, & c'est ce qui arrive en effet: comme cette eau est la plus compliquée de toutes celles que j'ai eu occasion d'examiner, je l'ai choisie pour donner un exemple de l'application de l'esprit-de-vin à l'analyse des eaux minérales.

J'ai pris quarante livres d'eau de mer, qui avoit été puisée à la côte de Dieppe, à quatre lieues en mer, par un temps calme, je les ai fait évaporer lentement au bain-marie & au feu de lampe, dans une capsule de verre, que j'avois soin de remplir à mesure que l'eau s'évaporoit: jusqu'à plus de moitié de l'opération, il ne s'est montré ni terre, ni sélénite, ni sel; mais enfin, vers cette époque, il a commencé à se former une pellicule qu'il étoit aisé de reconnoître pour de la terre calcaire & de la sélénite; j'ai continué d'évaporer jusqu'à ce que les premiers vestiges de sel marin, commençassent à paroître; alors j'ai décanté, j'ai changé de capsule, j'ai mis soigneusement à part la terre & la sélénite, je l'ai lavée avec un peu d'eau distillée, pour la dépouiller de toutes parties salines; enfin lorsqu'elle a été bien sèche, je l'ai portée à la balance, & j'ai trouvé qu'elle pesoit 4 gros 56 grains.

Je placerai ici une observation qui m'a conduit à séparer d'une façon mécanique, la terre calcaire d'avec la sélénite. La première se dépose sous forme pulvérulente, tandis qu'au contraire la sélénite cristallise en petites aiguilles à six pans, presque imperceptibles, qui se réunissent & se confondent, il arrive de cette différence de configuration, que si l'on lave avec de l'esprit-de-vin, un mélange de terre & de sélénite, qu'on agite un peu rapidement la liqueur, & qu'après l'avoir laissé reposer pendant quelques minutes, on la décante encore trouble, toute la sélénite reste dans le fond du vase, tandis que la terre plus divisée reste nageante dans l'esprit-de-vin, & ne se dépose que dans un intervalle de temps beaucoup plus



plus long; cette première séparation ne doit pas être regardée comme scrupuleusement exacte, & il reste presque toujours une portion de sélénite mêlée avec la terre; mais il est aisé de la séparer par une seconde opération, ainsi qu'on le verra dans un moment.

Lorsque la terre calcaire & la sélénite ont été séparées; ainsi que je viens de l'exposer, j'ai continué d'évaporer; d'abord j'ai obtenu de beaux cristaux de sel marin, mais sur la fin de l'opération, la cristallisation est devenue confuse, & les sels se sont trouvés imprégnés d'une eau-mère épaisse & visqueuse, & ce n'est qu'avec peine que j'ai pu évaporer jusqu'à siccité; j'y suis cependant parvenu, & le résidu que j'ai obtenu, s'est trouvé peser un peu plus de douze onces; j'ai pris toute cette masse saline & je l'ai mise dans un matras, j'ai passé dessus de bon esprit-de-vin froid; ce menstrue a acquis une couleur jaunâtre assez marquée, il a dissout toute la substance visqueuse, & il n'est resté qu'une masse saline d'une très-grande blancheur: j'ai reconnu depuis que cet esprit-de-vin n'avoit attaqué que l'eau-mère du sel marin, autrement dit le sel marin à base terreuse.

La masse saline resséchée ensuite de nouveau, ne pesoit plus que dix onces deux gros.

Cette première séparation faite, j'ai pris un mélange de deux parties d'esprit de-vin & d'une d'eau, je l'ai versé sur la substance saline, & j'ai fait chauffer fortement, presque tout s'est dissout, mais ayant laissé refroidir; il s'est précipité une poudre blanche, qui n'étoit autre chose que du sel de Glauber & du sel d'Epſom: cette poudre pesoit quatre gros vingt-six grains.

Il s'agissoit de savoir si la séparation des sels, ainsi faite, étoit rigoureusement exacte, & s'il n'en restoit pas encore quelques-uns de mélangés les uns avec les autres; pour cet effet, j'ai examiné d'abord la sélénite que j'avois séparée mécaniquement de la terre, & je l'ai trouvée absolument pure, sans mélange & parfaitement analogue à la pierre à plâtre & à toutes les autres sélénites qui se rencontrent dans

la Nature ; quant à la portion pulvérulente que j'avois obtenue par décantation , j'y ai versé de l'esprit-de-vin , rendu acidule par le moyen d'une petite portion d'acide nitreux légèrement fumant ; cette liqueur a formé un nitre à base terreuse ordinaire , qui s'est dissout dans l'esprit-de-vin fumeant , & il m'est resté en outre quelques portions de matière insoluble que j'ai reconnue pour être encore de la sélénite.

Il est aisé de voir que l'usage de l'esprit-de-vin dans cette opération , est préférable à celui de l'eau distillée. On fait , en effet , que la sélénite est soluble dans l'eau , sur-tout dans l'eau acidule , tandis qu'elle ne l'est point dans l'esprit-de-vin défilé.

J'ai ensuite remis en évaporation , à un feu très-lent , toute la portion que j'avois mise en dissolution par un mélange de deux parties d'eau & d'une d'esprit-de-vin. On a vu plus haut que cette dissolution ne devoit contenir que du sel marin ; cependant , comme j'avois observé qu'en versant sur cette solution quelques gouttes d'alkali fixe en *deliquium* , il se faisoit un précipité terreux blanc ; j'ai cru devoir rechercher la cause de cet effet , & m'assurer s'il tenoit à l'essence même du sel marin , ou à un sel à base terreuse mélangé avec lui. Cet examen me paroissoit d'autant plus intéressant , qu'il pouvoit jeter quelque lumière sur une question qui a divisé deux Savans célèbres , M. du Hamel & M. Pott. En conséquence , j'ai séparé en douze fractions le sel qui s'est formé par la cristallisation , je les ai mises chacune à part dans des flacons différens , & j'ai remarqué que les premières portions qui avoient été cristallisées étoient d'une salure agréable , mais qu'à mesure que l'évaporation s'avançoit , le sel devenoit de plus en plus âcre & amer ; à la fin j'ai obtenu un sel qui ne cristallisoit plus en cubes , mais d'une façon assez irrégulière ; il pesoit une once juste. J'ai fait dissoudre dans douze verres une égale portion de chacune de ces fractions de sel dans de l'eau distillée ; après quoi j'ai versé dans chaque verre quelques gouttes d'alkali fixe purifié ; à peine y a-t-il eu de précipitation sensible dans le premier numéro ; mais à mesure qu'on approchoit des derniers , la précipitation devenoit plus abon-

dante; de sorte qu'il a été démontré à mes yeux que l'amertume & l'âcreté ne venoient uniquement que d'une portion de sel marin à base terreuse, qui se combinait avec les cristaux de sel marin. Je ferai voir dans un autre Mémoire, que cette terre n'est pas la terre calcaire ordinaire; aussi ce sel marin à base terreuse, diffère-t-il essentiellement du sel marin à base terreuse, notamment par la propriété de cristalliser aisément & d'être indissoluble dans l'esprit-de-vin.

Il me restait ensuite à examiner la portion pulvérulente de sel qui s'étoit déposé au fond du mélange de deux parties d'esprit-de-vin & d'une d'eau, à mesure que la liqueur s'étoit refroidie; j'ai reconnu que ce n'étoit autre chose que du sel de Glauber, que j'ai obtenu en très-beaux cristaux, & un peu de sel d'Epsom; le tout pesoit 4 gros 26 grains.

Enfin, j'ai versé, dans un alambic de verre d'une seule pièce, l'esprit-de-vin qui avoit servi à dissoudre les sels à base terreuse, je l'ai bouché avec un bouchon de cristal, & j'ai distillé avec un appareil de vaisseaux enfilés à la façon de Glauber; l'esprit-de-vin est passé pur sans huile ni bitume.

Il m'est resté au fond de l'alambic une eau-mère, qui mise dans une capsule, m'a donné, par la seule évaporation au bain-marie, de beau sel marin à base terreuse ordinaire, en cristaux confus & bien secs; il pesoit *une once cinq gros dix grains*.

On trouvera, en rapprochant les résultats rapportés ci-dessus, que l'eau-de-mer contient:

	Pour 40 livres d'eau de mer.		Pour chaque liv. d'eau de mer.
1.° Terre calcaire soluble dans les acides, & qui paroît ne pas différer de la terre calcaire commune.	4. 56		8 $\frac{5}{8}$
2.° Sélénite ou sel gypseux.			
	onces	gros grains.	gros. grains.
Sel marin à base d'alkali fixe de la soude . . . . .	8.	6. 32	1. 54 $\frac{4}{5}$
Sel de Glauber & sel d'Epsom . . . . .	"	4. 26	" 7 $\frac{17}{20}$
Sel marin à base de sel d'Epsom . . . . .	1	" 0	" 14 $\frac{3}{4}$
Sel marin, à base terreuse ordinaire, mêlé de sel marin à base de sel d'Epsom . . . . .	1.	5. 10	1. 23 $\frac{13}{23}$



*PREMIER MÉMOIRE*  
*SUR*  
*LA DESTRUCTION DU DIAMANT*  
*PAR LE FEU.*

Par M. L A V O I S I E R.

**L**A marche de l'expérience est si lente qu'un Physicien qui voudroit attendre pour publier le résultat de ses travaux qu'il en fût entièrement satisfait, risqueroit d'arriver au bout de sa carrière, sans avoir rempli la tâche qu'il s'étoit imposée & sans avoir rien fait pour les Sciences & pour la Société; il faut donc avoir le courage de donner des choses imparfaites, de renoncer au mérite d'avoir fait tout ce qu'on pouvoit faire, d'avoir dit tout ce qu'on pouvoit dire, enfin savoir sacrifier son amour propre au desir d'être utile & d'accélérer le progrès des Sciences.

Nous étions animés de ces principes, M.<sup>rs</sup> Macquer, Cadet & moi, lorsque nous annonçames à la Séance publique de cette Académie, du 29 Avril 1772, quelques observations singulières que nous avions faites sur le Diamant; il en résulta que la destruction du Diamant à l'air libre, opérée par le Grand Duc de Toscane, répétée depuis & confirmée par M.<sup>rs</sup> Darcet, Rouelle, Macquer & Roux, n'étoit pas une véritable volatilisation, comme on l'avoit conclu; que cette substance singulière, garantie du contact de l'air & sur-tout enveloppée de poudre de charbon, pouvoit supporter un degré de feu beaucoup plus violent que celui qui est nécessaire pour l'évaporer à l'air libre, sans rien perdre, ni de son poids ni de son poli. L'événement a justifié le motif qui nous avoit mis la plume à la main, puisque la publication de nos expériences a donné lieu à un excellent ouvrage de M.<sup>rs</sup> Rouelle & Darcet sur le même objet; mais

en même temps nous n'avions pas lieu de présumer qu'on nous feroit un crime dans cet ouvrage de l'empressement que nous avons témoigné, qu'on nous rendroit responsables des conséquences, peut-être un peu trop étendues, que les papiers publics avoient tirées de nos expériences; enfin qu'en confirmant de la manière la plus formelle les faits que nous avions avancés, on prendroit le ton de la critique, & qu'on auroit l'air de nous réfuter, en disant les mêmes choses que nous. Ces légères contradictions au surplus, ne font qu'une bien médiocre impression sur ceux qui n'ont véritablement en vue que l'avancement de la Science & qui ne courent point après la célébrité, mais après la vérité; la critique ne ralentit point leur zèle, ils écartent les mots & ne voient que les faits, ils ne répondent pas, mais ils continuent de marcher vers le but, & ils n'admirent pas moins leurs adversaires, lors même qu'ils ont sujet de se plaindre d'eux.

Comme le Mémoire que nous lûmes à l'Académie, le 29 Avril 1772, n'étoit qu'une simple annonce, & qu'il n'a paru que dans quelques ouvrages périodiques, je vais avant de passer aux faits nouveaux dont je me propose de faire part à l'Académie, en rapporter ici la substance, & y joindre quelques détails historiques sur les expériences qui l'ont précédé ou qui l'ont suivi; on ne doit pas perdre de vue que le premier Mémoire étoit le fruit d'un travail commun entre M.<sup>rs</sup> Macquer, Cadet & moi: une partie des expériences dont je vais rendre compte aujourd'hui, ont encore été faites en société avec eux; pour leur rendre ce que je leur dois, j'avertirai dans la suite de ce Mémoire des expériences qui me sont propres, & je nommerai dans les autres, ceux qui ont bien voulu y concourir.

De tout temps les hommes ont attaché l'idée de perfection à tout ce qui étoit rare & précieux, & ils se sont persuadés que ce qui étoit cher, hors de leur portée & difficile à obtenir, devoit réunir les plus rares propriétés; de-là sans doute les prodiges attribués à la pierre philosophale & à l'or potable, de-là les merveilles & les fables des Alchimistes

sur la Médecine universelle. Les pierres précieuses ont également partagé cet enthousiasme, & il n'y a pas encore cent ans qu'on leur attribuoit aussi leurs prodiges. Parmi les Médecins, les uns les administroient intérieurement dans certaines maladies & les faisoient entrer dans les formules de leurs dispensaires; d'autres se persuadoient qu'il suffisoit de les porter en bagues, en amulettes, &c. & ils s'en promettoient des effets singuliers, dans l'économie animale. La plupart des Physiciens en devançant leur siècle en ont partagé plus ou moins les préjugés; Boyle lui-même, le célèbre Boyle, attribuoit comme ses contemporains des vertus médicinales aux pierres précieuses, & il a tenté, même dans son *Traité de l'Origine & des Vertus des pierres précieuses*, de donner des raisons physiques des propriétés qu'on leur supposoit. Le point d'après lequel il est parti & qu'il a cherché principalement à établir, c'est que les pierres précieuses, les diamans même ont des émanations, une atmosphère; mais tout ce qu'il rapporte à cet égard ne prouve autre chose, sinon que le diamant est électrique comme un grand nombre de corps de la Nature, & qu'il est quelquefois phosphorique. Quoique Boyle n'ait pas publié d'expériences qui puissent le faire regarder comme l'auteur de la découverte de l'évaporation du diamant, qui va m'occuper dans ce Mémoire, il avance cependant, dans le *Traité* que je viens de citer, qu'il est parvenu à obtenir en un instant, d'un grand nombre de pierres transparentes des vapeurs très-âcres & très-abondantes; du reste, il ne s'explique, ni sur la nature des pierres précieuses qu'il a employées, ni sur les circonstances de l'expérience, ni enfin sur l'espèce de feu dont il s'est servi & on ignore entièrement si c'est celui des fourneaux ou celui des verres & miroirs brûlans.

C'est donc aux expériences du Grand Duc de Toscane, depuis Empereur sous le nom de *François I.<sup>er</sup>*, qu'on doit rapporter la découverte de l'évaporation du diamant: comme je n'ai point entre les mains les ouvrages originaux dans lesquels ces expériences sont rapportées; je me contenterai

de copier littéralement ici la remarque ajoutée au *Traité de l'Origine des pierres* de M. Henckel, par le savant éditeur de cet ouvrage, M. le Baron d'Holbach. *Voyez la Pyritologie d'Henckel, page 413.*

« L'Empereur François I.<sup>er</sup> aujourd'hui régnant, dont l'amour pour les Sciences & l'Histoire Naturelle est assez « connu, a fait faire sur les diamans des expériences qu'il « n'étoit possible qu'à un Souverain de tenter. Il fit mettre « pour environ six mille florins de diamans & de rubis dans « des vaisseaux ou des creusets de forme conique, que l'on « tint pendant vingt-quatre heures dans le feu le plus violent. « Lorsqu'au bout de ce temps, on vint à ouvrir ces vaisseaux, « on trouva que les rubis n'avoient éprouvé aucune altération, « mais les diamans avoient entièrement disparu, au point « qu'on n'en trouva pas les moindres vestiges. Là-dessus on « exposa des rubis pendant trois fois vingt-quatre heures, au « feu le plus violent; mais on ne put y remarquer le moindre « changement, soit pour le poids, soit pour la couleur, soit « pour le poli & les angles que le lapidaire y avoit formés. «

Le même Prince fit répéter la même expérience sur plus « de vingt pierres précieuses de différentes espèces. De deux « en deux heures on avoit soin d'en retirer une du feu, pour « voir les changemens qu'elles éprouvoient, & sur-tout ceux « que subissoit le diamant; on s'aperçut qu'il perdoit d'abord « son poli, qu'ensuite il se feuilletoit, & enfin qu'il se dissipoit « entièrement. En vingt-quatre heures de temps l'émeraude s'étoit « fondue & attachée au creuset. Avant de mettre ces pierres « précieuses au feu, on avoit eu soin de les peser exactement, « & même d'en prendre les empreintes pour s'assurer des chan- « gemens qu'elles pourroient éprouver. Le rubis demeura tou- « jours inaltérable, & toujours le diamant se dissipa en entier. « *Voyez le magasin de Hambourg, tome XVIII, p. 164 & suiv.* «

Le Journal qui a pour titre, *Giornale de Letterati d'Italia*, « tome VIII, art. 9, rapporte les expériences qui ont été faites « à Florence, sur les pierres précieuses, par les ordres du grand « duc de Toscane, à l'aide d'un verre ardent de Tschirnhausen, «

» qui avoit deux tiers d'aune de Florence de diamètre, &  
 » dont le foyer étoit à deux de ces aunes & demie de distance;  
 » pour augmenter sa force, on y joignit encore une seconde  
 » lentille; par ces expériences, le diamant résista beaucoup  
 » moins à l'action des rayons du Soleil, que toutes les autres  
 » pierres précieuses. Au bout de trente secondes un diamant  
 » de deux denari un quart (environ vingt grains) perdit sa  
 » couleur, son éclat & sa transparence, devint blanchâtre comme  
 » une calcédoine; au bout de cinq minutes on remarqua qu'il  
 » se formoit des bulles à sa surface, & bientôt il se brisa en  
 » petits morceaux qui se répandoient çà & là, au point qu'on  
 » ne retrouva qu'un petit fragment triangulaire équilatéral, qui  
 » s'écrasa sous la lamè d'un couteau, & se réduisit en poudre  
 » si fine, qu'on ne put l'apercevoir sans le secours du microscop.  
 » En un mot, les diamans sur lesquels on fit ces expériences ont toujours commencé par se gercer, s'éclater, & ont  
 » fini par disparaître entièrement: mais ces effets ont toujours  
 » été en proportion de la grosseur des diamans qu'on mettoit en  
 » expérience, parce qu'ils commençoient par diminuer de  
 » volume, par les petits éclats qui se détachent de leur  
 » surface; on ne put remarquer dans ces diamans aucun commencement de fusion; on essaya d'y joindre du verre pour  
 » leur servir de fondant, mais il n'y eut aucun mélange entre  
 » le verre & le diamant; on essaya aussi inutilement d'y joindre  
 » de la cendre & du caillou pulvérisé; il ne se fit aucune  
 » combinaison, il en fut de même du soufre; le sel de tartre  
 » n'eut pas plus de succès; on y joignit tous les métaux, rien  
 » ne put les déterminer à entrer en fusion.

» Les rubis furent traités de la même manière, mais ils  
 » résistèrent beaucoup plus au feu que les diamans: lorsque ces  
 » pierres furent exposées au foyer du verre ardent, elles  
 » devinrent en peu de temps luisantes comme s'il y avoit eu  
 » un enduit de graisse à leur surface; ensuite, il s'y forma des  
 » bulles, & un rubis qui avoit été tenu pendant quarante-cinq  
 » minutes à ce foyer, perdit une grande partie de sa couleur;  
 » sa surface & ses angles s'arrondirent, & la pierre s'amollit au  
 point



point de prendre l'empreinte d'un cachet de jaspe qu'on pressa dessus, on y fit aussi des entailles avec la pointe d'un couteau ; mais ces pierres ne perdirent rien de leur poids , ni de leur forme.

Les rubis pulvérisés se réunirent promptement en une masse, mais il fut aisé de les séparer, ils s'étoient joints sans s'être unis.

Pour concentrer encore davantage les rayons du Soleil, on ajouta une troisième lentille, & l'on exposa les rubis en poudre à ce foyer ; au bout de quelques secondes ils se fondirent en une masse opaque de couleur de chair, leur surface vue au microscope parut rude & inégale, parce que toutes les parties de la poudre n'étoient point entrées également en fusion.

Le rubis mêlé avec du verre parut se fondre avec lui ; mais on s'aperçut au bout de quelque temps qu'il s'étoit déposé au fond du verre sans faire d'union avec lui.

Un rubis, après avoir été exposé au verre ardent pendant trente secondes, fut jeté dans de l'eau froide, il ne se brisa point en morceaux ; mais on aperçut dans son intérieur plusieurs fentes ou gerçures. Un autre qui avoit été tenu pendant six minutes à ce même foyer, éteint également dans l'eau, pressé avec un instrument de fer se cassa en plusieurs morceaux de figure irrégulière & indéterminée, qui étoient de différentes grandeurs. Les rubis ainsi traités, sur-tout ceux qui avoient été jetés dans l'eau, perdirent de leur dureté, & n'avoient plus que celle d'un cristal ; un gros rubis du poids de soixante-neuf denari trois quarts n'avoit perdu sa dureté naturelle qu'à sa surface, & non à son intérieur qui n'avoit point éprouvé l'action du feu.

L'émeraude exposée au verre ardent se fondit très-promptement & forma des bulles, mais auparavant elle étoit devenue blanche ; elle perdit de son poids par la fusion, & devint tendre & cassante ; les différens degrés de feu la firent passer par des nuances de couleurs différentes ; deux de ces pierres retirées du foyer où elles avoient été pendant quarante secondes, parurent d'abord d'une couleur de cendre ; lorsqu'on

les y laissoit plus long-temps, cette couleur se changeoit en un vert d'abord opaque & foncé, mais qui par la suite devenoit clair & luisant, comme celui de quelques turquoises : cette couleur se changea ensuite en un beau bleu céleste, clair & transparent ; en les tenant pendant environ une demi-heure dans le foyer, le côté exposé au Soleil devint d'une couleur de turquoise noirâtre & obscure, l'autre côté étoit plus clair. L'émeraude étoit toujours plus luisante lorsqu'on la retiroit subitement que lorsqu'on la retiroit peu-à-peu.

Une émeraude qui avoit été exposée peu de temps aux rayons du Soleil, eut à son milieu une tache noire entourée d'un cercle blanc. Les parties extérieures de la pierre avoient perdu par-là leur transparence, mais elles avoient conservé la couleur verte qui leur étoit naturelle. » *Voyez le Magasin de Hambourg, tome XVIII, pages 167 — 180.*

Tel étoit l'état de nos connoissances, lorsque M. Darcet, dans son second Mémoire sur l'action d'un feu violent, égal & continu sur différentes substances minérales, après avoir passé en revue une partie des corps de la Nature, se proposa de répéter les expériences faites à Florence & à Vienne sur le diamant, par les ordres du grand Duc, depuis Empereur sous le nom de François I.<sup>er</sup> Il mit deux petits diamans très-brillans, chacun dans un creuset de porcelaine ; l'un étoit parfaitement fermé, l'autre étoit percé de quelques petits trous dans son couvercle ; ces deux diamans ainsi disposés ayant été exposés à l'action du feu de porcelaine se dissipèrent entier, comme auroit fait la goutte d'eau la plus pure.

Quelque bien constaté que parût le fait de l'évaporation du diamant par le feu, l'Académie, lorsque M. Darcet lui présenta son Mémoire, desira que ces expériences fussent encore répétées ; M. Darcet entreprit en conséquence de nouvelles recherches qui firent l'objet d'un troisième Mémoire lû à l'Académie le 19 Août 1770. Il fit user les bords d'un creuset de porcelaine cuite, & le fit ajuster très-exactement avec son couvercle, pour en faire en quelque façon un vaisseau fermé ; il y plaça un diamant, puis il exposa ce vaisseau au fourneau de

porcelaine , & il l'y laissa pendant tout le temps de la cuite. Le creuset ayant été ouvert après l'opération , on n'y trouva pas le plus léger vestige du diamant qui y avoit été enfermé.

Non content de ces expériences , M. Darcet forma avec de la pâte de porcelaine une espèce de boîte sphérique qu'il divisa en deux hémisphères ; il fit un petit creux dans le milieu , & après y avoir placé un diamant , il rapprocha les deux hémisphères & les fouda avec de la barbotine , de sorte qu'il étoit impossible de s'apercevoir dans quel sens la boule avoit été ouverte. La boule ayant été exposée au feu de porcelaine en revint saine & entière ; M. Darcet en ayant fait l'ouverture avec précaution , tout l'intérieur de la petite chambre occupée par le diamant , se trouva enduite d'une espèce de fumée noire ; la surface du diamant lui-même étoit devenue terne , la couleur qui étoit noirâtre avant son exposition au feu étoit en partie dissipée , il étoit devenu plus blanc , il n'avoit pas perdu sensiblement de son poids , il étoit de la même dureté , enfin retaillé , il reprit le même éclat qu'il avoit avant l'opération.

Ce même diamant remis au feu comme la première fois s'y volatilisa presque en entier ; il ne resta que deux fragmens extrêmement petits , assez sensibles cependant pour qu'il ne fût pas possible de les méconnoître pour du diamant : un second diamant renfermé de la même façon , fondit & forma une espèce de vernis à l'endroit où il avoit été posé ; mais M.<sup>rs</sup> Darcet & Rouelle , ont depuis soupçonné qu'ils avoient été induits en erreur , ainsi que le Lapidaire , sur la nature de cette pierre , & ils ont soupçonné que c'étoit un péricot ; un quatrième diamant renfermé de même dans une boule de pâte de porcelaine s'est dissipé sans laisser la moindre trace ni la moindre fumée.

La ressource du fourneau de porcelaine ayant manqué à M. Darcet , il essaya les mêmes expériences dans un fourneau de coupelle ; il plaça plusieurs diamans à découvert , sous une moufle , dans de petites capsules de porcelaine , & en cinq heures d'un feu modéré il parvint à les volatiliser entièrement.

Cette façon d'opérer eut le mérite de laisser voir à M. Darcet ce qui se passoit dans ces expériences ; il tira à différentes reprises les coupelles de dessous la moufle , & il remarqua que le diamant en s'évaporant se feuillemoit d'une manière sensible.

Je ne rapporterai pas ici le détail des expériences de M. Darcet , sur les autres pierres précieuses , il me suffira de dire qu'aucune n'a la propriété singulière de s'évaporer comme le diamant ; que ni le rubis , ni la topaze orientale ne reçoivent aucune altération par le feu de porcelaine ; que l'hyacinthe n'y perd qu'un peu de sa couleur ; que les topazes de Saxe & du Brésil , ainsi que l'améthiste , y deviennent blanches , que l'émeraude y perd sa transparence , que le saphir oriental s'y ramollit , que le péridot y coule comme le verre , que le grenat y fond & forme une espèce d'écaille de fer , &c.

Depuis la lecture & la publication de ce Mémoire ; les mêmes expériences ont encore été répétées par de très-habiles Chimistes. M. Macquer , ayant mis en présence de plusieurs témoins , & notamment de M.<sup>rs</sup> Darcet , Bucquet , Rouelle & Godefroï , un diamant brillant sous la moufle , au bout de vingt minutes , on vit en ouvrant le devant du fourneau qu'il étoit brillant & comme phosphorique , mais il n'avoit encore rien perdu de son volume ; on referma la moufle , & on ne l'ouvrit qu'au bout de vingt autres minutes ; le diamant n'existoit plus , il étoit entièrement évaporé , & la capsule qui étoit d'un argile très-réfractaire , n'avoit ni la moindre altération , ni la moindre tache.

Cette flamme qui environne le diamant pendant le temps de sa destruction , qui a été remarquée pour la première fois dans l'expérience de M. Macquer , & qu'il a le premier communiquée au public , a été reconnue d'une manière beaucoup plus sensible encore dans l'expérience que fit M. Roux aux Écoles de Médecine , en présence de M. de Sartine , sur un diamant beaucoup plus gros.

L'évaporation du diamant reçut encore un dernier degré d'authenticité , par les nouvelles expériences que firent M.<sup>rs</sup>

Darcet & Rouelle le 16 Août 1771, en présence de l'Assemblée la plus imposante & la plus respectable. Ils placèrent trois diamans sur autant de petites capsules de pâte de porcelaine, & les exposèrent sous une moufle en les échauffant par degrés; ils avoient ménagé une ouverture pour les observer à chaque instant: d'abord les diamans & les capsules commencèrent à rougir; les uns & les autres étoient d'un rouge mat, mais bientôt après la couleur rouge des diamans devint beaucoup plus resplendissante & se distinguoit très-bien de celle de la capsule. Insensiblement, les diamans parurent diminuer; on en laissa un d'entr'eux s'évaporer en entier, on retira les deux autres avant qu'ils fussent entièrement dissipés, mais il ne restoit plus qu'une très-petite fraction du poids total.

Ces expériences n'étoient que la répétition de ce qui avoit été déjà fait, & de ce qu'avoit observé M. Darcet lui-même, tant au fourneau de porcelaine, que par le feu ordinaire des fourneaux chimiques; une circonstance particulière fit répéter la même expérience sous une nouvelle forme. M. Leblanc joaillier très-connu, persuadé que l'évaporation du diamant tenoit à l'action de l'air, avoit fourni le même jour, & pour la même expérience, un diamant qui lui appartenoit; mais il avoit demandé qu'il fût environné d'une pâte faite avec de la poudre de charbon & de la craie, que le tout fût mis dans un petit creuset d'Allemagne, recouvert avec une petite couche de craie détrempée; enfin, que le creuset, & ce qu'il contenoit fussent desséchés par le moyen d'un feu très-lent: tout cet appareil préparé comme M. Leblanc l'avoit désiré, ayant été placé sous la même moufle que ci-dessus, & avec les mêmes diamans, le feu fut soutenu pendant près de trois heures; au bout de ce temps on retira le creuset, on le laissa parfaitement refroidir; après quoi l'ayant ouvert, on n'y trouva plus qu'une espèce de chaux blanche médiocrement solide, sans poussière de charbon; quant au diamant, il étoit entièrement disparu, & on ne retrouva plus que l'empreinte qu'il avoit formée dans la craie; on porta l'attention jusqu'à laver exactement cette craie, jusqu'à la

faire dissoudre dans l'acide nitreux, sans qu'on pût y retrouver le moindre atome du diamant.

La découverte de l'évaporation du diamant, en faisant connoître aux Chimistes un fait presque incroyable, leur laissoit encore une vaste carrière à remplir; en effet, l'évaporation du diamant, se faisoit-elle par une véritable réduction de cette substance en vapeurs; en un mot, pouvoit-on la regarder comme une véritable volatilisation? ou bien étoit-ce une espèce de combustion, semblable à celle que l'on remarque dans le phosphore & dans quelques autres substances? Ou enfin n'étoit-ce pas plutôt une espèce de décrépitation, une division extrême des parties du diamant, occasionnée par le contact d'un air froid, une volatilisation par trusion, pour me servir de l'expression de quelques Chimistes?

La configuration de quelques diamans qui semblent composés de lames appliquées les unes sur les autres, comme l'observe le traducteur du *Traité des pierres* de Théophraste, & les expériences faites à Florence, au verre ardent, sembloient favoriser cette dernière opinion; mais elle ne s'accordoit pas avec l'expérience de la volatilisation des diamans enveloppés dans la craie & le charbon en poudre; elle étoit contredite d'ailleurs par le fait rapporté par Boyle, puisque les vapeurs âcres & pénétrantes qu'il avoit observées, ne pouvoient s'expliquer que dans l'hypothèse de la volatilisation: d'un autre côté l'observation singulière faite par M. Macquer, & depuis par M.<sup>rs</sup> Roux, Darcet & Rouelle, cette espèce d'auréole ou de flamme qu'ils avoient remarquée autour du diamant pendant sa destruction, sembloit annoncer une combustion; mais on pouvoit lui opposer l'opération de M. Darcet, faite dans des boules de pâte de porcelaine; les circonstances de cette évaporation sembloient exclure toute idée de combustion & de trusion, & ramener le phénomène à l'effet d'une volatilisation ordinaire.

Ces incertitudes ne pouvoient être levées que par de nouvelles expériences; je communiquai à M.<sup>rs</sup> Macquer & Cadet le projet où j'étois de les suivre, je leur demandai leurs conseils, je les priai de vouloir bien permettre qu'elles

fussent faites de concert, & nous nous assemblâmes à cet effet dans le laboratoire de M. Cadet.

Notre première idée fut de tenter l'évaporation du diamant dans les vaisseaux fermés, c'est-à-dire, de le distiller ou de le sublimer : nous avions d'autant plus lieu de compter sur le succès de cette expérience, que le degré de feu nécessaire pour évaporer le diamant à l'air libre, est fort inférieur à celui qu'on emploie pour la formation du phosphore de Kunkel; nous établîmes en conséquence un appareil à peu-près semblable à celui dont on se sert pour ce dernier. Dix-neuf grains  $\frac{5}{8}$  de diamant, poids de marc, furent introduits dans une petite cornue de grès enduite de terre à l'extérieur; les plus gros de ces diamans pesoient demi-grain; il y en avoit de beaucoup plus petits, & les plus fins n'étoient même, à proprement parler, que de la poudre grossière de diamans : la cornue fut adaptée à un récipient de verre, & y fut exactement lutée avec du lut gras (on espéroit qu'en rafraîchissant les jointures, on pourroit les défendre du trop grand effet de la chaleur); enfin on avoit ménagé au matras de verre, qui servoit de récipient, un petit trou pour donner issue à l'air contenu dans les vaisseaux, & aux vapeurs même, en supposant qu'il s'en échappât de trop élastiques; la cornue ayant été placée dans le fourneau, on échauffa d'abord lentement, on augmenta insensiblement la chaleur, & on donna ensuite trois heures d'un feu très-violent. Au bout de ce temps, on crut devoir laisser refroidir les vaisseaux, on les déluta; & on ne trouva dans le récipient qu'un peu de vapeurs aqueuses fournies par la décomposition du lut; car malgré les précautions qu'on avoit prises, il avoit été ramolli, & comme en partie brûlé; par rapport à la cornue, elle étoit saine & entière, en la secouant on entendoit encore les diamans sonner dans son intérieur, & en la retournant on les vit tomber à peu-près tels qu'ils y avoient été introduits; ils étoient seulement presque tous dépolis, leur surface étoit couverte d'un enduit brun-noir, & la cornue se trouvoit dans son intérieur enduite d'une couche à peu-près semblable.

Les diamans reportés à la balance ne se sont plus trouvés peser, après avoir subi cette épreuve, que 16 grains  $\frac{1}{2}$ , au lieu de 19 grains  $\frac{5}{8}$ ; mais ayant cassé la cornue, on s'est aperçu que quelques portions de la poudre de diamans étoit demeurée au fond de la cornue, & qu'elle y étoit adhérente, au moyen, sans doute, de quelques parcelles de sable & de terre, que la violence du feu avoit ramollies, & comme préparées à la fusion; cette portion de diamans pesoit environ  $\frac{3}{4}$  de grains, d'où l'on a conclu que la diminution de poids que les diamans avoient éprouvée dans cette opération, étoit de 2 grains  $\frac{2}{3}$ , c'est-à-dire, de près d'un septième de leur poids.

Le feu, dans cette première expérience, avoit été beaucoup plus violent & beaucoup plus long-temps continué qu'il n'étoit nécessaire pour l'évaporation du diamant à l'air libre, & il en résultoit déjà que le défaut de contact de l'air retardoit l'évaporation du diamant; il nous paroissoit même assez probable que nous n'avions eu de diminution de poids, qu'en raison de la quantité d'air contenue dans la capacité des vaisseaux,

Pendant que nous étions occupés de cette expérience; M. Maillard, habile joaillier, persuadé, comme la plupart de ses confrères, que le diamant ne s'évaporoit qu'autant qu'il avoit le contact de l'air libre, proposa avec un zèle digne de la reconnaissance des Savans, de soumettre trois diamans qu'il avoit apportés, à telle expérience qu'on jugeroit à propos; il consentoit qu'ils fussent tourmentés par un feu aussi violent, & aussi long-temps continué qu'on voudroit, pourvu qu'on lui permit de les garantir du contact de l'air libre. M. Maillard fut chargé en conséquence de disposer lui-même ses diamans comme il le jugeroit à propos. Il les plaça dans le fourneau d'une pipe à tabac remplie de charbon en poudre fine; cette pipe fut exactement fermée avec une petite lame de tole, recouverte & enveloppée de toutes parts, avec un lut composé de sable des fondeurs, détrempé avec de l'eau salée; enfin la pipe fut placée dans un creuset enduit de craie sèche, lequel étoit lui-même contenu dans deux autres creusets, abouchés l'un à l'autre.



à l'autre. Toutes les jointures étoient exactement lutées avec le même sable des fondeurs, détrempé avec de l'eau salée.

Le creuset ainsi disposé, après avoir été bien séché, fut placé dans un fourneau où il essuya pendant deux heures un feu très-vif; cependant, comme on s'aperçut que les barreaux de la grille étoient un peu ferrés; que d'ailleurs l'ouverture supérieure du creuset n'étoit pas assez grande, qu'elle n'étoit pas proportionnée au volume du fourneau, on craignit d'avoir manqué le but de l'expérience, faute d'avoir donné le plus grand feu possible; ces considérations engagèrent M. Macquer à nous proposer de continuer l'expérience dans le fourneau à vent dont il a donné la description & les proportions dans les Mémoires de l'Académie, & dans lequel il a fondu avec beaucoup de facilité la pierre à chaux, le gypse & d'autres substances très-réfractaires. La proposition ayant été acceptée, on commença par établir un grand feu dans le fourneau de M. Macquer, & lorsque le charbon fut bien embrasé, on y transporta le triple creuset rouge avec toutes les précautions convenables. On donna dans ce dernier fourneau deux heures du feu le plus violent; après quoi voyant que le creuset se ramolissoit, que des parties même du fourneau se préparoient à la fusion, on crut devoir arrêter & laisser refroidir: au bout de plusieurs heures, on tira le creuset du feu; il étoit rentré presque de toutes parts sur lui-même; la terre & le lut s'étoient fondues & ne formoient plus qu'une même masse vitreuse; la seule pipe s'étoit conservée au milieu de ce bain; elle n'avoit point été altérée; elle faisoit seulement corps avec les matières vitrifiées qui l'environnoient, & il ne fut possible de l'ouvrir qu'en cassant toute la masse: sitôt que la pipe fut fendue, on en vit sortir la poudre de charbon aussi noire qu'elle y avoit été mise, & les trois diamans avec leurs facettes & leur poli, comme avant l'opération, avec cette différence seulement qu'ils avoient une légère teinte de noir à leur surface. Ces diamans pesés ensemble & séparément, donnèrent

exactement le même poids qu'avant leur exposition au feu; repolis, ils se sont trouvés aussi beaux qu'auparavant.

Le feu, dans cette expérience, avoit été infiniment plus violent & beaucoup plus long-temps continué qu'il n'étoit nécessaire pour la destruction du diamant à l'air libre, d'où nous nous crûmes en droit de conclure que ce qu'on avoit regardé comme volatilisation n'en étoit pas véritablement une, & que si le diamant s'évaporoit à l'air, comme on l'avoit observé en Italie, en Allemagne & en France, ce phénomène devoit s'attribuer ou à une espèce de combustion, comme celle du charbon & de quelques autres substances qui résistent comme lui à la violence du feu dans les vaisseaux fermés, mais qui cèdent à l'air libre, à l'action d'un feu très-doux, ou bien que cet effet étoit dû à la réduction des diamans en une poudre très-fine, occasionnée par le contact de l'air. Cette dernière opinion étoit celle de M. Cadet, & c'étoit à la réquisition que nous avons ajouté cette alternative.

Un résultat si singulier & si peu attendu méritoit d'être observé plus d'une fois; M. Macquer voulut bien se charger en conséquence de répéter les mêmes expériences au fourneau de porcelaine dure de Sève; & pour ne laisser aucune équivoque, M. Maillard fut encore chargé de disposer lui-même l'appareil. Le diamant pesoit deux grains  $\frac{5}{64}$ ; il fut renfermé comme dans la précédente expérience dans une pipe à tabac, & lutée de la même manière; les deux creusets qui formoient la dernière enveloppe furent placés dans un grand creuset de terre à gazettes de porcelaine, laquelle étoit remplie de sablon pour contenir le tout.

Cet appareil a reçu pendant vingt-quatre heures, dans le fourneau de porcelaine de Sève, le plus grand degré de feu connu; lorsqu'ensuite, après un refroidissement parfait, les matières ont été retirées du fourneau, le premier creuset s'est trouvé absolument intact; partie du sablon qu'il contenoit s'étoit combinée avec le sable de fondeurs & avoit coulé avec lui, mais la partie qui n'avoit point été à portée de toucher au

sable de fondeur, étoit dans l'état de sablon pur, c'est-à-dire tel qu'on l'avoit mis au feu; les creusets de Hesse avoient été attaqués par la même cause, c'est-à-dire par le sable des fondeurs, & le supérieur étoit percé dans le fond; par rapport à la pipe elle n'étoit nullement endommagée, elle avoit été conservée par une espèce de bain de matières en fusion, qui l'avoient environnée sans la détruire; la plaque de tole qui la couvroit avoit été fondue, par la violence du feu, elle s'étoit convertie en grenaille de fer qui avoit coulé dans la poudre de charbon; enfin cette dernière avoit conservé sa couleur noire. Quant au diamant il se trouvoit engagé par un des côtés à-peu-près à moitié dans un morceau assez gros de grenaille de fer fondu; la partie apparente avoit conservé ses facettes & son poli, & le diamant paroissoit tel qu'il avoit été employé, à l'exception qu'il avoit pris une légère teinte de noir: d'après la figure & la grosseur que nous connoissons au diamant, nous avons lieu de croire qu'il étoit engagé de plus de moitié dans le fer; nous présumons en conséquence qu'il seroit difficile de le séparer; aussi ne fut-ce pas sans étonnement que nous nous aperçûmes qu'il n'étoit presque point adhérent: toute la portion que nous avons jugée engagée dans le fer, n'existoit plus, c'est-à-dire que la moitié du diamant avoit été détruite, & ce qui est de plus singulier, c'est que la partie restante n'étoit nullement altérée; cette portion éprouvée à la balance se trouva peser un grain  $\frac{9}{16}^{cs}$ , au lieu de deux grains  $\frac{13}{16}^{cs}$  qu'il pesoit auparavant; il avoit par conséquent perdu les quatre neuvièmes de son poids.

Quelles que soient les causes qui ont favorisé la destruction de la moitié du diamant dans cette expérience, soit qu'elle soit due à son évaporation ou à sa scorification avec le fer, toujours est-il certain que l'autre moitié a supporté pendant vingt-quatre heures l'extrême violence du feu, sans en avoir été sensiblement altérée, & cette circonstance nous confirma encore dans l'opinion que nous avons prise d'après l'expérience précédente, que l'évaporation du diamant à l'air libre n'étoit point une véritable volatilisation.

L'embarras étoit d'expliquer comment en opérant dans des circonstances à-peu-près semblables, M. Darcet & nous, c'est-à-dire les uns & les autres dans des vaisseaux que nous regardions comme exactement fermés, nous avions pu obtenir des résultats si différens, & nous commençames à soupçonner que ces différences pouvoient tenir à la nature des vaisseaux. Pour nous mettre en état d'apprécier le mérite de cette conjecture; M. Macquer enferma dans plusieurs boules de pâte de porcelaine de la poudre de charbon, puis il les plaça dans le fourneau de porcelaine dure de Sève : lorsque la journée fut cuite, il retira les boules & les ouvrit, mais il n'y restoit plus aucun vestige de charbon, il étoit entièrement consumé, & l'intérieur de la boule étoit de la plus parfaite blancheur; on voyoit seulement dans la partie qui avoit regardé le bas du fourneau, un léger enduit vitreux, qui probablement avoit été formé par la fusion de la cendre du charbon.

L'inverse de cette expérience étoit de soumettre la poudre de charbon au même degré de feu, dans un vaisseau de porcelaine cuite, & c'est ce que M. Macquer n'a pas manqué d'essayer; la poudre de charbon a été placée dans un petit sucrier, garni de son couvercle & les jointures ont été lutées avec de l'argile; quoique le charbon dans cette expérience, ait essuyé le même degré de feu que dans les précédentes, il n'a paru avoir reçu aucune espèce d'altération, & il s'est trouvé après l'opération dans le même état qu'auparavant.

Ces expériences nous portèrent à penser que la pâte de porcelaine étoit une substance plus poreuse qu'on ne pensoit, qu'elle ne défendoit pas les corps qu'elle renfermoit du contact de l'air extérieur, & qu'elle n'en empêchoit pas la combustion; que ce n'étoit qu'autant qu'elle approchoit de son dernier degré de cuisson, qu'on pouvoit la regarder comme susceptible de former des vaisseaux inaccessibles à l'air, mais que le feu nécessaire pour l'amener à ce point, étoit bien supérieur à celui nécessaire pour l'évaporation des diamans, & la combustion du charbon; enfin nous crumes pouvoir aller jusqu'à conclure que M. Darcet, dans les expériences qu'il avoit

faites dans des boules de pâte de porcelaine, n'avoit point opéré dans des vaisseaux exactement fermés, & nous annonçames qu'il étoit à désirer que les expériences fussent répétées avec de nouvelles précautions.

Pendant que M. Macquer s'occupoit de ces expériences; M. Mitouard, Démonstrateur en Chimie & en Pharmacie de Paris, se préparoit à répéter toutes celles dont nous venons de rendre compte, en en variant les circonstances, & il se proposoit d'y ajouter tout ce qui pouvoit contribuer à les rendre plus concluantes. De trois diamans destinés à recevoir l'extrême violence du feu, il introduisit l'un dans une pipe à tabac remplie de charbon en poudre, un second dans une pipe remplie de craie, un troisième, dans une pipe entièrement vide; enfin ces pipes furent fermées à peu-près de la même manière que dans l'expérience de M. Maillard, & elles furent renfermées dans plusieurs creusets placés les uns dans les autres.

Ces trois appareils ainsi disposés, furent placés ensemble dans le fourneau de M. Macquer, dont il a été question plus haut, & M. Mitouard même y avoit ajouté une très-grande longueur de tuyau; enfin le feu fut poussé pendant deux heures & demie à une extrême violence, & supérieure même à celle que nous avions obtenue dans nos précédentes expériences. Lorsqu'après le refroidissement total, il fut question de retirer les creusets, ils se trouvèrent tellement fondus & déformés, qu'ils ne faisoient plus, avec le lut, qu'une seule masse vitreuse: chacun de ces creusets ayant été cassé, on reconnut 1.<sup>o</sup> que le diamant qui avoit été placé dans de la poudre de charbon, n'avoit rien perdu ni de son poids ni de son poli. 2.<sup>o</sup> Que celui qui avoit été renfermé dans de la craie avoit perdu un peu plus d'un cinquième de son poids, qu'il avoit été entièrement dépoli, que ses angles étoient émoussés; enfin qu'il étoit recouvert d'une espèce de croûte comme les diamans bruts. 3.<sup>o</sup> Que le diamant qui avoit été exposé au feu seul dans la pipe & sans intermède, avoit perdu également près d'un cinquième de son

poids; que sa couleur & son poli avoient été considérablement altérés, & ce qui est très-remarquable, qu'il étoit d'un noir de jayet.

Il étoit possible, à la rigueur, que la différence de ces résultats tînt à des différences dans la nature du diamant, & M. Mitouard crut devoir s'attacher à lever toute équivoque à cet égard; pour y parvenir, il plaça les trois mêmes diamans qu'il avoit employés précédemment dans trois appareils semblables, en changeant seulement les intermédiaires; le diamant qui avoit été mis dans de la poudre de charbon, fut environné de poudre de corne de cerf calcinée; celui qui avoit été environné de craie, fut placé dans de la poudre de charbon; enfin, celui qui avoit éprouvé l'action du feu seul dans une pipe, sans intermède, fut placé dans du verre en poudre; tous ces diamans furent soumis à l'action du même feu pendant deux heures un quart; & voici ce qu'on observa: le diamant enfermé dans de la corne de cerf calcinée, étoit diminué d'un vingtième de son poids; celui qui avoit été placé dans la poudre de charbon, n'avoit subi nulle altération; enfin celui qui avoit été enfermé dans de la poudre de verre, étoit disparu entièrement, & il ne restoit plus dans le creuset qu'un verre d'un jaune foncé.

M. Mitouard a aussi répété, avec M. Cadet, l'expérience de la distillation du diamant à la cornue; ils se sont servi, dans cette expérience, du même fourneau & du même appareil que nous avons décrit ci-dessus; ils sont même parvenus à donner un degré de feu un peu plus fort, & ils l'ont plus long-temps continué: lorsqu'au bout de quatre heures ils ont déappareillé les vaisseaux, les diamans s'y sont retrouvés peu altérés en apparence, mais ils avoient souffert une diminution sensible de poids.

Le même Mémoire de M. Mitouard contient des détails sur l'évaporation du diamant à l'air libre, & il y a joint une suite d'expériences très-intéressantes sur l'action du feu, appliqué à un grand nombre de pierres précieuses; mais je ne puis me dispenser de faire remarquer en même temps que le degré

de feu auquel il les a exposés, n'ayant pas été poussé très-loin ni très-long-temps continué, on ne peut rien conclure de très-précis de cette partie de son Mémoire : je vais transcrire cependant ici les résultats qu'il a obtenus.

Les Rubis n'ont rien perdu de leur forme, de leur couleur ni de leur poli.

L'Amétiste a perdu toute sa couleur, & elle est devenue glaceuse.

De deux Saphirs, un est devenu obscur, l'autre a été presque entièrement décoloré.

L'Émeraude a fondu en partie & a perdu sa transparence.

La Vermeille au contraire a conservé sa transparence, mais sa surface a perdu un peu de son poli.

Enfin, le Grenat Syrien est devenu opaque.

De toutes ces expériences, M. Mitouard conclut que le diamant qui se dissipe si facilement à l'air libre, peut supporter, lorsqu'il est garanti du contact de l'air, un degré de feu très-violent sans se volatiliser, mais que la nature de l'intermède dont on l'environne n'est point indifférente; il va même jusqu'à soupçonner que le charbon n'opère plus efficacement sa conservation, qu'en raison du phlogistique qu'il contient; on fait, ajoute M. Mitouard, que cet effet a lieu à l'égard de l'antimoine & du zinc, qui ne sont plus susceptibles de brûler & de se détruire lorsqu'ils sont enfermés avec de la poudre de charbon.

Le Mémoire de M. Mitouard n'étoit point encore publié, lorsque M. Cadet communiqua au public le résultat particulier de ses expériences; M. de Saint-Vincent, dont le goût pour les Sciences est connu du Public, lui ayant remis douze karats de diamans bruts, il en choisit deux du poids de dix grains, poids de marc, qu'il plaça dans un petit creuset de l'espèce de ceux qu'on nomme *Tutte*; il le recouvrit avec un autre creuset, & en luta les bords avec de l'argile; cet appareil fut placé dans une forge, & le feu fut poussé si vivement, que la plaque du fourneau, qui étoit de fonte de fer, fut fondue: les deux diamans furent dépolis dans

cette opération, mais ils ne perdirent qu'un seizième de leur poids; la même expérience ayant été répétée dans un même creuset, en environnant les diamans de borax en poudre, ce dernier pénétra à travers les pores du creuset & se dissipa, mais les diamans demeurèrent en entier, ils étoient seulement un peu plus bruns.

Cette première expérience enhardit M. Cadet, & il risqua dans une seconde de soumettre à la fois, dans le même appareil, les douze karats de diamant qu'il avoit en sa possession, espérant obtenir sur cette quantité considérable un résultat plus sensible: le feu fut cette seconde fois plus violent que la première, & il fut animé par le vent de trois soufflets; non-seulement la plaque de la forge, mais la tuyère même du soufflet fondirent & recouvrirent tout le creuset; le couvercle de la tute en fut en partie scorifié, & on aperçut au creuset, qui lui servoit de couvercle, un trou qui perçoit d'outre en outre; mais on présuma que ce trou ne s'étoit formé qu'au moment où on étoit près de cesser le feu; quoi qu'il en soit, les diamans se trouvèrent diminués d'un vingt-quatrième de leur poids. Enfin, M. Cadet voulut essayer d'introduire, avec un soufflet, de l'air froid dans un vaisseau rouge & embrasé qui contenoit des diamans en évaporation, mais la grande dilatation que recevoit l'air lorsque quelques portions pénétroient dans le vaisseau, mettoit obstacle à la rentrée du nouvel air, & cette opération n'eut pas le succès que M. Cadet s'en promettoit.

Quelque multipliées que fussent les expériences dont on vient de rendre compte, il s'en falloit bien que tout fût dit encore sur cette matière, & il restoit d'abord un point important à éclaircir; dans presque toutes les expériences où le diamant avoit été exposé au feu sans intermède dans les vaisseaux fermés, il avoit constamment perdu quelque chose de son poids; il restoit à savoir si le même degré de feu soutenu beaucoup plus long-temps, opéreroit son évaporation totale; enfin dans les expériences même où le diamant avoit été environné de poudre de charbon, & dans lesquelles il n'avoit

reçu



reçu aucune altération; il restoit à examiner ce qui résulteroit d'un degré de feu plus violent, s'il étoit possible, & très-long-temps continué.

La résolution de ces différentes questions a été l'objet que se sont proposé M.<sup>rs</sup> Darcet & Rouelle dans un travail fait en commun & qu'ils ont publié dans le mois de Janvier 1773. Ils se sont servi de boules & de creusets de porcelaine de deux & trois lignes d'épaisseur dont la partie vide intérieure varioit depuis trois lignes jusqu'à un pouce de diamètre environ; ils n'étoient percés que d'un trou, dont le diamètre étoit au moins d'une ligne & au plus de quatre. Ce trou lorsque l'air des vaisseaux avoit été suffisamment dilaté se bouchoit avec une cheville de porcelaine usée dans le trou, & ils ont porté la précaution jusqu'à enduire ce même bouchon avec une matière vitreuse très-fusible & néanmoins d'une destruction difficile.

Il seroit trop long de donner ici tout le détail des expériences de M. Darcet & de M. Rouelle, tant elles sont multipliées, mais comme en même temps, elles sont extrêmement intéressantes & que je regretterois d'en omettre une seule, je prends le parti de présenter en forme de tableau toutes celles qui en sont susceptibles.

*TABLEAU DES EXPÉRIENCES SUR LE DIAMANT, contenues dans le Mémoire de M.<sup>rs</sup> Darcet & Rouelle.*

Numéro des Expériences.	Nombre & nature des Diamans.	Pesanteur des Diamans, poids de marc.	Durée du FEU.	OBSERVATIONS sur les Expériences.	RÉSULTAT des Expériences.
1.	3 diamans.	$\frac{1}{4}$ grain.	45 heures feu de porcelaine.	Sans intermède dans une boule de porcelaine cuite, du diamètre intérieur d'une balle de pistolet.	Ils ont perdu environ moitié de leur volume, ils sont devenus d'un blanc mat, & on distinguoit aisément les lames ou couches dont ils étoient formés.
2.	4 diamans.	.....	7 heures au fourneau à vent.	Mêmes circonstances.	Ils n'ont presque rien perdu de leur poids, mais ils étoient noirs, quoique l'intérieur de la boule fût blanc.

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

E e e e

Número des Expé- riences.	Nombre & nature des Diamans.	Pesanteur des Diamans, poids de marc.	Durée du FEU.	OBSERVATIONS sur les Expériences.	R É S U L T A T des Expériences.
3.	1 Diamant.	$\frac{2}{32}$ grain.	Six fois 24 h.	Mêmes circonstances.	A disparu entièrement.
4.	1 Diamant.	2 grains.	4 fois 24 h.	Sans intermède dans un creuset de porcelaine parfaitement bouché.	A perdu $\frac{1}{32}^{\circ}$ de son poids.
5.	Même Diamant qu'au n. <sup>o</sup> 4.	1 grain $\frac{31}{32}^{\circ}$	4 fois 24 h.	Sans intermède dans un petit creuset de porcelaine parfaitement bouché.	Est sorti noir, comme carié, vermoulu & en grande partie détruit.
6.	{ Diamant du Bresil. }	$\frac{21}{32}$ & $\frac{1}{80}$	11 heures au fourneau à vent.	Sans intermède.	A perdu $\frac{2}{80}^{\circ}$ de son poids.
7.	{ Diamant du Bresil. }	$\frac{5}{8}$	8 jours.	Sans intermède dans une boule de porcelaine cuite.	A disparu entièrement.
8.	{ 3 Diamans du Bresil. }	$\frac{3}{8}$ moins $\frac{1}{80}$	8 jours.	Sans intermède dans une boule de porcelaine cuite, & vernissée en dedans.	Ont disparus entièrement.
9.	1 Diamant.	1 grain $\frac{1}{32}$	45 heures du feu de porcelaine, & 7 heures du feu du fourneau à vent.	Dans une boule de porcelaine cuite de $\frac{1}{2}$ de pouce de diamètre intérieur remplie de poudre de corne de cerf calcinée.	A perdu $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{32}^{\circ}$ de son poids; il est sorti dépoli & comme égrisé; la boule de porcelaine n'étoit pas parfaitement cuite, mais fortement dégourdie.
10.	{ Même Diamant. }	$\frac{1}{2}$ grain & $\frac{1}{32}$	7 fois 24 h.	Dans une boule semblable dont la cavité étoit remplie de petites boules de porcelaine cuite.	Les petites boules de porcelaine avoient été mises pour faire le plein; le diamant après l'expérience ne pesoit plus qu'un huitième de grain.
11.	{ Diamant plat. }	.....	7 fois 24 h.	Dans une boule de porcelaine cuite remplie de pierre à fusil en poudre.	Le diamant a disparu entièrement.
12.	1 Diamant.	$\frac{9}{32}$ & $\frac{3}{80}$	11 heures de feu au fourneau à vent.	Mêmes circonstances.	Ne pesoit plus après l'expérience que $\frac{5}{8}$ & $\frac{1}{80}$ ; il étoit un peu jaunâtre.
13.	1 Diamant.	1 grain moins $\frac{5}{32}$ & $\frac{1}{80}$	Fourneau à vent.	Sans intermède dans une boule de pâte de porcelaine, qui n'avoit été que dégourdie, laquelle a été placée à l'entrée de la cheminée du fourneau à vent.	Est sorti terne & comme s'il étoit recouvert d'une pelure d'oignon; à perdu $\frac{4}{32}$ & $\frac{1}{80}$ ; le feu n'a pas été suffisant pour la cuire en porcelaine.
14.	1 Diamant.	$\frac{23}{32}$ & $\frac{1}{80}$	Fourneau à vent,	Sans intermède dans une boule de porcelaine cuite, à l'entrée de la cheminée du fourneau à vent.	A perdu $\frac{1}{80}$ de son poids.

Nombre des Expé- riences.	Nombre & nature des Diamans.	Pesanteur des Diamans, poids de marc.	Durée du FEU.	OBSERVATIONS sur les Expériences.	R É S U L T A T des Expériences.
15.	1 diamant du Bresil.	$\frac{17}{32}$ & $\frac{1}{30}$	36 heures.	Sans intermède dans une boule de pâte de porce- laine crue.	Le feu a suffi pour cuire la por- celaine, & le diamant a perdu moitié de son poids.
16.	idem.	$\frac{1}{2}$ grain & $\frac{1}{40}$ .	26 heures.	Mêmes circonstances.	Ce diamant a presque été évaporé en entier, il n'en est plus resté qu'un petit fragment terne.
17.	idem.	$\frac{15}{32}$ & $\frac{1}{80}$	11 h. de feu.	Sans intermède dans un creuset de Hesse bien bouché.	A perdu moitié de son poids.
18.	idem.	1 grain $\frac{1}{80}$ moins $\frac{1}{80}$	36 h. de feu.	Dans un creuset de pâte de gazettes.	A disparu entièrement.
22.	1 Diamant.	$\frac{3}{8}$ de grain.	45 h. de feu de porcelaine & 7 heures d'un fourneau à vent.	Dans une boule de porce- laine cuite, & dans de la poudre de charbon.	N'a pas diminué sensiblement de poids, a perdu un peu de son poli & est devenu louche.
23.	Même Diamant.	$\frac{1}{8}$ de grain.	huit fois 24 heures de feu.	Même circonstance, mais dans une boule de porce- laine cuite, de plus petit diamètre.	Est devenu noir, chauffé ensuite à l'air libre, il est redevenu blanc & s'est trouvé alors diminué des deux tiers de son poids, le charbon n'a point souffert.
24.	1 Diamant rose.	$\frac{1}{8}$ de grain.	Comme à l'expérience 22.	Dans une boule de porce- laine cuite de petit dia- mètre & dans de la poudre de charbon.	Il est sorti noir, mais il s'est blan- chi aisément en le chauffant à l'air libre; il a diminué visible- ment de poids & de volume; une partie du charbon avoit formé couverte sur l'intérieur de la boule de porcelaine.
25.	1 Diamant rose.	$\frac{11}{32}$	11 heures de feu au fourneau à vent.	Dans de la poudre de charbon, dans une boule de porcelaine dont le dia- mètre intérieur étoit de $\frac{1}{4}$ de pouces.	Le diamant n'a rien souffert, le charbon a été conservé.
26.	Diamant du Bresil.	$\frac{11}{32}$	Fourneau à vent.	Dans de la poudre de charbon, mais dans une boule de porcelaine sim- plement dégourdié.	Le charbon s'est conservé, le dia- mant a perdu $\frac{1}{8}$ de son poids.
27.	1 Diamant.	$\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{80}$	Fourneau à vent.	Dans une boule de porce- laine cuite & dans de la poudre de charbon.	Le charbon s'est conservé, le dia- mant a perdu $\frac{1}{32}$ & $\frac{1}{80}$ de son poids.

Numéro des Expé- riences.	Nombre & nature des Diamans.	Pesanteur des Diamans, poids de marc.	Durée du FEU.	OBSERVATIONS sur les Expériences.	R É S U L T A T des Expériences.
28.	3 Diamans du Bresil.	1 grain $\frac{7}{32}$ & $\frac{1}{80}$	Huit jours de feu.	Dans une boule de pâte de porcelaine, d'un diamètre intérieur d'une grosse balle de fusil, pleine de poudre de charbon.	Le charbon s'est bien conservé, & il ne s'est formé ni enduit, ni vernis noir, les diamans n'ont rien souffert & se sont retrouvés de même poids.

Indépendamment de ces expériences, le Mémoire de M.<sup>rs</sup> Darcet & Rouelle en contient encore trois autres qui ne sont pas moins intéressantes, ce sont les dix-neuvième, vingtième & vingt-unième, dont il n'a pas été possible de présenter le résultat dans le tableau précédent.

Ils ont construit un creuset de porcelaine, muni d'un couvercle à gorge rentrante, usé & cuit sur le creuset même; ils ont percé au-dessus de son bord quatre petits trous opposés ayant une direction horizontale & dont l'ouverture étoit au plus de trois quarts de ligne de diamètre, afin de donner accès à l'air extérieur; ils ont placé dans ce creuset deux diamans du Bresil du poids d'un grain & un huitième fort, & ils ont donné trois heures de bon feu sous la moufle: lorsque le creuset a été refroidi, il ne s'y est plus trouvé le moindre vestige du diamant, l'intérieur du creuset étoit blanc & lisse sans un atome de poussière.

Ils ont également répété l'expérience de l'évaporation des diamans sous la moufle, avec des précautions particulières, & ils ont observé, 1.<sup>o</sup> qu'ils paroissoient rouges & embrasés un peu avant que l'argent entrât en fusion; 2.<sup>o</sup> qu'on apercevoit sensiblement une flamme légère & ondulente, qui entouroit la surface du diamant pendant sa combustion; 3.<sup>o</sup> enfin que la poudre de diamant brûloit avec scintillation sans donner d'émanation sensible.

Il résulte de l'exposé fidèle que je viens de faire des dernières expériences de M.<sup>rs</sup> Darcet & Rouelle,

1.<sup>o</sup> Que le diamant qui se détruit en si peu de temps à l'air libre & par un degré de feu inférieur à celui nécessaire pour fondre l'argent, est au contraire un corps très-réfractaire lorsqu'on le garantit du contact de l'air.

2.<sup>o</sup> Qu'il peut même sans intermède & dans une boule de porcelaine cuite (*voyez la 2.<sup>e</sup> expérience*), soutenir sept heures du feu le plus violent, sans être sensiblement altéré.

3.<sup>o</sup> Que cependant cette extrême violence du feu continuée pendant plusieurs jours (*8.<sup>e</sup> expérience*), l'altère à la longue, lorsqu'il est sans intermède, en diminue sensiblement le poids & l'évapore enfin entièrement.

4.<sup>o</sup> Que ce même diamant, lorsqu'il est environné d'une suffisante quantité de poudre de charbon, devient tellement fixe qu'il peut résister pendant huit jours (*28.<sup>e</sup> expérience*) au feu du fourneau de porcelaine sans souffrir la moindre altération.

5.<sup>o</sup> Que lorsque l'intérieur des boules de porcelaine est d'un trop petit diamètre, & que le diamant ne peut pas être environné d'une quantité de poudre de charbon suffisante (*23.<sup>e</sup> expérience*), il n'est pas alors aussi fixe; mais que l'extrême violence du feu lui fait subir à la longue quelque altération.

6.<sup>o</sup> Que lorsque le diamant a été attaqué par le feu, quoiqu'environné de poudre de charbon, communément le charbon lui-même a subi quelque altération, de sorte qu'on peut regarder le degré de fixité du diamant comme à peu près égal à celui du charbon.

7.<sup>o</sup> Que le diamant réduit en vapeur passe à travers les boules & les creusets de la porcelaine, même la mieux cuite, lorsqu'ils sont rouges & embrasés, à moins qu'on n'aime mieux croire qu'il se fait jour à travers les jointures quelque exactement lutées qu'elles soient; mais que dans l'un & l'autre cas il en résulte toujours qu'on doit être en garde contre les expériences faites dans les vaisseaux de porcelaine, & qu'il est au moins permis de douter qu'ils fassent exactement l'office de vaisseaux fermés.

Ces conséquences sont une suite nécessaire des expériences de M.<sup>rs</sup> Darcet & Rouelle, & il est impossible qu'ils s'y refusent; cependant qu'on les compare avec celles qui terminent la courte annonce que nous avons lûe à l'Académie, M. Macquer, M. Cadet & moi, à la séance publique du 29 Avril 1772, & qui a été depuis imprimée dans quelques ouvrages périodiques, on verra qu'il s'en faut de bien peu qu'elles ne soient exactement les mêmes.

Si les papiers publics ont été plus loin, si la gazette de France a trop généralisé nos conséquences, pourquoi nous en rendroit-on responsables? Et de quel droit voudroit-on nous juger sur une pièce qui nous est étrangère, tandis que nos Mémoires existent & sont entre les mains du Public? mais je suppose encore qu'il se fût trouvé entre les résultats de M. Darcet & les nôtres des différences très-considérables, tout ce qu'il auroit été possible d'en conclure, c'est que la fixité des corps n'est que relative, & que tel qui résiste à un feu violent pendant trois heures cède à l'action du même feu continué pendant huit jours.

J'ai toujours entendu dire à M. Rouelle l'aîné, que le charbon étoit le corps le plus réfractaire, le plus fixe de la Nature; je ferai voir dans ce Mémoire que cette substance est non-seulement combustible, comme on le sait, mais qu'elle est encore à peu-près aussi volatile que le diamant. N'y auroit-il pas de l'injustice, parce que j'ai été à portée d'employer un agent plus fort, de taxer un Chimiste estimable, d'ignorance & de légèreté pour avoir avancé un fait exact en lui-même, c'est-à-dire relativement au degré de feu qu'il a employé, & qui ne se trouve démenti qu'à un degré de feu plus violent, tel que celui du verre ardent?

Je ne sais pourquoi je suis revenu sur cet article, dont j'avois résolu de ne plus parler; mais j'avoue qu'il m'a paru dur, à moi qui ai toujours honoré les talens de M.<sup>rs</sup> Rouelle, qui suis leur disciple & qui m'en fais gloire, de me voir attaqué directement par une critique amère qu'on a affecté de faire tomber exclusivement sur moi; je me flatte que ces

traits échappés de la plume de M. Darcet, ne sont que l'effet d'un premier mouvement; je crois d'ailleurs connoître assez M. Rouelle pour pouvoir assurer que la source n'en est pas dans son cœur: aussi je proteste, & je crois avoir prouvé qu'ils ne me laissent aucune impression, & ils ne m'empêcheront certainement pas de desirer de vivre avec des Savans que j'estime, & dont jusqu'à ce moment je n'avois éprouvé que des procédés honnêtes.

## SECONDE MÉMOIRE

SUR

### LA DESTRUCTION DU DIAMANT

*Au grand Verre brûlant de Tschirnausen, connu sous le nom de Lentille du Palais royal.*

Par M. LAVOISIER.

IL me reste après avoir exposé les expériences sur le Diamant, qui nous sont propres, à M. Macquer, à M. Cadet & à moi, & toutes les autres qui sont venues à ma connoissance, il me reste, dis-je, à rendre compte des phénomènes que cette substance singulière présente au foyer du grand Verre ardent de Tschirnausen, connu sous le nom de *Lentille du Palais royal*, & qui a été légué à l'Académie, par M. d'Ons-en-Bray.

Une partie des Expériences contenues dans ce Mémoire, sont extraites du Journal des expériences, faites au Jardin de l'Infante, que nous tenons en commun, M.<sup>rs</sup> Macquer, Cadet, Brisson & moi, & qui est dans ce moment sous les yeux de l'Académie: M. Baumé a été présent à quelques-unes & notamment à la neuvième; & M. du Fourni de Villiers, connu avantageusement de l'Académie, a bien voulu concourir aux neuf dernières.

La plupart des diamans qui ont servi dans ces expériences,

sont encore les mêmes qui avoient été donnés à M. Cadet, par M. de Saint-Vincent, & qui avoient déjà éprouvé l'action du feu dans des vaisseaux fermés.

#### PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

##### *Décrépitation du Diamant au foyer du verre brûlant.*

Un diamant du poids de 3 grains neuf seizièmes, poids de marc, a été exposé à l'effet du grand verre brûlant; l'ayant approché un peu trop brusquement du foyer, il a décrépité sur le champ avec violence, il s'est étonné & fendillé comme il arrive au cristal de roche, & il s'en est détaché plusieurs éclats, dont un particulièrement étoit très-visible à la vue simple: la plupart des autres n'étoient bien sensibles qu'à la loupe. On a retiré ce diamant presque sur le champ; en l'examinant au microscope, on a remarqué un grand nombre d'éclats qui étoient encore prêts à s'en détacher.

#### R É F L E X I O N S.

Cette expérience est la même que celle faite à Florence par les ordres du Grand Duc de Toscane, elle prouve que le diamant est susceptible de décrépitation lorsqu'on l'expose à l'action d'une chaleur trop vive & sur-tout lorsqu'il est en même temps rafraîchi par le contact d'un air froid.

#### DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

##### *Évaporation du diamant à l'air libre.*

Un diamant brut, du poids de 2 grains treize seizièmes, a été exposé au foyer du même verre sur une capsule de porcelaine dure de Séve; on l'a échauffé lentement & avec la plus grande précaution, & on est enfin parvenu à l'amener jusqu'au vrai foyer de la lentille sans décrépitation; bientôt il a paru rouge-blanc, & l'ayant retiré au bout de dix minutes, il avoit perdu trois quarts de grain & un trente-deuxième de son poids; il étoit terne, & vu à la loupe il paroïssoit criblé de trous.

#### TROISIÈME



## TROISIÈME EXPÉRIENCE.

*Autre évaporation du diamant à l'air libre.*

Le même diamant a été remis au foyer, d'abord sur un support de grès dur, tel qu'on l'emploie pour les pavés de Paris; ensuite sur un support de porcelaine, & il a donné les mêmes phénomènes: en vingt minutes environ, il a été totalement évaporé.

On avoit cru d'abord observer pendant cette expérience, une vapeur ou poussière légère qui s'élevoit du diamant, mais on a remarqué la même chose en présentant le grès seul au foyer, & on a conclu que cet effet tenoit sans doute au mouvement du courant d'air occasionné par la chaleur du foyer.

## QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

*Poudre de diamant à l'air libre sur un support de porcelaine.*

Un grain de poudre de diamant, mis dans une capsule de porcelaine & exposé au foyer du verre ardent, a paru d'abord répandre un peu de fumée; cette poudre a ensuite diminué peu-à-peu, & s'est enfin entièrement dissipée; il n'est resté qu'une tache jaune vitrifiée sur la capsule de porcelaine, à l'endroit qui avoit été couvert par la poudre de diamant.

## CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

*Poudre de diamant à l'air libre sur un support de grès.*

Les phénomènes ont été exactement les mêmes que dans l'expérience précédente, & il est resté de même un enduit vitreux jaunâtre sur le grès.

## R É F L E X I O N S.

On ne doit pas conclure de cette expérience, non plus que de la précédente, que le diamant soit véritablement le  
*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.* F f f f

fondant de la porcelaine ou du grès, & qu'il soit susceptible de se vitrifier avec eux. Il est possible que cet effet dépende des matières étrangères qui se trouvent mêlées avec la poudre de diamant; ce corps très-dur ne se réduit pas facilement en poudre, & il attaque nécessairement les instrumens dont on se sert pour le diviser: il faudroit donc avoir recours à des moyens particuliers pour obtenir de la poudre de diamant très-pure, & on n'a pas cru que cette expérience fût assez intéressante pour devoir la porter plus loin.

Ces cinq premières expériences ne faisoient encore que confirmer ce qui avoit été déjà observé; mais il étoit question de découvrir ce que devenoit le diamant lorsqu'il s'évaporoit: en effet, parmi les corps volatils ou combustibles, il n'en est pas qui ne donnent, ou des vapeurs acides, comme le phosphore & le soufre, ou des émanations quelconques, fluides ou concrètes, mais susceptibles d'être rassemblées en employant des appareils convenables; il n'étoit possible de retenir celles émanées du diamant, qu'en opérant dans des vaisseaux fermés, & c'est le but que je me suis proposé dans les expériences qui suivent.

#### SIXIÈME EXPÉRIENCE.

*Évaporation du diamant dans une cornue, par la chaleur du verre ardent.*

##### *Préparation de l'expérience.*

J'ai fait exécuter dans une verrerie une cornue de verre blanc de trois pintes environ de capacité; j'ai fait pratiquer à son fond, dans la verrerie même, une ouverture ou grande tubulure de deux pouces & demi de diamètre, garnie d'un rebord, & j'y ai fait ajuster une virole de cuivre bien masticquée, avec un mastic dur & solide; enfin cette virole recevoit une platine de cuivre à vis qui fermoit très-exactement, au moyen de l'interposition d'un cuir. Tout étant

ainsi préparé, j'ai introduit, par cette ouverture inférieure, un piédestal de verre, surmonté d'une petite capsule de porcelaine dure, laquelle contenoit onze diamans pesant ensemble 15 grains forts, poids de marc; après quoi j'ai refermé la virole, & j'ai bouché assez légèrement le bec de la cornue, pour que la dilatation de l'air intérieur n'occasionnât pas de fracture; enfin j'ai présenté l'appareil, ainsi disposé, au foyer du verre ardent.

## E F F E T.

Pendant neuf minutes que les diamans ont été exposés au foyer de la lentille, on a jugé qu'il s'en élevoit une fumée sensible; j'ai vu très-distinctement un de ces diamans bouillonner, & jeter des vapeurs en dehors, mais il ne s'est rien condensé aux parois de la cornue; on n'a pas non plus senti d'odeur marquée au bec de ce même vase, si ce n'est celle du mastic qui s'échauffoit; enfin, au bout de neuf minutes, le mastic s'étant trouvé beaucoup plus ramolli que nous ne pensions, la virole s'est détachée par son propre poids, & le support de cristal, la capsule & les diamans sont tombés; ce qui a empêché de pousser plus loin l'expérience: deux des diamans même ont été perdus dans le sable du jardin de l'Infante, où se faisoit cette expérience, & cette circonstance a empêché de constater la diminution de poids qu'ils avoient éprouvée.

## R É F L E X I O N S.

Il est très-probable que l'espèce de fumée qu'on a remarquée dans cette expérience, tenoit à l'évaporation du mastic; on verra en effet qu'elle n'a eu lieu dans aucune des expériences qui suivent.

Cette expérience n'ayant point eu le succès que j'en attendois, j'ai eu recours au moyen qui suit.

F f f f ij

## SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

*Évaporation du diamant sous une cloche de verre plongée dans de l'eau.*

*Préparation de l'expérience.*

J'ai mis sur un tesson de porcelaine très-réfractaire creusé convenablement, neuf diamans du poids de 11 grains  $\frac{3}{8}$ ; le tesson a été placé sur un support de cristal, lequel a été lui-même assujetti au milieu d'une jatte de faïence émaillée, remplie d'eau distillée; l'appareil a été recouvert avec une cloche de cristal de six pouces & demi de diamètre; enfin, j'ai sucé l'air avec un tube de verre recourbé, pour faire monter l'eau à une hauteur convenable, & j'ai fait tomber sur les diamans, au travers de la cloche, le foyer du verre brûlant.

*E F F E T.*

On n'a observé dans cette expérience, ni vapeur ni fumée sensible; mais on a remarqué très-distinctement que le diamant qui étoit au centre du foyer, bouillonoit & jetoit des bulles; en quinze minutes il a diminué des trois quarts, & l'endroit du tesson de porcelaine, sur lequel il reposoit, a été creusé & vitrifié; enfin, en vingt minutes il a été entièrement évaporé; quelques minutes après nous étant aperçus que l'air de l'intérieur de la cloche étoit tellement dilaté, qu'il étoit près de passer par-dessous les bords, nous avons cru devoir cesser l'expérience.

Lorsque l'appareil a été suffisamment refroidi, nous avons levé la cloche avec précaution, & nous n'avons remarqué aucune odeur sensible; les gouttes de liqueur qui s'étoient attachées aux parois de la cloche, pendant le refroidissement, ne nous ont pas paru avoir aucun autre goût que celui de l'eau distillée; mais pour nous assurer plus particulièrement de leur nature, nous avons rincé cette cloche avec environ une

demi-once d'eau distillée, que nous avons mis soigneusement à part : nous avons de même rassemblé toute l'eau qui étoit dans la jatte ou cuvette, & nous avons réservé le tout pour en faire un examen scrupuleux.

Les huit diamans restans ne se sont plus trouvés peser que 7 grains  $\frac{1}{8}$ , poids de marc, au lieu de 11 grains  $\frac{3}{16}$ , quelques-uns étoient de couleur noire; d'autres étoient brunâtres; quelques-uns enfin étoient grisâtres, & avoient conservé une demi-transparence; tous étoient spongieux & caverneux comme des pierres de meulières & des pierres-ponces, & leur surface étoit remplie d'aspérités & d'inégalités; un seul étoit creusé en forme de calotte.

M. Macquer ayant eu la complaisance de se charger de les examiner au microscope, en porta lui-même le rapport sur notre journal d'expériences, & je vais le transcrire ici.

« Ces diamans vus au microscope avec une lentille foible, d'un pouce de foyer, paroissent singulièrement altérés, & « comme détruits en grande partie; la plupart étoient caverneux « comme des pains de fleur d'orange : un d'entr'eux paroissoit « feuilleté comme un spath; un autre étoit creusé dans son « intérieur, & le creux se voyoit à l'extérieur par une fente « longitudinale; deux de ces diamans, du nombre desquels « étoit celui qui avoit été creusé en calotte, étoient percés à jour; « aucun ne paroissoit décidément fondu & vitrifié, mais le « support de porcelaine, sur lequel ils avoient été placés, étoit « marqué de beaucoup de petites taches noirâtres & brillantes, « & ces taches vues au microscope étoient des pointes vraiment « vitrifiées, dont quelques-unes paroissoient même cavées : on « distinguoit encore sur la plupart des parcelles de diamant, « & le tout étoit entouré d'un cercle jaunâtre en forme de « simple tache ou maculature superficielle ».

### R É F L E X I O N S.

Il résulte de ces dernières observations, 1.<sup>o</sup> qu'il s'est détaché du diamant, pendant son évaporation, de petites

parcelles qui ont sauté à quelque distance ; 2.<sup>o</sup> qu'il est probable que ces petites parcelles de diamans ont servi de fondans à la porcelaine, qu'elles en ont procuré la vitrification & la fusion, puisque la porcelaine seule, & dans les endroits où elle n'avoit pas eu le contact des parcelles de diamans, n'a donné aucun signe de vitrification, & est demeurée dans le même état qu'elle étoit avant d'avoir été présentée au foyer.

#### HUITIÈME EXPÉRIENCE.

##### *Examen de l'eau distillée, employée dans la septième Expérience.*

L'eau qui avoit servi à rincer la cloche dans l'expérience précédente, a été soumise à toutes les épreuves qui ont paru les plus propres à déterminer la nature des substances étrangères qu'elle contenoit. On en a mis dans différens vases, & on a versé séparément dans chacun de la dissolution d'argent, de la dissolution de mercure & de l'alkali fixe, sans qu'aucun de ces mélanges y aient occasionné le moindre précipité ni le moindre louche ; enfin, on en a fait évaporer une portion dans une capsule de verre, & elle n'a laissé, pour tout résidu, qu'un léger enduit de terre, telle qu'on l'obtient de l'eau distillée la plus pure ; il en a été de même de l'eau contenue dans la jatte ou cuvette, elle ne différoit en rien de l'eau distillée ; l'examen le plus scrupuleux n'a pu nous faire retrouver, au fond du vase, aucun atome de poudre de diamant.

#### RÉFLEXIONS.

Dans toutes les expériences dont je viens de rendre compte, nous avons toujours opéré par un temps clair & serein, & nous avons joui de toute l'activité du foyer du grand verre brûlant ; un hasard heureux nous fit opérer, le 14 Août 1773, par un ciel sans nuage, à la vérité, mais chargé d'une espèce de brume légère ou brouillard qui ôtoit au Soleil une grande partie de son action : ce fut sans doute

en raison de cette circonstance que nous obtinmes, d'une manière plus marquée, un phénomène qui nous avoit échappé jusqu'alors, & dont je vais rendre compte.

### NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

*Exposition du diamant au foyer de la lentille du Palais royal,  
à une chaleur modérée.*

*Préparation de l'expérience.*

On a mis six diamans, pesant ensemble 5 grains  $\frac{13}{16}$  poids de marc, dans une capsule de porcelaine; on les a recouverts d'une cloche de cristal renversée dans de l'eau, & du reste on a tout disposé comme dans l'expérience précédente.

### E F F E T.

Comme la chaleur du foyer a été moins forte dans cette expérience que dans les précédentes, les phénomènes ont été moins prompts & moins sensibles; au bout de sept minutes cependant on a vu bouillonner à la surface le plus gros des diamans; du reste, on a seulement remarqué que la plupart devenoient très-noirs, & on les a retirés au bout de 35 minutes; cinq de ces diamans se sont trouvés, après l'expérience, d'un noir mat & velouté, précisément comme s'ils avoient été enduits de noir de fumée à la flamme d'une lampe, ils noircissoient les doigts & le papier, précisément comme auroit fait une substance charbonneuse ou du noir de fumée.

Ces mêmes diamans avoient perdu environ le quart de leur poids; examinés au microscope, ils ont présenté, indépendamment du noir velouté dont on vient de parler, des creux irréguliers & des inégalités semblables à celles observées dans l'expérience précédente; on apercevoit en outre au milieu du noir, des filamens blancs, comme cotonneux & un peu ramifiés.

Le sixième de ces diamans, qui étoit le plus gros, avoit

conservé sa couleur grise blanchâtre, & une demi-transparence dans sa partie supérieure ; il paroissoit peu altéré dans cette partie, mais celle inférieure, celle qui touchoit le creuset étoit noire, à la vérité un peu moins que ne l'étoient les cinq autres diamans.

Cette substance charbonneuse n'étoit que superficielle aux diamans, & c'est ce dont on s'est assuré en broffant un des plus noirs dans de l'eau ; la couche noire s'est aisément détachée, & le diamant, après en avoir été dépouillé, avoit un peu de transparence, quoique néanmoins il conservât encore une teinte brune assez forte.

### R É F L E X I O N S.

Il paroîtroit, d'après cette expérience, 1.<sup>o</sup> que le diamant est susceptible de se réduire en charbon dans quelques circonstances, & qu'il rentre par conséquent dans la classe des corps combustibles, comme M. Macquer l'a annoncé le premier ; 2.<sup>o</sup> que cet effet n'a lieu qu'à sa surface ; 3.<sup>o</sup> que la plus grande partie de cette matière charbonneuse n'a point d'adhérence avec le diamant, tandis qu'une petite portion lui tient plus fortement ; 4.<sup>o</sup> enfin, que la couleur noire observée dans les diamans qui ont été exposés à la violence du feu dans les vaisseaux fermés, ( circonstance que nous avons observée les premiers, M. Macquer, M. Cadet & moi ) tient probablement à la même cause.

### D I X I È M E E X P É R I E N C E.

#### *Répétition de la même expérience.*

#### *Préparation de l'expérience.*

Cette expérience étoit assez intéressante pour mériter d'être répétée plusieurs fois ; on y a procédé en conséquence avec le même appareil, c'est-à-dire, sous une cloche de verre renversée dans de l'eau, & on s'est servi, pour plus de sûreté, d'un diamant rose taillé, un peu jaunâtre & égrisé dans quelques endroits, il pesoit 2 grains  $\frac{9}{16}$  poids de marc ; le  
ciel



ciel n'étoit pas ce jour-là parfaitement pur, & la chaleur du Soleil n'avoit qu'une médiocre activité.

## E F F E T.

Une minute environ après que le diamant a été présenté au foyer, il a pris une couleur terne, puis il est devenu noir, & on en a vu sortir de petits bouillons; enfin, ses angles & ses facettes se sont insensiblement effacés: dans des momens, il étoit très-noir, dans d'autres, il l'étoit beaucoup moins: au bout de dix à douze minutes, un vent frais ayant frappé sur la cloche qui étoit fort échauffée, elle s'éclata & il s'établit une communication d'air de l'intérieur à l'extérieur de la cloche; le diamant resta néanmoins encore quelques minutes exposé au foyer, après quoi il fut retiré.

Sa partie supérieure n'étoit point transparente, mais elle n'étoit pas noire, la partie inférieure, c'est-à-dire celle qui touchoit à la capsule, l'étoit au contraire; cette substance noire étoit superficielle, comme dans l'expérience précédente; elle s'enlevoit aisément & noircissoit les doigts & le papier: le diamant dépouillé de cette enveloppe étoit demi-transparent; son poids n'étoit diminué que de  $\frac{3}{16}$  de grains.

## O N Z I È M E E X P É R I E N C E.

*Diminution du volume de l'air dans lequel on fait évaporer le diamant.*

*Préparation de l'Expérience.*

On a mis dans une capsule de porcelaine, cinq diamans du poids de 4 grains  $\frac{1}{2}$  foibles, qui étoient déjà noirs, & qui avoient passé précédemment au foyer; on a établi la capsule sur un support de cristal, comme dans les expériences précédentes; on a recouvert le tout avec une cloche de verre plongée dans de l'eau distillée; enfin, on a observé le degré que marquoit le thermomètre dans la salle où l'appareil a été disposé, & on a marqué avec une bande de papier, le niveau

exact de l'eau. Lorsque tout a été ainsi préparé, les diamans ont été exposés pendant 16 minutes à travers la cloche de verre à l'action du foyer; après quoi, ayant laissé refroidir l'appareil, l'eau est remontée insensiblement au-dessus de son niveau, & ayant mesuré exactement le diamètre de la cloche, & la différence de hauteur de l'eau avant & après l'opération, j'ai reconnu que la diminution du volume de l'air, avoit été de 8 pouces cubiques : la capacité de la partie vide de la cloche étoit de 60 pouces environ.

Cet appareil est demeuré dans le même état pendant quatre jours, dans une salle basse du Louvre, près le jardin de l'Infante, où la température ne varioit que très-peu, & ayant fait pour l'observer les différens instans où le thermomètre marquoit précisément le même degré qu'avant l'opération, j'ai reconnu que la diminution du volume de l'air étoit constamment de 8 pouces  $\frac{1}{10}$ , sans augmentation ni diminution.

#### D O U Z I È M E E X P É R I E N C E.

*État de l'air dans lequel l'évaporation du diamant a été faite.*

Au bout de quatre jours, la diminution de volume qu'avoit éprouvé l'air, ayant été bien reconnue, j'ai retourné avec célérité la cloche qui recouvroit les diamans; mais en même temps avec les précautions nécessaires, pour éviter que l'air ne s'en renouvelât entièrement; j'y ai versé quelques onces d'eau de chaux; sur le champ cette eau a été précipitée de la même manière qu'il lui arrive avec le fluide élastique ou *gas*, dégagé des effervescences, des fermentations & des réductions métalliques.

#### R É F L E X I O N S.

Les diamans qui avoient servi à cette expérience, ne pesoient plus que 2 grains  $\frac{2}{8}$ , ils avoient par conséquent perdu 2 grains  $\frac{6}{8}$ , c'est-à-dire près de la moitié de leur poids; ils étoient tous quatre presque transparens, grisâtres

& assez lissés à la surface; un d'eux étoit noir d'un côté seulement, & teignoit le papier en noir; mais cette couleur comme dans les expériences précédentes, n'étoit que superficielle, la petite couche qu'elle formoit se détachoit aisément, & le diamant par-dessous étoit demi-transparent.

## TREIZIÈME EXPÉRIENCE.

*Examen de la terre calcaire précipitée de l'eau de chaux, par l'air qui a servi à l'évaporation du diamant.*

Il étoit question de déterminer la cause qui avoit ainsi précipité la chaux, & qui l'avoit rendue tout-à-coup insoluble dans l'eau. J'ai rassemblé très-soigneusement dans cette vue, toute la terre qui s'étoit précipitée dans l'expérience précédente, & d'après un examen scrupuleux, j'ai reconnu, 1.<sup>o</sup> qu'elle n'avoit plus ni causticité ni solubilité dans l'eau, ni enfin aucune des propriétés de la chaux, mais qu'elle s'étoit convertie en une véritable craie; 2.<sup>o</sup> qu'elle avoit repris la propriété de faire effervescence avec les acides; 3.<sup>o</sup> enfin que cette effervescence étoit dûe au dégagement de ce même fluide élastique, aujourd'hui si connu sous le nom d'*air fixe* ou de *gas*; on sait que ce dégagement n'a pas lieu, ou n'a lieu qu'en très-petite quantité dans la combinaison des acides avec la chaux.

## R É F L E X I O N S.

Il est difficile de douter d'après cette expérience, que l'air dans lequel on a fait évaporer du diamant n'ait acquis au moins en partie, les propriétés de ce qu'on appelle *air fixe*; qu'il ne se soit rapproché jusqu'à un certain point de la nature du fluide élastique ou *gas*, qui se dégage des effervescences, des fermentations & des réductions métalliques, par le phlogistique, & qu'il n'ait acquis par-là la propriété de se combiner avec les terres calcaires & les alkalis, propriété que n'a pas l'air de l'atmosphère. Il resteroit à déterminer si les émanations du diamant, autrement dit si le diamant réduit en vapeurs est de l'*air fixe* ou du *gas*, ou bien si ce sont ces mêmes

vapeurs du diamant qui combinées avec l'air commun, le constituent dans l'état d'air fixe, c'est ce qu'il ne m'a pas été possible de déterminer jusqu'ici : quoi qu'il en soit, il est nécessaire de faire remarquer que l'air dans lequel on a évaporé du diamant, diffère en un point du gas des effervescences & des fermentations, c'est en ce qu'il est moins susceptible de se combiner avec l'eau; on a vu en effet qu'il est demeuré quatre jours sur de l'eau, sans qu'il y ait eu de diminution sensible dans son volume.

Cette dernière circonstance, je veux dire la facilité avec laquelle l'eau absorbe l'air fixe ou le gas, m'a fait naître quelqu'inquiétude sur les expériences précédentes, & j'ai commencé à craindre que la diminution du volume de l'air pendant l'évaporation du diamant observée dans la *onzième expérience*, ne tint à cette cause; & pour lever toute espèce de doute, je me suis proposé de répéter la même expérience en employant un fluide incapable de se combiner avec l'air fixe, du moins à froid, & j'ai choisi le mercure.

#### QUATORZIÈME EXPÉRIENCE.

*Évaporation du diamant sous une cucurbite de verre blanc, renversée dans du mercure.*

##### *Préparation de l'Expérience.*

J'ai fixé avec de la cire verte, au milieu d'une terrine de terre vernissée, une petite colonne de cristal; j'ai placé dessus une capsule de porcelaine contenant cinq diamans du poids de 4 grains  $\frac{1}{4}$  foibles, j'ai versé ensuite dans la terrine, soixante-dix livres de mercure, & j'ai recouvert les diamans & le support avec une cucurbite de verre blanc qui étoit percée d'un petit trou, enfin en suçant je suis parvenu (il est vrai avec quelque difficulté) à élever le mercure à une hauteur convenable, & j'ai bouché le trou avec du lut gras.

##### E F F E T.

Sitôt que l'appareil a été soumis à l'action du foyer, le

mercure a baissé en raison de la dilatation de l'air contenu dans la cucurbite; mais bientôt le lut s'étant trop ramolli à cause de la chaleur communiquée à la cucurbite, il s'est introduit de l'air par le trou, & le mercure a redescendu jusqu'à son niveau. J'ai continué malgré cet accident l'opération, & je n'ai retiré les diamans qu'au bout de douze minutes; la cornue ayant été promptement retournée, j'y ai introduit de l'eau de chaux comme dans l'expérience précédente, & elle y a été complètement précipitée; les diamans se sont trouvés avoir perdu 1 grain  $\frac{1}{4}$  de leur poids, ils étoient la plupart couverts de bouillons; l'un d'eux avoit une crevasse d'où sortoit une ramification ou espèce d'efflorescence jaune, comme de fer rouillé.

#### QUINZIÈME EXPÉRIENCE.

*Seconde évaporation du diamant sous une cucurbite de verre blanc, renversée dans du mercure.*

##### *Préparation de l'Expérience.*

J'ai employé le même appareil que dans l'expérience précédente, avec cette différence qu'au lieu du trou pratiqué à la cucurbite pour pomper l'air & élever le mercure, j'ai employé un tube ou siphon de verre recourbé, qui passoit par-dessous la cucurbite & qui établissoit une communication de l'extérieur à l'intérieur. J'ai enfermé sous cette cucurbite cinq diamans pesant 3 grains  $\frac{3}{4}$  foibles, après quoi j'ai élevé le mercure à une hauteur convenable en suçant par le tube ou siphon.

##### *E F F E T.*

La dilatation de l'air contenu sous la cucurbite a d'abord fait baisser le mercure; lorsqu'ensuite au bout de quinze minutes l'appareil a été retiré du foyer, il est remonté insensiblement jusqu'à son niveau & l'a même passé de quelque chose, mais extrêmement peu; de sorte qu'il paroît probable que la diminution du volume de l'air dans lequel on

fait évaporer le diamant, dépend en grande partie de ce que la portion d'air qui se trouve dans l'état de *gas* ou d'air fixe, rencontre un fluide avec lequel il s'incorpore & se combine.

De l'eau de chaux introduite sous la cloche y a été précipitée sur le champ : les diamans ne pesoient plus que 2 grains  $\frac{1}{8}$ , ils avoient par conséquent perdu 1 grain  $\frac{5}{8}$  de leur poids; des cinq, quatre étoient demi-transparens un peu plombés, le cinquième avoit une veine noire.

### *RÉFLEXIONS sur les Expériences précédentes.*

Les expériences rapportées dans la première partie de ce Mémoire, & sur-tout l'observation faite par M. Macquer, conduisoient à regarder le diamant comme un corps combustible; tout ce qu'on a vu jusqu'ici tend encore à confirmer cette opinion: en effet, comme les corps combustibles, il paroît que le diamant lorsque la chaleur n'est pas trop vive & qu'il est renfermé dans une portion d'air qui ne se renouvelle pas, se réduit en une matière noire & charbonneuse; comme eux, il fait éprouver une diminution de volume à l'air dans lequel on le brûle lorsque cet air a le contact de l'eau; enfin, la propriété remarquable qu'il a de changer en un fluide élastique analogue au *gas* & combinable avec les terres calcaires, l'air dans lequel on le brûle, est encore un caractère qui lui est commun avec un grand nombre de corps combustibles; on fait en effet que de l'air renfermé sous une cloche acquiert la propriété de précipiter l'eau de chaux lorsqu'on y brûle du charbon, une chandelle, une bougie, de l'esprit-de-vin, de l'éther & beaucoup d'autres substances.

Quelque grande que fût cette analogie entre le diamant & les corps combustibles, j'ai pensé qu'il étoit possible de la porter plus loin encore; & voici à cet égard le raisonnement que j'ai fait. Si le diamant est véritablement un corps combustible, il ne doit brûler & se dissiper que dans les mêmes circonstances où brûlent les corps reconnus pour combustibles, il ne doit donc pas se détruire par combustion

dans le vide de la machine pneumatique ni dans l'air fixe ou le *gas*, ni dans aucun autre fluide quel qu'il soit qui s'oppose à la combustion.

Ces réflexions m'ont conduit à différentes expériences qui ne sont pas aussi complètes que je l'aurois désiré; je ne rendrai compte ici que de celles faites dans l'air des effervescences; quant à celles faites dans le vide de la machine pneumatique, la difficulté qu'elles présentent & l'imperfection des appareils dont je me suis servi jusqu'ici, ne m'a pas permis d'obtenir des résultats assez sûrs pour pouvoir être communiqués au public.

#### SEIZIÈME EXPÉRIENCE.

*Évaporation du diamant dans le fluide élastique ou gas, dégagé des effervescences.*

*Préparation de l'Expérience.*

J'ai placé comme à l'ordinaire, dans une capsule de porcelaine & sur un support de cristal, quatre diamans pesant 4 grains foibles; ces diamans avoient déjà passé au foyer; l'un étoit demi-transparent, un second étoit noir & charbonneux d'un côté; enfin les deux autres étoient parfaitement noirs de toutes parts. J'ai rempli de mercure la petite terrine au milieu de laquelle étoit fixé le support; j'ai renversé sur les diamans une cucurbite de verre blanc sans pontis, que j'avois préalablement remplie du gas des effervescences, ou plus exactement de fluide élastique dégagé de la dissolution de la craie par l'acide vitriolique: je n'assurerois pas qu'en retournant la cucurbite, il ne se fût mêlé quelque peu d'air commun avec le gas qu'elle contenoit; mais la quantité n'a pas été certainement considérable; le gas d'ailleurs peut être mêlé d'une assez grande quantité d'air de l'atmosphère, sans être pour cela propre à entretenir la combustion.

#### E F F E T.

Le Soleil étoit vif, & quelques instans après que les diamans

ont été présentés au foyer, ils sont devenus rouges candescens; cette circonstance n'est peut-être pas particulière à cette expérience: mais on n'avoit pas pris dans les précédentes les mêmes précautions pour s'en assurer: bientôt après la petite couche noire qui les recouvroit s'est dissipée en entier, ils sont devenus d'une transparence mate, qu'ils ont conservée pendant toute l'opération; peu-à-peu on a remarqué que leur surface devenoit raboteuse, grumelée, couverte de bouillons, & ils ont pris l'apparence de pierres-ponces, ou plutôt de pierres de meulières, à la transparence près. Insensiblement, les impressions concaves se sont augmentées de plus en plus, & les diamans ont visiblement paru diminués. Ces observations tombent principalement sur les deux qui occupoient le dessus, les deux autres étoient cachés par-dessous, & on ne pouvoit les observer. Au bout de trois quarts d'heure on a aperçu à l'un des deux diamans supérieurs une gerfure qui a ensuite augmenté; l'autre diamant supérieur paroissoit comme feuilleté; au bout d'une heure, ces deux diamans étoient assez diminués pour laisser distinguer ceux de dessous, & ces derniers même paroissoient avoir perdu plus que les autres de leur volume. Tel étoit leur état au bout d'une heure dix minutes qu'a duré l'opération; après quoi on a cru à propos de les retirer.

Le volume de l'air, après le refroidissement, s'est trouvé diminué de quatre pouces cubiques, les diamans au lieu de 4 grains ne pesoient plus que 2 grains  $\frac{3}{16}$ , c'est-à-dire, qu'ils n'avoient pas perdu tout-à-fait moitié de leur poids; ils étoient transparens & sans aucune apparence de parties noires & charbonneuses,

### R É F L E X I O N S.

L'évaporation du diamant dans cette expérience a été infiniment plus lente que dans toutes les précédentes, on a fait à peine, pendant les soixante-dix minutes qu'elle a duré, ce que dans les expériences 2, 3 & 7, on avoit fait en dix, quinze & vingt minutes, & cette circonstance donne la clef de tous les phénomènes



phénomènes observés sur le diamant. On voit évidemment que ce corps lorsqu'il est dans des circonstances favorables à la combustion, se détruit & se dissipe par une chaleur modérée; que lorsqu'au contraire, les circonstances s'opposent à la combustion, il devient un corps très-réfractaire, & qui ne cède qu'à l'action d'un agent très-vif & très-long-temps continué.

Cette propriété n'est pas particulière au diamant, elle est commune à presque tous les corps, qui comme lui sont combustibles; le soufre que le moindre contact d'un corps en ignition, suffit pour faire brûler, demande un degré de feu plus fort pour être sublimé & volatilisé. Il en est de même du phosphore, du camphre, de l'esprit-de-vin, des huiles essentielles, &c. ces substances & une infinité d'autres sont, suivant les circonstances, ou combustibles ou volatiles: elles sont combustibles à l'air libre & volatiles dans les vaisseaux fermés; bien plus, je vais faire voir que le charbon lui-même, ce corps que l'on regarde comme une des substances les plus réfractaires de la Nature, est précisément dans le même cas, que non-seulement il est combustible à un degré de chaleur médiocre, comme on le fait, mais encore qu'il est volatil toutes les fois que les circonstances s'opposent à sa combustion, & qu'on lui fait subir un degré de chaleur suffisant.

#### DIX-SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

*Évaporation du charbon dans le fluide élastique, dégagé des effervescences.*

*Préparation de l'Expérience.*

J'ai mis dans une capsule de porcelaine dure, 12 grains de braise de Boulanger, en poudre fine, & qui avoit déjà subi une longue calcination dans les vaisseaux fermés: cette capsule a été placée sur un piédestal ordinaire, & j'ai

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.*

H h h h

introduit le tout sous une cucurbite renversée dans du mercure, & dans laquelle j'avois préalablement substitué à l'air ordinaire du gas dégagé de la dissolution de la craie dans l'acide vitriolique; lorsqu'au moyen du siphon dont j'ai parlé plus haut, le mercure a été élevé à une hauteur convenable, j'ai fait tomber le foyer du verre brûlant sur la poudre de charbon.

### E F F E T.

Dans le premier instant, il s'est fait un petit mouvement d'ébullition qui n'étoit autre chose que l'effet de la dilatation subite de l'air logé entre les molécules du charbon en poudre; cet effet purement mécanique a lieu à l'égard de presque toutes les matières en poudre qu'on présente au verre brûlant: presque en même temps, une petite portion du charbon de la surface a brûlé & s'est réduite en cendre; bientôt cette cendre s'est vitrifiée, & s'est fondue en globules vitreux extrêmement petits, les uns laiteux & opaques, les autres presque transparens; ce premier effet n'a duré que quelques minutes, & il n'a eu lieu que sur une quantité très-petite de poudre de charbon: on croit même pouvoir assurer, autant qu'on peut s'en rapporter à l'évaluation, qu'il n'y a pas eu un quart de grain de charbon consommé par cette première combustion.

Ce premier instant passé, la surface du charbon a conservé sa noirceur, mais on n'a pas été long-temps à s'apercevoir qu'il se formoit un creux sensible à l'endroit où tomboit le foyer; ce n'étoit plus l'effet d'une combustion, car il n'y avoit pas la plus légère apparence de cendre: lorsqu'en tournant l'appareil, on faisoit tomber le foyer dans un endroit qui n'avoit point encore été exposé à son action, en quelques minutes, on voyoit l'impression se former & se creuser de plus en plus. Cette diminution de volume du charbon étoit accompagnée d'une vapeur ou plutôt d'une fumée très-visible qui circuloit dans la cucurbite, & qui rendoit très-sensible le cône de lumière qui la traversoit.

Au bout de trois quarts d'heure, la diminution du charbon étoit si considérable qu'il n'occupoit plus que le fond du petit vase dans lequel il avoit été placé, & comme le Soleil étoit fort oblique, les bords de la capsule faisoient ombre, & il n'y avoit plus qu'une portion du foyer qui tombât sur le charbon. Ces circonstances ont obligé de cesser l'opération au bout d'une heure de bon soleil. La surface du mercure a remonté à mesure que l'appareil s'est refroidi, & il s'est fixé à 1 pouce 9 lignes plus bas qu'avant l'opération; la cucurbite avoit en cet endroit 4 pouces 11 lignes de diamètre; la production d'air a donc été de 31 pouces cubiques environ.

L'opération finie, on a retourné la cucurbite; elle avoit dans son intérieur une odeur approchante de celle du foie de soufre, & assez semblable en même-temps à celle d'une lessive de soude; l'air qu'elle contenoit étoit toujours au moins en partie dans l'état d'air fixe & précipitoit l'eau de chaux: après l'introduction de l'eau de chaux, l'odeur de foie de soufre s'est changée en une odeur savonneuse.

Le charbon retiré ne s'est plus trouvé peser que 7 grains  $\frac{2}{3}$ , il y en avoit eu par conséquent 5 grains  $\frac{1}{3}$  qui s'étoient évaporés & qui avoient été réduits en un fluide élastique ou espèce d'air.

Avant de faire aucune réflexion sur cette expérience, je passe aux circonstances de la destruction du charbon dans l'air ordinaire.

#### DIX-HUITIÈME EXPÉRIENCE.

*Combustion & évaporation du charbon, dans l'air commun, sous une cucurbite de verre, renversée dans du mercure.*

##### *Préparation de l'Expérience.*

L'appareil de cette expérience ne différoit en rien de celui de la précédente, avec cette différence seulement que la cucurbite au lieu de fluide élastique dégagé d'une effervescence, contenoit de l'air ordinaire: la quantité de braise de Boulanger contenue dans la capsule étoit de 20 grains.

H h h h ij

## E F F E T.

Sitôt que le charbon a été présenté au foyer, il s'est fait à la surface une couche de cendre, & beaucoup plus considérable que dans l'expérience précédente; on croit cependant pouvoir assurer que la quantité de charbon consommé par cette combustion n'a pas excédé 1 grain: bientôt la combustion a cessé, & la cendre s'est vitrifiée en petits globules vitreux demi-transparens; après quoi la surface du charbon a paru noire dans les intervalles que laissoient les globules vitreux.

Le charbon est demeuré ainsi exposé au foyer pendant une heure, mais les vapeurs n'ont pas été aussi visibles que dans l'air fixe, & le cône de lumière n'a pas été aussi-bien marqué; on a couvert brusquement, & à plusieurs reprises, le verre brûlant, pour faire ombre, & on s'est assuré que le charbon étoit rouge, mais il cessoit de l'être presque dans la seconde: on a vu de temps en temps pendant le cours de cette opération, partir du charbon comme de petites étincelles qui sautoient & qui sembloient éclater à plusieurs pouces de hauteur; mais on n'a pu s'assurer si ces petits corps étoient brillans par eux-mêmes, ou simplement en raison des facettes qu'ils présentoient à la lumière & qui la réfléchissoient.

Il se formoit insensiblement, comme dans l'expérience précédente, des impressions profondes dans la poudre de charbon, à l'endroit où tomboit le foyer; il étoit évident que la combustion n'avoit eu lieu que dans le premier instant, & qu'ensuite il y avoit eu volatilisation. L'opération finie, il s'est trouvé une augmentation du volume de l'air de 15 à 16 pouces, & le charbon s'est trouvé diminué de 6 grains justes.

## DIX-NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

*Examen de l'état de l'air dans lequel s'est volatilisé  
du Charbon.*

La cucurbité à la suite de l'expérience précédente, a été

retournée avec assez de promptitude & de précaution pour qu'on fût assuré que l'air de l'atmosphère n'avoit pas eu le temps de remplacer celui qu'elle contenoit; on y a introduit une petite bougie qui s'y est éteinte à l'instant, de l'eau de chaux versée dans la même cucurbite s'est troublée; mais la précipitation a été lente, difficile & incomplète.

### RÉFLEXIONS.

On voit clairement d'après les expériences précédentes ; 1.<sup>o</sup> que l'air de l'atmosphère ne peut contribuer à la combustion que d'une fort petite quantité de charbon; que cette quantité une fois brûlée, le charbon n'est plus altéré par la chaleur à moins qu'elle ne soit extrême, mais qu'alors il se volatilise plutôt que de brûler; cette propriété de l'air de n'entretenir que jusqu'à un terme marqué la combustion des corps a déjà été remarquée, & elle se confirme tous les jours; 2.<sup>o</sup> que le charbon indépendamment de la propriété d'être combustible à une chaleur très-douce, a encore celle d'être volatil par la violence de la chaleur; 3.<sup>o</sup> que le degré de chaleur nécessaire pour opérer cette volatilisation est à peu près le même que celui qu'exige le diamant; 4.<sup>o</sup> que le charbon ne donne, comme le diamant, ni vapeurs sensibles ni sublimé; mais que l'un & l'autre se réduisent en un fluide élastique, en une espèce d'air ou de gas, qui, soit seul, soit mélangé avec l'air de l'atmosphère, a la propriété de s'unir avec la chaux & avec les alkalis, & de leur rendre la propriété de faire effervescence avec les acides; 5.<sup>o</sup> que si le charbon laisse après la combustion une certaine quantité de cendre susceptible de se vitifier, il paroîtroit que le diamant a aussi cette propriété; en effet, on a vu dans la *septième Expérience*, que les éclats qui s'en détachent laissent un petit enduit vitreux sur la porcelaine, à l'endroit où ils se sont évaporés.

On n'auroit pas pu soupçonner qu'il eût pu se trouver quelque rapport entre le charbon & le diamant, & il seroit déraisonnable sans doute de pousser cette analogie trop loin;

elle n'existe que parce que l'un & l'autre semblent devoir être rangés dans la classe des corps combustibles, & qu'ils sont à peu-près ceux qu'on peut regarder comme les plus fixes de cette classe lorsqu'on les garantit du contact de l'air.

Je ne serois pas étonné que le diamant & le charbon, qui d'après les expériences faites au verre ardent, semblent être volatils au même degré de chaleur, ne se volatilissent beaucoup plus aisément l'un que l'autre par le feu des fourneaux. Une expérience de plusieurs années nous a appris que dans les épreuves faites au verre brûlant, les corps blancs & les corps diaphanes s'échauffent beaucoup plus difficilement, & prennent, à force de soleil égal, un degré de chaleur beaucoup moins grand que les autres; la raison de cette différence tient à ce que les premiers réfléchissent & renvoient les rayons, tandis qu'au contraire les seconds les laissent passer sans les retenir. Les diamans sont dans ce second cas, & leur transparence leur fait éluder une partie de l'effet du foyer; le charbon au contraire, par sa couleur noire & matte, se trouve naturellement disposé à absorber une grande quantité de rayons, & il doit nécessairement recevoir au foyer du même verre, une beaucoup plus grande intensité de chaleur que le diamant: il est vrai que ce dernier se couvre de temps en temps d'une surface ou enduit noir, qui doit favoriser l'effet du verre ardent, mais ce noir en même-temps n'est que momentané; le même diamant se noircit & s'éclaircit successivement plusieurs fois pendant qu'il est exposé à l'action du foyer, & au total il doit y prendre moins de chaleur que le charbon. La conséquence de cette réflexion est simple; si le diamant prend au foyer du verre ardent moins de chaleur que le charbon, & si cette chaleur suffit pour le volatiliser, il est donc plus volatil que le charbon; & en effet, il paroît que le charbon résiste mieux au feu de porcelaine dans les vaisseaux fermés que le diamant.

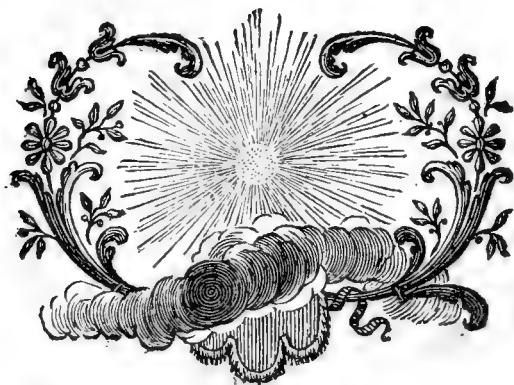
J'ai prévenu au commencement de ce Mémoire, que ce que j'avois à donner sur le diamant laisseroit encore beaucoup

de choses à désirer; le Lecteur ne s'en apercevra que trop, & il ne manquera pas de demander encore après avoir lû ce Mémoire, peut-être trop long, qu'est-ce que le Diamant?

J'avoue qu'il est encore impossible de répondre d'une manière très-satisfaisante à cette question, & peut-être même ne sera-t-il jamais possible d'y répondre: cependant pour résumer ce que nous avons de connoissances à cet égard, il semble qu'on peut regarder comme à peu-près prouvé; 1.<sup>o</sup> que le diamant est un corps combustible, à un degré de chaleur à peine capable de fondre l'argent; 2.<sup>o</sup> que comme la plupart des corps combustibles, il donne une substance noire & comme charbonneuse à sa surface; 3.<sup>o</sup> que lorsque les circonstances s'opposent à sa combustion, il devient presque aussi fixe que le charbon; 4.<sup>o</sup> que cependant on peut par un degré de chaleur très-violent & supérieur même à celui des fourneaux de porcelaine, parvenir à le volatiliser, & qu'il se réduit alors au moins en partie en vapeurs incoërcibles, en une espèce de gas qui précipite l'eau de chaux, & qui a beaucoup de ressemblance avec le gas dégagé des effervescences des fermentations & des réductions métalliques.

On ne manquera pas de demander encore, s'il est bien prouvé que la matière charbonneuse qui se forme à la surface du diamant soit véritablement le produit de la combustion de sa propre substance: j'avoue qu'il ne seroit pas impossible qu'elle ne provînt, soit de quelque matière étrangère contenue dans le diamant, soit de quelque corps environnant, & que les preuves rapportées dans ce Mémoire, laissent encore quelque chose à désirer sur cet objet; aussi suis-je bien éloigné de me regarder comme arrivé au terme de mes expériences. Je m'occupe dans ce moment de les répéter dans le vide de la machine pneumatique, & quoique mes tentatives à ce sujet n'aient encore eu qu'un succès médiocre, elles m'ont cependant fait connoître que le diamant ne se réduit point en charbon dans le vide de la machine pneumatique, qu'il n'y perd point sa transparence, mais qu'il s'y réduit en vapeurs gazeuses incoërcibles.

La loupe de quatre pieds de diamètre, que nous devons au zèle de M. Trudaine pour le progrès des Arts & des Sciences, & qui sera bientôt achevée, va nous fournir de nouveaux moyens, des instrumens plus forts, & nous transporter dans un ordre de choses tout nouveau. Nous espérons que l'Académie voudra bien nous permettre, à M.<sup>rs</sup> de Montigny, Macquer, Brissón, Cadet & à moi, qu'elle a chargé spécialement de la suite de ce travail, de déposer à mesure dans ses Registres, le résultat de nos recherches, comme je viens de le faire pour le Diamant, sauf par la suite à donner des résumés généraux lorsque nos expériences auront été assez multipliées pour oser en tirer des conséquences.





*PREMIER MÉMOIRE*  
*POUR SERVIR*  
*À L'ANATOMIE DES OISEAUX.*

Par M. VICQ-D'AZYR.

*Description du Squelette & des Muscles.*

Tous les corps naturels peuvent être divisés en deux règnes, le règne organique & le règne inorganique; le premier renferme tous les corps qui composent le système vivant, depuis l'homme jusqu'à la plante : ce règne appartient tout entier à l'Anatomie; elle seule en connoît les ressorts & peut en développer la structure; que l'on cesse donc de lui reprocher le peu d'étendue de son domaine, & la lenteur de ses progrès. L'Histoire Naturelle moins profonde dans ses recherches, plus séduisante dans ses résultats, plus agréable dans son exercice, a dû marcher d'un pas plus rapide; mais on rendra également justice à l'une & à l'autre, en les considérant sous leur véritable point de vue; qu'est-ce en effet que l'Histoire Naturelle, si ce n'est une Anatomie superficielle qui se contente de certains caractères faciles à apercevoir? & l'Anatomie, par rapport aux individus qu'elle analyse, n'est-elle pas une Histoire Naturelle plus minutieuse dans ses détails, plus rebutante dans ses travaux, plus multipliée dans ses opérations? cette dernière n'a donc pu considérer un nombre égal d'individus, puisqu'un seul lui offre autant de recherches à faire, que plusieurs familles en offrent au Naturaliste; c'est sans doute pour la même raison que presque tous les corps vivans sont rangés suivant différens systèmes, & décrits, quant à la forme extérieure, tandis qu'on n'en a disséqué qu'un petit nombre.

Les Poissons & les Oiseaux sont ceux de tous les animaux sur lesquels il reste le plus de connoissances à désirer. J'ai tâché,

*Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie,*

III

\* Voyez le  
dernier Volume  
des Sav. Étran.

dans deux Mémoires, de donner une histoire suivie des parties qui caractérisent les différens ordres des Poissons \*; maintenant je me propose de rendre l'anatomie des Oiseaux plus complète, en y ajoutant la description des parties, qui jusqu'ici ont été presque entièrement oubliées : c'est par l'histoire des squelettes & des muscles que je commencerai ces détails.

Le squelette des oiseaux a été décrit par Bélon; cet Auteur s'est même servi d'un moyen très-ingénieux pour le comparer avec celui de l'homme, il l'a redressé perpendiculairement sur ses pieds, & cette situation fait mieux sentir les rapports que tous les raisonnemens possibles; mais ce Naturaliste ne décrit aucunes variétés du squelette des différens oiseaux, il ne fait que nommer les pièces qui le composent; il n'entre d'ailleurs dans aucun détail sur leur mécanisme, & il ne dit rien des muscles destinés à les mouvoir.

On lit dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des descriptions très-bien faites de l'aigle, de l'autruche, du cafoar, de la demoiselle de Numidie, de l'outarde, de la pintade, du coq d'Inde & du cormorant; mais les viscères sont les seules parties dont la structure y soit développée, & on n'y trouve aucuns détails sur les muscles, si l'on en excepte les muscles pulmonaires de l'outarde & du cafoar.

Plusieurs Membres d'Académies célèbres se sont livrés au même travail, & ils se sont également bornés à la description des viscères. Conrad Peyer & Laurentius Straußius ont disséqué la cigogne, l'oie & la poule; Wolfgangus Vedelius, le cigne; Severinus, le canard, la corneille & la pie; Thomas Bartholin & Stenon, l'aigle; Gaspard Bartholin, le paon; Joannes de Muralto, le serin, le milan & la chouette; Olaus Borrichius, la colombe; & Bernhardus Valentinus, le geai; mais aucun de ces Auteurs n'a parlé des muscles. Joannes de Muralto a seulement fait quelques remarques sur le pectoral, & sur les tendons des muscles de la jambe.

Plus nouvellement, Borelli dans son Traité de *Motu animalium*, a décrit les parties osseuses & musculaires qui lui ont paru les plus nécessaires au mouvement; en parlant

des os, il a fort mal-à-propos, pris la fourchette pour la clavicule, & la clavicule pour une partie de l'omoplate. Bélon est à cet égard plus exact que lui. Borelli ne s'est pas plus étendu sur l'anatomie des muscles; il n'en a décrit que deux dont il a déterminé l'action & le poids, & qu'il a comparés avec ceux de l'homme. On s'aperçoit aisément que ces calculs, quoique fort subtils, n'expliquent point le vol; action très-compiquée, qui résulte de l'effort combiné d'un grand nombre de puissances dont il a négligé l'histoire. Le marcher des Oiseaux, le jeu de leurs côtes & de leur sternum sont encore des objets assez curieux pour mériter l'attention des Savans. Jusqu'ici cependant, Stenon est le seul qui ait senti l'importance de ce travail & qui ait eu le courage de l'entreprendre. Cet Anatomiste a décrit les muscles de l'aigle, & comme ceux de tous les Oiseaux sont à peu près les mêmes, une nouvelle description deviendroit inutile, si l'ouvrage de Stenon, remplissoit les vues de celui qui étudie la Nature; c'est aussi ce qu'il ne fait point.

On peut lui reprocher d'avoir trop multiplié les muscles de l'œsophage, de l'os hyoïde & des vertèbres, & de n'en avoir comparé presque aucun avec ceux des quadrupèdes, si l'on en excepte le crotaphite & quelques autres en très-petit nombre; d'ailleurs il ne les distingue que par les noms de *premier, deuxième, &c.* & il va de même quelquefois jusqu'au nombre *dix-sept*.

L'anconé & le pectoral, sont peut-être les seuls auxquels il donne un nom, & dont il désigne l'usage; de sorte que ses descriptions ont le défaut d'être minutieuses, souvent inintelligibles par le défaut de noms & d'usages déterminés, & difficiles, pour ne pas dire impossibles, à suivre, lors même que l'on a le scalpel en main. La matière est donc comme toute neuve. Dans ce siècle où l'on connoît les muscles nombreux de la chenille, n'est-il pas bien étonnant que ceux des Oiseaux, n'aient pas encore été bien décrits.

Mais quels individus & quelle méthode choisirai-je dans cette suite de détails?

1.<sup>o</sup> J'ai cru que les Oiseaux les plus gros & les plus communs pourroient servir de base à mes descriptions. Le coq d'Inde, le coq ordinaire de basse-cour, la corneille, la buse, le canard, l'oie, la pie & le chat-huant, ont fourni, quant aux muscles, la plus grande partie des faits dont je me propose de rendre compte dans ce Mémoire. Il étoit important de décrire les variétés; pour le faire avec ordre, il falloit choisir les chefs des grandes familles. Un pareil choix m'a paru trop difficile pour m'exposer à le faire seul. Il m'a semblé qu'il ne demandoit rien moins que les connoissances des plus grands maîtres. A qui pouvois-je mieux m'adresser qu'à M. Daubenton? ce Savant généreux m'a communiqué non-seulement les trésors dont il est le dépositaire, & qu'il fait si bien faire valoir, mais encore les recherches qu'il a faites lui-même sur ces différens objets. C'est d'après ses précieuses observations que je me suis déterminé à considérer les variétés anatomiques des oiseaux dans les chefs de neuf grandes familles, dont je rapporterai les noms, oubliant à dessein, les caractères, qui nous jetteroient dans des détails trop longs & étrangers à mon travail.

Dans la première famille, j'ai choisi le coucou & le perroquet; dans la deuxième, le chat-huant & la chouette; dans la troisième, l'aigle, l'épervier & la buse; dans la quatrième que l'on peut diviser en deux ordres, la corneille & le gros-bec dans le premier, l'hirondelle & la mézange dans le second; dans la cinquième, le coq & le pigeon qui sont les chefs des deux subdivisions de cette famille; dans la sixième, la grue & la bécasse; dans la septième, la poule d'eau; dans la huitième, le plongeon, l'oie & le canard; enfin dans la neuvième, le casoar & l'autruche, qui forment deux ordres subalternes parmi ces individus. Il n'y en a qu'un petit nombre dont j'aie distingué les muscles, mais il n'y en a aucun dont je n'aie examiné & comparé le squelette avec la plus scrupuleuse exactitude.

2.<sup>o</sup> La meilleure de toutes les méthodes, lorsque l'on se propose de décrire des muscles, est sans contredit celle:

d'Albinus; elle éloigne tous préjugés sur leurs usages, elle présente les parties par ordre, elle indique leur situation d'une manière exacte & précise, & sur-tout elle est favorable pour l'intelligence des rapports anatomiques, qui sont le principal but de mon travail. A l'aide de cette méthode, il sera facile de comparer non-seulement les différentes régions des oiseaux entre elles, mais encore avec celles des autres animaux.

J'ai divisé l'ensemble des muscles de l'oiseau en vingt-quatre régions, qui sont, la région thorachique antérieure, la région claviculaire qui est très-étendue, la région de l'omoplate, la région supérieure de l'épaule, les régions interne & externe de l'humérus, les régions internes & externes de l'avant-bras, celle de la partie qui tient lieu de main, la région du bas-ventre, celle des espaces intercostaux, celle de l'anus, la région supérieure du cou & celle du dos, la région inférieure du cou & celle du larynx, la région supérieure & latérale du crâne, la région inférieure de la tête, celle de la peau, les régions iliaques interne & externe, les régions antérieure & postérieure de la jambe, enfin les régions supérieure & inférieure du pied.

Chacune de ces régions comprend un certain nombre de muscles que nous décrirons à mesure qu'ils se présenteront, & auxquels pour fixer les idées & pour aider la mémoire, nous donnerons des noms relatifs à leur analogie, à leurs usages, ou à leur situation. L'histoire des insertions & le mécanisme des muscles, supposent d'ailleurs une parfaite connoissance du squelette. Comme la description que Bélon en a faite est trop succincte, nous tâcherons d'y suppléer, en faisant au commencement de chaque région, des remarques sur les pièces osseuses qui en sont la base: nous nous efforcerons aussi de contribuer en même temps, aux progrès de l'Ostéologie & de la Miologie de cette classe d'animaux.

## PREMIÈRE RÉGION.

*Région thorachique antérieure.*

Cette région s'étend depuis l'extrémité antérieure du sternum jusqu'à la postérieure & latéralement jusqu'à l'angle que les côtes font avec elles-mêmes au milieu de leur longueur. Le sternum des oiseaux est remarquable par la crête très-faillante, qui le fait comparer à une quille de navire, & par deux prolongemens qui s'étendent en arrière, & qu'une membrane unit avec la partie moyenne de cet os. Latéralement on aperçoit l'articulation des côtes qui sont rapprochées l'une de l'autre, & qui jouissent dans ce contact d'un mouvement assez marqué. Sur les côtés de cet os, on trouve de plus une apophyse en forme d'anse, & vers les parties latérales & externes des clavicules, deux autres apophyses que nous appellerons du nom de *claviculaires*; en dedans sont plusieurs trous qui s'ouvrent entre les lames osseuses.

Cette structure varie dans plusieurs oiseaux; dans la grue, par exemple, & dans plusieurs autres aquatiques, la trachée artère, après avoir fait des circonvolutions plus ou moins grandes, & qui dans quelques individus s'étendent extérieurement jusqu'à la région abdominale, s'insinue dans l'épaisseur du sternum; cet os dans le perroquet est plein, & n'a point de divisions latérales; il est arrondi postérieurement. Dans le coucou, une éminence est située à la partie antérieure de la fourchette, où elle paroît être destinée à empêcher qu'elle ne se porte trop en avant. Cette apophyse se rencontre aussi dans le canard à queue pointue; dans la petite chouette, le sternum est également plein, & les anses latérales sont très-peu faillantes; deux squelettes de grosses chouettes, m'ont offert une structure différente; dans l'un j'ai trouvé les divisions latérales, l'autre ne présentait qu'un trou dans la place qu'elles occupent ordinairement: les divisions latérales du sternum de la corneille, ne sont qu'ébauchées; les anses sont très-courtes, & les apophyses claviculaires

très-saillantes. Le squelette du coq, offre un sternum dont les anses & les divisions latérales, sont bien exprimées. Le sternum de la bécasse est très-mince, les anses y sont peu marquées, & les petites côtes latérales y sont très-courtes. Dans les petits oiseaux, ces prolongemens sont en général très-distincts; le sternum de la poule d'eau se termine en pointe, avec des anses & des apophyses claviculaires très-saillantes. Le sternum de l'aigle est plein; celui du canard, du bièvre & de l'oie, l'est aussi; il est de plus arrondi postérieurement; sur les côtés, on trouve quelquefois un ou deux trous bouchés par une membrane. Il en est donc du sternum des oiseaux comme de celui de l'homme, & ce que M. Hunauld a écrit dans les Mémoires de l'Académie, sur les *défauts d'ossification dans le sternum humain*, convient à celui des oiseaux, avec cette différence que ces défauts se trouvent dans les derniers, sur le côté, tandis que dans l'homme ils se trouvent dans le milieu.

Le sternum du caoar & de l'autruche, semble se rapprocher de celui de l'homme; il est beaucoup plus court que dans les autres oiseaux. La saillie moyenne n'existe point; un tubercule ou renflement en tient seulement la place. Il est poreux, léger, irrégulièrement arrondi, & ne ressemble pas mal à un bouclier. Les muscles de cette région sont :

1.<sup>o</sup> Le grand pectoral; ce muscle est triangulaire très-épais; & composé de trois portions; l'une est costale, elle est assez mince & s'insère aux côtes, auprès de l'omoplate. Une ligne tendineuse la sépare de la portion sternale, & près de l'angle que fait l'os du bras avec la clavicule, elle se contourne en forme d'anse de panier : la portion sternale est la plus large & la plus épaisse, elle recouvre le pectoral moyen, avec lequel elle confond quelques-unes de ses fibres; son insertion est tout le long de la crête du sternum : la portion antérieure se replie au-dessus de l'os de la fourchette, & l'enveloppe dans son épaisseur. Une trace tendineuse très-exprimée en dehors, la sépare de la portion moyenne; de sorte que ce muscle peut être regardé comme composé de trois ventres distincts, son tendon est large & accompagné supérieurement

par une portion charnue ; il s'insère à une éminence qui se trouve à la partie externe & supérieure de l'humérus, près de la tête entre le grand & le petit extenseur de la membrane de l'aile que nous décrirons ci-après & au-dessus des deux sous-claviers & du petit pectoral.

Ce muscle est celui que Borelli appelle du nom de *depressor alæ*, & dont il a calculé la pesanteur ; en effet, il abaisse l'aile quand elle est élevée, il la tire en arrière quand elle est portée en devant. La portion costale rapproche sur-tout l'humérus du thorax, & quand ce muscle agit seul, il fait faire à l'os du bras, un mouvement de rotation en dehors, qui détruit l'horizontalité de l'aile développée ; c'est lui qui est le principal agent des mouvemens que les oiseaux domestiques font exécuter à leurs ailes, en s'élevant sur leurs pieds, & en se secouant avec force. Enfin c'est lui, qui, lorsqu'il se contracte, ramène l'aile dans sa position naturelle & oblique au plan du corps de l'oiseau.

Le muscle pectoral de l'homme, est, par proportion, beaucoup moins épais & beaucoup moins étendu ; celui des oiseaux lui ressemble cependant à beaucoup d'égards : tous les deux sont divisés en plusieurs portions ; tous les deux ont à peu-près la même action & la même insertion & sont contournés de la même manière dans l'angle que la clavicule fait avec l'os du bras.

2.<sup>o</sup> Le muscle pectoral moyen, ainsi nommé pour le distinguer du petit pectoral qui existe aussi dans les oiseaux, est placé à côté de la crête du sternum dans l'espèce de rigole qui s'y rencontre. Quelques-unes de ses fibres s'insèrent à la membrane qui unit la partie moyenne du sternum avec les latérales : De-là elles vont obliquement se rendre à un tendon mitoyen & aplati qui monte le long de la clavicule pour s'insinuer dans une poulie formée entre cet os & celui de la fourchette, qui passe ensuite entre l'omoplate & l'humérus, qui se contourne sur le col de ce dernier, & qui s'insère au bord externe de cet os, près de sa tête, dans une excavation qu'on y remarque. Ce muscle



muscle penniforme est l'antagoniste du grand pectoral; il tire le bras en dessus & en devant. Si son action est plus forte il lui fait exécuter un mouvement de rotation, par lequel le plan des condyles de l'humérus devient de plus en plus parallèle à celui des côtes. C'est donc ce muscle qui donne à l'aile le développement & l'horizontalité nécessaires pour le vol, & son action est par conséquent opposée en tout à celle du grand pectoral.

Si on cherche un muscle pareil dans l'homme, on ne le trouve point; quelques-uns de ses usages sont à la vérité communs avec ceux du deltoïde; mais il est placé d'une manière bien différente; la poulie ajoute beaucoup à sa force, le deltoïde n'auroit pas fait exécuter au bras les mouvemens de rotation que lui donne le pectoral moyen: il étoit d'ailleurs nécessaire que le moignon des oiseaux fût le plus à nu, & le plus léger qu'il est possible, sans quoi le centre de gravité, qui, suivant les démonstrations de Borelli, doit répondre aux parties inférieures de l'oiseau, auroit été incontestablement placé beaucoup trop en devant.

3.<sup>o</sup> Le petit pectoral; ce muscle s'étend le long du bord externe de la clavicule à laquelle il s'insère, & à la partie extérieure du sternum; sa forme approche de la pyramidale; en dessous il est satiné; le foulavier externe est recouvert par ses fibres, & son tendon qui est un peu plus en dehors que ce dernier, s'insère dans une petite fosse que l'on remarque à la partie supérieure & latérale externe de l'humérus; l'action de ce muscle est de rapprocher le bras des côtes, & de le porter en arrière quand il a été porté trop en devant; si l'humérus est élevé, le petit pectoral peut encore l'abaisser; comme il est placé très-près du centre de mouvement, il sert à diriger l'action des muscles plus volumineux & plus forts, & dont l'insertion est plus éloignée: cette remarque convient également aux autres petits muscles dont nous parlerons incessamment, de sorte que dans le vol le mouvement, quoique très-violent, se fait d'une manière égale & graduée dans ses variations.

Le petit pectoral est placé dans l'homme à-peu-près de la même manière, mais il s'insère au bec coracoïde, & il a pour fonction d'abaisser l'angle antérieur de l'omoplate; dans l'oiseau, cet os doit être fixe, pour résister aux efforts considérables des deux grands muscles pectoraux : on peut même ajouter que les mouvemens de l'omoplate, en haut, en devant & en arrière, seroient dangereux dans cette classe d'animaux, chez lesquels l'os de la fourchette s'y oppose absolument; il est au contraire important que chez eux les mouvemens par lesquels l'os du bras se porte en devant & en arrière, soient faciles & multipliés; c'est sans doute pour cette raison, que les muscles, qui, dans l'homme sont principalement destinés aux mouvemens de l'omoplate, servent dans les oiseaux à ceux de l'humérus.

## DEUXIÈME RÉGION.

### *Région de la Clavicule.*

Cette région renferme tout l'espace compris entre les deux clavicules; nous observerons que ces deux os sont très-rapprochés l'un de l'autre, qu'une éminence moyenne, appartenante au sternum, les sépare inférieurement; qu'à la partie externe on trouve une autre apophyse appartenante encore au sternum; que les deux clavicules sont droites; qu'elles montent en s'écartant plus ou moins les unes des autres; & que dans tous les oiseaux, on observe entr'elles un petit os courbe, connu sous le nom de *fourchette*, qui en mesure & en assure la distance; que ce dernier os est plus large dans les oiseaux, dont les ailes sont plus éloignées; que sa pointe est tournée vers le sternum; que ses deux branches sont jointes avec les clavicules, par des ligamens qui ne peuvent guère prêter, & qu'elles y font une saillie qui ne ressemble pas mal au bec de corbeau de l'omoplate humaine, dont nous ferons voir ailleurs qu'elles ont les usages.

Les variétés des clavicules sont en petit nombre, comme je m'en suis assuré, en examinant avec soin les chefs des

familles, dont j'ai offert plus haut le tableau; elles sont très-minces dans le coucou; dans la bécasse elles sont plus courtes que dans la plus grande partie des autres oiseaux; dans la mésange, ainsi que dans les oiseaux de petite taille, elles sont longues & éfilées; le casoar & l'autruche sont les seuls dans lesquels la clavicule soit confondue avec le haut de la fourchette, & dans lesquels elle ne réponde point au volume du corps.

Les variétés de la fourchette sont plus nombreuses: on peut en général distinguer les os ainsi appelés *en articulés & non articulés*. Les premiers s'articulent en effet avec le sternum. Les seconds n'y sont assujettis que par le moyen d'un ligament plus ou moins lâche; dans le casoar & dans l'autruche la clavicule & la fourchette sont, comme nous l'avons dit, réunies ensemble, de sorte à ne laisser qu'un intervalle vers la partie antérieure du sternum avec lequel elles s'articulent; il seroit à souhaiter que l'on disséquât quelques-uns de ces oiseaux lorsqu'ils sont encore jeunes, peut-être alors ces pièces sont-elles distinctes, & peut-être on ne les trouve ainsi confondues que par les progrès d'une ossification long-temps continuée. Dans la grue, la fourchette est bien distincte, mais elle est articulée; elle l'est aussi dans la cigogne; & dans le coucou il s'en faut peu qu'elle ne le soit; dans toutes les autres familles un ligament l'unit avec le sternum, elle est aussi dans la plus grande partie des oiseaux, bombée en dehors; dans un squelette de perroquet, j'ai cependant trouvé sa convexité tournée vers l'intérieur du thorax, ces os diffèrent encore par l'ouverture de leur angle; dans le canard, dans l'oie, & sur-tout dans le plongeon, la fourchette est évasée & son angle est très-arrondi; dans la caille & dans la demoiselle de Numidie, il est très-aigu; dans la grive, & sur-tout dans le sansonnet, il est fort étroit: on observe encore quelques différences relatives à la distance qui les sépare du sternum; dans l'aigle cette distance est très-grande, la courbure de la fourchette n'est pas non plus égale dans tous les oiseaux; dans la chouette, par exemple, elle est peu considérable; la forme des branches varie encore dans les différentes familles; les gallinacées &

plusieurs autres les ont arrondies; dans la corneille le plan des branches est tourné obliquement en dehors; dans la chouette elles sont aussi aplaties, & leur plan est tourné en sens contraire.

Enfin, il est facile de voir que plus les ailes doivent être développées, & leur réaction grande; plus aussi l'os de la fourchette doit être bombé, plus il doit être élastique, plus il doit jouer facilement, moins enfin il doit être assujéti avec le sternum; c'est pour cette raison, en considérant les extrêmes, que dans l'aigle, dont le vol hardi s'élève beaucoup & se soutient long-temps dans les airs, la fourchette réunit ces différentes conditions, & se trouve très-éloignée du sternum, tandis que dans l'autruche, qu'un fort contraire semble attacher à la terre, cet os est à peine reconnoissable, & se confond immédiatement avec ceux de la poitrine.

Les muscles de cette région sont :

1.° Le souclavier interne; pour bien découvrir ce muscle; il faut détruire auparavant la partie du grand pectoral qui s'attache à la fourchette; il est situé le long & à la face interne de la clavicule, il est aplati & tendineux à sa surface; il s'insère à l'éminence moyenne du sternum & à la clavicule; de-là ses fibres se réunissent pour former un tendon qui accompagne celui du pectoral moyen, & qui s'insère tout auprès, de sorte qu'il doit être regardé comme un de ses accessoires; seulement le tendon ne fait pas un aussi grand contour & ne vient pas d'aussi loin.

2.° Le souclavier externe; ce muscle est presque semblable au précédent, il est placé le long du bord externe de la clavicule, au-dessous du petit pectoral; il est composé de trois portions, une s'insère à la clavicule, l'autre au sternum, la troisième à l'omoplate; cette dernière est la plus petite de toutes; le tendon combiné se porte vers la face interne de la tête humérale & s'y insère, son action est de porter le bras en arrière, en le rapprochant des côtes. On peut donc

le regarder comme le coopérateur des grands pectoraux, & comme l'antagoniste de l'autre fouclavier.

Dans l'homme, on ne trouve qu'un fouclavier dont les usages sont bien différens; mais si les muscles fouclaviers & les pectoraux sont multipliés dans les oiseaux, les petits muscles rotateurs de l'humérus manquent dans ces derniers chez lesquels la supination & la pronation, auroient été des mouvemens inutiles.

3.° Le court claviculaire; ce muscle est le plus petit de tous ceux qui sont situés le long de la clavicule; il est placé vers la partie inférieure & externe de cet os, dont les fibres occupent le tiers inférieur; elles s'insèrent d'une autre part à l'éminence latérale & claviculaire du sternum: ce muscle est le vrai fouclavier, c'est lui qui ressemble le plus au fouclavier de l'homme, son usage est de maintenir la clavicule dans sa position naturelle: en dedans la fourchette empêche les clavicules de se rapprocher trop l'une de l'autre, en dehors elles sont fixées par ce muscle; les deux autres claviculaires contribuent au même mécanisme, & cet os étant par ce moyen fortement appuyé de toutes parts, peut être regardé comme un soutien assuré pour les mouvemens très-forts & très-rapides de l'os du bras.

4.° Le costo-scapulaire; c'est ainsi que j'appelle un très-petit muscle qui est placé auprès de la portion scapulaire du fouclavier externe, qui s'insère à la première côte, & qui de-là va se terminer au quart supérieur de l'omoplate; il est arrondi, court, & ne peut avoir d'autre usage que celui de maintenir ce dernier os dans une certaine distance des vertèbres: on trouve encore quelques muscles qui ont la même fonction, & nous font voir que l'omoplate ne pouvoit être trop bien assujettie, pour résister aux efforts considérables qui tendent à la déplacer.

*Région de l'omoplate.*

Cette région comprend la face supérieure & inférieure de cet os, & l'espace contenu entre son bord interne & l'épine : nous avons trouvé plusieurs différences entre la clavicule de l'homme & celle de l'oiseau, qui est plus droite & plus longue par proportion ; mais l'omoplate en offre encore de plus marquées : elle est étroite, alongée, légèrement concave en-dessus, presque égale en-dessous, tranchante dans ses bords & légèrement recourbée vers le bas.

On rencontre peu de variétés dans cette région ; l'omoplate n'a cependant pas la même longueur, ni la même largeur dans tous les oiseaux ; celle de l'hirondelle est également large dans presque toute son étendue ; celle de la perdrix s'élargit un peu vers le bas ; celle de la bécasse est longue & s'étend assez loin vers la fosse iliaque externe ; celle des perroquets ne va pas jusqu'à l'os des îles ; enfin l'omoplate du casoar & de l'autruche est continue avec la clavicule & avec la fourchette : son volume est très-petit & sa forme très-irrégulière.

Les muscles de cette région, sont :

1.<sup>o</sup> Celui que j'appelle du nom de *trapézoïde*, parce qu'il répond au trapèze de l'omoplate humaine ; il s'insère au bord supérieur de l'os qui porte ce nom dans les oiseaux & aux épines des vertèbres ; il s'étend jusqu'aux trois dernières cervicales, mais il ne monte pas aussi haut que le trapèze dans l'homme ; ses fibres sont obliques, elles rapprochent en se contractant l'omoplate de l'épine : le cou des oiseaux étant très-flexible, & l'omoplate devant être d'ailleurs presque immobile pour les raisons exposées ci-dessus, il étoit inutile que le muscle trapèze s'étendît dans cette classe d'animaux jusqu'à la tête, ou même jusqu'aux premières vertèbres cervicales.

2.<sup>o</sup> Le muscle rhomboïde ; celui-ci se trouve au-dessous du précédent : ses fibres sont seulement un peu plus droites ;

il a d'ailleurs à peu-près les mêmes usages & les mêmes insertions.

3.<sup>o</sup> Le sus-scapulaire; ce nom m'a paru convenir au muscle dont il va être question, parce qu'il est placé dans la petite excavation que nous avons remarquée sur la face externe de l'omoplate, plusieurs de ses fibres sont continues avec le trapèze & avec le muscle qui répond au grand dorsal. Antérieurement elles se réunissent pour former un tendon rond, accompagné d'un prolongement charnu, qui s'insère à la partie inférieure & externe de la tête humérale; ce muscle tire le bras en arrière & un peu en dessus : il le rapproche en même temps de l'omoplate, comme le costo-scapulaire, & s'il est élevé, il l'abaisse avec assez de force.

L'omoplate des oiseaux n'étant pas surmontée par une crête, le muscle sus-scapulaire tient lieu de ceux que l'on connoît dans l'homme sous les noms de *sus-épineux* & *sous-épineux*.

4.<sup>o</sup> Le muscle qui tient la place du grand dorsal; ce nom lui convient à raison de sa situation, & non à raison de son étendue; quoique d'un petit volume, il est composé, 1.<sup>o</sup> d'une portion charnue étroite & aplatie, qui s'insère aux côtes inférieures près de l'épine; 2.<sup>o</sup> d'une autre plus large, plus épaisse, qui s'insère à l'angle ou pointe de l'omoplate & aux côtes moyennes; 3.<sup>o</sup> d'un tendon grêle alongé, qui se porte vers l'humérus, & s'y attache au-dessous de son articulation supérieure entre le grand & le petit extenseur du coude; ce muscle, par sa portion scapulaire, fixe l'omoplate, & par sa portion humérale, il porte le bras en dedans & en dessus.

On trouve également ces deux portions dans le grand dorsal de l'homme, mais la portion qui va directement à l'humérus est la plus considérable; les mouvemens de rotation par lesquels le bras se porte en arrière, en roulant sur lui-même, sont très-importans dans l'homme; une pareille disposition n'est pas, à beaucoup près, également nécessaire dans les oiseaux, dont l'omoplate doit être solidement retenue pour résister aux mouvemens dont l'épaule est en quelque sorte le centre & la réunion.

5.<sup>o</sup> L'extenseur de la membrane postérieure de l'aile; dans l'angle que fait le bras avec le trou au-dessous de l'omoplate, on trouve un repli de la peau assez considérable; c'est-là que s'épanouit un petit muscle fort mince, qui semble, dans la plupart des oiseaux, être une portion du grand dorsal; les deux muscles qui seront décrits dans la quatrième région, tendent de leur côté la membrane antérieure de l'aile; de sorte que dans le vol, toutes les parties sont aussi tendues qu'elles peuvent l'être.

6.<sup>o</sup> Le sous-scapulaire; le muscle que nous appelons ainsi tient aussi la place du grand dentelé: on y remarque en effet quelques digitations qui vont du milieu de la face interne de l'omoplate, aux côtes antérieures & moyennes; il est étroit & mince; ses fibres sont obliques & charnues jusqu'à leur insertion; son usage est d'éloigner un peu l'omoplate de l'épine, de la maintenir au moins dans une distance déterminée & de la fixer, ce qu'il fait conjointement avec la portion scapulaire du grand dorsal, usage qui le rapproche encore du muscle grand dentelé.

Nous sommes maintenant en état de répondre aux questions suivantes; 1.<sup>o</sup> quel est l'usage de l'os appelé *fourchette*? 2.<sup>o</sup> pourquoi l'omoplate des oiseaux est-elle si étroite & si allongée?

1.<sup>o</sup> La fourchette est un os flexible & élastique, qui étant situé entre les clavicules, paroît très-propre à empêcher qu'elles ne s'éloignent & ne se rapprochent trop l'une de l'autre, en même temps elle conserve un passage libre & une situation commode pour la trachée artère, pour ses muscles internes & inférieurs, & pour la poche ou dilatation de l'œsophage; de plus, elle fournit une insertion nécessaire au grand pectoral, & elle en dirige l'action; de plus, comme cet os est ployant & élastique, c'est lui qui brise la colonne d'air dans le vol, & qui peut-être absorbe une partie du mouvement dans ses jointures & par ses vibrations.

2.<sup>o</sup> La longueur & l'étroitesse de l'omoplate peuvent être expliquées de la manière suivante; deux muscles très-forts sont de chaque côté destinés au mouvement de l'aile; c'est  
le



le grand & le moyen pectoral; ce mouvement s'exécute dans la cavité articulaire qui est creusée précisément dans l'angle de la clavicule & de l'omoplate; l'effort de ces muscles tend donc à déplacer la clavicule & l'omoplate, en même temps qu'il tend à mouvoir le bras: la clavicule est retenue par des faces articulaires assez larges, par des ligamens qui l'assujettissent avec les éminences latérales & moyennes du sternum, par la fourchette & par un assez grand nombre de muscles; il falloit que l'autre extrémité du levier recourbé fût retenue avec une force égale, & c'est ajouter à cette force, que d'en augmenter la longueur: les petits muscles placés vers la pointe de l'omoplate, sont donc destinés à empêcher sa bascule, qui dans les grands efforts des pectoraux, n'auroit pas manqué d'arriver sans leur résistance. Le mécanisme de l'omoplate humaine est bien différent; tout y est disposé pour la souplesse & pour la variété des mouvemens que la longueur de l'omoplate, la situation presque droite des clavicules, & l'existence d'un os qui les réuniroit ensemble auroient infailliblement empêchés: l'omoplate des oiseaux devoit donc être alongée aux dépens de sa largeur.

*Nota. La suite des détails anatomiques concernant la structure du squelette & des muscles des Oiseaux, ainsi que leur nomenclature, leur mécanisme & leur comparaison avec l'homme, sont réservés pour les Mémoires suivans,*





## MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ

*Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire suivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faisant qu'un seul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi au mois de Février 1706.*

---

## M É M O I R E

## SUR LES ANASTOMOSES.

Par M. LA FOSSE.

ON appelle *Anastomose*, la réunion de deux vaisseaux dont les cavités communiquent ou s'abouchent. La partie des vaisseaux du corps des animaux, qui présente cette communication, a reçu le nom d'*anastomose*, quelque espèce de liquide qu'elle transmette d'ailleurs.

Les variétés infinies qu'on observe dans le nombre, le volume, la situation des vaisseaux des différens individus, ne s'étendent que sur le nombre & la position des anastomoses, & il n'est aucun animal dont le système vasculaire n'offre une immense quantité de pareilles communications, soit dans les rameaux principaux, soit dans les ramifications capillaires : on peut même avancer qu'il est impossible d'assigner un point du corps des animaux, auquel ne réponde pas quelque anastomose vasculaire sensible ou insensible.

Je distingue trois sortes d'anastomoses; les artérielles-veineuses, ou la réunion des artères & des veines, les artérielles qui se font d'artère à artère, & les veineuses, qui se font de veine à veine.

La communication immédiate des artères avec les veines est établie par une foule d'expériences (quoiqu'en dise Bohn, *Circul. anat.*) M. Winflow, a assuré dans les Mémoires de l'Académie, année 1711, qu'elle pouvoit même se démontrer à l'œil nu dans les glandes; & toutes les analogies s'accordent à prouver qu'elle est la même dans toutes les autres parties.

On fait que c'est à la quantité de vaisseaux, qu'il faut attribuer le principal volume des parties des animaux; d'où il est aisé de conclure que la masse des fluides excède considérablement celle des solides: or ces mêmes fluides ayant dans l'état d'organisation & de vie, un mouvement progressif continuels qui leur fait parcourir les cavités des différens vaisseaux, ils sont constamment renfermés par les parois de ces vaisseaux, & ne peuvent se dissiper ou se répandre que lorsqu'ils sont parvenus à la surface extérieure du corps ou des différens viscères.

Cette dernière considération donne l'idée d'un mécanisme particulier des anastomoses dont aucun auteur n'a encore parlé. Le sang poussé par le cœur dans les principales artères, pénètre rapidement & à la fois dans toutes les ouvertures des vaisseaux collatéraux; la colonne de ce liquide qui parcourt l'aorte est donc divisée en autant de petites colonnes qu'il y a d'orifices collatéraux à l'aorte, & le diamètre de ces colonnes, est parfaitement proportionnel à celui des orifices. Il en est de même des rameaux principaux qui fournissent eux-mêmes d'autres divisions.

Il est d'ailleurs prouvé que le mouvement du sang dans une branche principale, ne diffère pas sensiblement du mouvement de ce liquide dans le tronc du vaisseau.

Ces principes admis, il suit que le sang pénétrant à la fois du tronc d'une artère dans la cavité de deux rameaux qui

s'anastomosent, présente deux colonnes de liquide dont le mouvement très-rapide, est directement opposé. Qu'on prenne pour exemple la célèbre anastomose de Riolan, qui réunit les deux artères mésentériques: il est clair que le sang poussé de l'aorte dans l'artère mésentérique supérieure, ira nécessairement rencontrer dans l'anastomose, le sang poussé de la même aorte dans l'artère mésentérique inférieure; & ce concours fera plus ou moins rapproché de l'aorte, selon que l'espace parcouru par l'une des deux colonnes de liquide sera plus ou moins grand.

Mais ces deux courans de liquide à peu-près égaux par la masse & la force, étant mus dans des sens contraires & contenus par les parois des vaisseaux, doivent nécessairement se heurter à leur point de concours & refluer avec une force proportionnée à celle du choc; il doit donc y avoir reflux dans les deux troncs qui forment l'anastomose. Il est évident que les fluides aussi peu pénétrables que les solides, ne peuvent point se disperser tant qu'ils sont contenus dans leurs vaisseaux, le mouvement de reflux est donc un effet nécessaire du mouvement direct.

Le nombre infini d'anastomoses & les effets qu'elles produisent sur le mouvement progressif des liquides, forment donc un élément nécessaire à considérer avant que d'établir les loix d'une circulation uniforme & non-interrompue.

Les observations & les expériences s'accordent à prouver les principes que je viens d'établir.

I.<sup>re</sup>  
Expérience. Ayant découvert une partie du mésentère sur un chien vivant, je liai, vers son milieu, une des anastomoses artérielles les plus sensibles; la ligature étoit serrée au point d'interrompre le passage du sang; j'ouvris ensuite le vaisseau au-dessous de la ligature, le sang sortit avec impétuosité par l'ouverture: ayant bouché cette ouverture, j'en fis une semblable au même vaisseau au-dessus de la ligature, & le sang sortit avec la même rapidité par cette nouvelle ouverture; donc le sang pénètre dans l'anastomose par l'une & l'autre des branches qui la forment.

J'adaptai une seringue remplie d'eau à chacune des extrémités d'un tuyau de verre recourbé; j'avois mêlé à l'eau contenue dans ces seringues, différens corpuscules qu'on pouvoit facilement apercevoir à travers le verre; je frappai ensuite, par un même coup, les deux pistons, & le liquide pénétra à la fois dans le tuyau par les deux extrémités; les deux courans s'étant heurtés vers le milieu du trajet du tuyau, la liqueur reflua vers les extrémités, & les pistons furent repoussés par le seul reflux du liquide: on voyoit très-distinctement à travers les parois du tuyau, les corpuscules mêlés à l'eau, avoir un mouvement rétrograde.

J'attachai dans la cavité d'un tuyau de verre considérable, deux membranes qui imitoient assez bien la forme des valvules; chacune des membranes adhéroit à l'intérieur du tuyau par une partie de sa circonférence; l'autre partie étoit libre ou flottante, & interceptoit presque en entier la cavité du tuyau; la longueur totale du tuyau étoit de 15 pouces, & l'espace compris entre les deux membranes étoit de 9 pouces; ayant adapté les deux seringues, comme dans l'expérience précédente, & ayant frappé à la fois les deux pistons, la liqueur, en pénétrant, souleva les deux membranes en les inclinant l'une vers l'autre; mais après la collision, le reflux du liquide souleva ces mêmes membranes dans un sens tout opposé.

Il y a donc reflux du liquide après le choc dans l'une & dans l'autre des branches qui forment l'anastomose; donc ce mouvement de reflux du sang de l'anastomose, s'opposera en partie au mouvement direct du nouveau sang envoyé par une nouvelle contraction du cœur.

D'où il suit que le liquide, mu dans nos vaisseaux, présente des oscillations ou des *allées* & des *venues* perpétuelles, qui troublent ou modifient le mouvement direct & progressif.

On peut m'opposer que les parois d'un tuyau de verre sont trop solides pour être comparées avec raison à celles des vaisseaux des animaux: c'est pour répondre à cette objection, que j'ai fait l'expérience suivante.

IV.<sup>e</sup>  
Expérience.

Je détachai d'un cadavre l'artère-aorte, depuis son origine ou sa courbure, jusqu'à la division des iliaques primitives; je liai exactement tous les rameaux, qui s'en séparent dans ce trajet, de manière qu'elle ne présentait qu'un même conduit, dont les seules extrémités étoient ouvertes. Ayant alors adapté les deux seringues, comme dans l'expérience ci-dessus, & ayant frappé les deux pistons, la liqueur injectée dans l'aorte gonfla ce vaisseau, & après le choc des deux jets de liqueur, les deux pistons furent repoussés comme dans la seconde expérience.

La ressemblance ici est donc parfaite & la souplesse des tuyaux ne s'oppose ni au choc, ni au reflux qui en est la suite.

Comme le sang se meut avec rapidité dans nos vaisseaux, & que la pulsation des différentes artères est sensiblement homochrone dans les différentes parties; on peut en conclure très-probablement que dans le même instant (exprimé par la systole du cœur), tous les rameaux des artères sensibles, reçoivent le sang envoyé par ce viscère. Il y aura donc des collisions ou des chocs simultanés dans les différentes anastomoses, & les reflux des liquides après le choc, offriront la même simultanéité.

On n'a que la seule conjecture pour évaluer la quantité de mouvement du sang avant le choc, la mesure des effets de ce choc sur les vaisseaux & la force du reflux; mais en abandonnant cette source de théories arbitraires, & reconnoissant l'impossibilité de donner l'exacte solution de ces problèmes, il reste toujours démontré que nos liquides se choquent dans nos vaisseaux & qu'ils refluent après le choc; d'où il suit que le sang & les différentes liqueurs, ont plusieurs forces qui leur sont imprimées.

La force directe imprimée par le cœur ou par l'action des vaisseaux.

Le mouvement de reflux produit par le choc des deux masses de liquides, mues en sens contraires, & la force expansive dont l'effet est prévenu par les parois des vaisseaux.

Il est aisé de démontrer que ces différentes forces imprimées aux liquides exercent sur les vaisseaux même une action mécanique, & la plus légère attention sur ce que j'ai déjà dit, suffiroit pour le persuader.

Qu'on injecte un peu rapidement un liquide dans un tuyau flexible & recourbé en différens sens; qu'on place ce tuyau, ou si l'on veut, ce vaisseau, sur un plan fixe; on verra au moment où le liquide y pénètre, le tuyau s'élever, se redresser pour ainsi dire, se raccourcir plus ou moins, & affecter la ligne droite.

J'ai suspendu un petit poids à l'une des extrémités d'une artère, & j'ai adapté une seringue remplie d'eau à l'autre extrémité; le vaisseau posé sur un plan étoit affaissé & recourbé: lorsque j'ai poussé la liqueur en prenant le piston, le vaisseau s'est élevé comme par *soubresaut*, en soulevant le poids suspendu à l'autre bout, & les flexuosités ont disparu.

V.  
Expérience.

Les vaisseaux sont donc mus mécaniquement par le liquide qui les parcourt, ou ce qui est de même, ils éprouvent une *loco-motion*; il paroît même en pesant les circonstances de cette cinquième expérience, que la quantité de cette action mécanique ou de la loco-motion, est proportionnelle au mouvement du liquide & à la flexuosité du vaisseau. En effet, le liquide injecté dans un vaisseau droit, imprime un *soubresaut* moins sensible que dans un vaisseau fléchi ou recourbé. Il faut pourtant observer que si l'on pousse le liquide en pressant successivement le piston des seringues, on n'aperçoit pas le *soubresaut* vif & rapide dont il est ici question; les vaisseaux changent seulement de position en se redressant, ils se gonflent & se raccourcissent, & tous ces changemens ne sont que successifs; mais si l'on frappe les pistons ou que leur pression s'opère avec quelque *prestesse*, alors on voit manifestement tout ce que j'ai dit ci-dessus.

J'ouvris le bas-ventre d'un chien vivant & examinant avec attention le mésentère que j'avois étendu, je vis avec quelque étonnement tout le système artériel de cette partie, se mouvoir sensiblement & s'élever comme un réseau tendu

VI.  
Expérience.

qu'on auroit pincé & soulevé; le mouvement des vaisseaux entraînoit & soulevoit les membranes, & les petits corps qui se trouvoient dans leur voisinage: ayant placé mon doigt à une petite distance au-dessus de quelques-uns de ces vaisseaux, je les vis très-manifestement aller à la rencontre du doigt, & les plus petites artères me présentèrent un mouvement sensible à l'œil & au tact.

J'assurerais même (sans craindre de m'être laissé éblouir par l'envie d'observer & de découvrir) qu'en considérant une anastomose, formée par la réunion de deux rameaux d'artères principales, j'aperçus dans cette anastomose un mouvement d'érection ou de redressement, qui succédoit immédiatement à chaque systole du cœur; ce mouvement soulevoit l'origine des troncs artériels de l'anastomose, & le tissu cellulaire & la vraie lame du péritoine, étoient entraînés par le mouvement imprimé au vaisseau.

M. de la Mure, en éclaircissant & rectifiant l'opinion de Weitbrecht, a démontré, contre l'opinion commune, que le battement sensible des artères ne peut pas être attribué à leur seule dilatation; ou, ce qui est de même, à l'écartement des parois de l'axe du vaisseau, produit par la pression latérale du sang (*Mémoires de l'Acad. des Sciences, année 1765*). C'est ce qui est démontré par les différentes expériences que je fis à ce sujet sur sa demande, & dont il me fournit lui-même les premières idées; mais en accordant à cet illustre Médecin le plus juste tribut d'éloges, il me paroît qu'il s'est trop précipitamment déterminé à prétendre que le *battement ou la loco-motion de tout le système artériel, dépend du mouvement imprimé aux vaisseaux par la loco-motion du cœur*. En rappelant la faculté pulsifque de Galien, il semble supposer, non sans obscurité, que le mouvement est imprimé physiquement & mécaniquement tout-à-la-fois aux parois des artères.

Pour peu qu'on réfléchisse sur la structure des parties, on sentira que le mouvement imprimé par le cœur aux parois de l'aorte, doit sensiblement diminuer à mesure qu'il se communique



communiqué aux rameaux artériels, bridés dans tout leur trajet par des membranes, & comme enfilés dans un tas de parties molles. En effet, ces parois des artères souples & molles, sont fléchies, comprimées, assujetties en des millions de sens dans leur trajet à travers les organes, de manière qu'il est impossible, même au premier abord, de supposer que le mouvement imprimé par le cœur, puisse s'étendre comme un éclair jusqu'aux extrémités du système artériel.

Qu'on pèse ces réflexions, & l'on conclura que le mouvement de vibration imprimé par le cœur à l'artère-aorte, s'étend à peine au-delà de la poitrine & s'évanouit insensiblement, en s'étendant d'une partie de ce vaisseau aux parties plus éloignées. L'assertion de cet illustre Auteur, seroit plus admissible, si l'on pouvoit concevoir le système artériel comme une suite de tuyaux inflexibles ou métalliques attachés bout à bout, ce qui répugne à l'observation & aux faits.

Le même Auteur avance, d'après les principes, que *la branche artérielle battra d'autant plus fortement, qu'elle sera plus tendue & plus ferme*; ce que l'observation ne démontre pas: en effet, le battement des artères du carpe est absolument le même, soit qu'on fléchisse, soit qu'on étende le bras; on remarque la même chose sur les artères du pied, sur toutes les parties des animaux, dans quelque position que l'on place leurs membres, qu'on tende ou qu'on relâche leurs artères.

Consultons encore l'expérience.

Ayant ouvert à la fois la poitrine & le bas-ventre d'un chien très-robuste, je renversai les poumons vers le côté droit de la poitrine, pour découvrir l'artère-aorte dans tout son trajet depuis son origine; j'étendis aussi le mésentère, & je vis d'un même coup-d'œil le cœur, l'aorte & les artères mésentériques se mouvoir dans le même temps; en observant, avec plus d'attention, je vis très-clairement que le mouvement des artères mésentériques étoit (relativement, & toutes choses d'ailleurs égales) infiniment plus fort & plus vif que celui de l'aorte: je m'explique; le mouvement du tronc de l'aorte suffisoit à peine pour l'élever à une ligne & demie ou

VII.  
Expérience.

Mém. 1772. II.<sup>e</sup> Partie.

M m m m

deux lignes au-dessus de la position ; c'est-à-dire, que la plus grande partie de ce vaisseau occupoit, pendant l'élevation ou le *soubresaut*, le même espace qu'elle occupoit avant l'élevation ; mais une artériole mésentérique, que j'avois prise pour terme de comparaison, se déplaçoit entièrement pendant l'élevation ou le *soubresaut*, de manière que s'élevant très-sensiblement & à l'œil & au tact, elle quittoit entièrement la place qu'elle avoit précédemment occupée.

Cette expérience très-aisée à répéter, m'a constamment présenté les mêmes faits ; & il n'est personne qui ne sente d'abord les conséquences intéressantes qu'on peut en déduire pour la théorie du pouls, & les forces du sang contenu dans nos vaisseaux.

Je me borne à en conclure ici, que la conservation & l'augmentation de mouvement d'une petite artère mésentérique, ne peuvent point dépendre de l'impulsion communiquée par le cœur aux parois de l'aorte, ce qui étoit à démontrer.

Il existe donc une autre cause génératrice de mouvement dans les vaisseaux, indépendamment de la *loco-motion* ou du déplacement du cœur & de l'aorte.

Si l'on dirige l'attention sur les différentes parties du système vasculaire, on ne peut s'empêcher d'y remarquer plusieurs circonstances qui rendent cette question facile à résoudre.

Plus on s'éloigne du cœur en allant vers les parties, plus les anastomoses artérielles sont grandes & multipliées.

On trouve dans les mains deux anastomoses aux deux arcades artérielles, qu'on appelle *arcades palmaires*, l'une superficielle, l'autre plus profonde ; de ces arcades partent deux rameaux artériels pour chacun des doigts, & ces deux rameaux s'anastomosent eux-mêmes lorsqu'ils sont parvenus au bout des doigts auxquels ils se distribuent.

Chacune des arcades de la main, égale par son diamètre les artères cubitale & radiale qui la fournissent.

On voit de même au pied une anastomose considérable

appelée *arcade plantaire*, qui réunit l'artère tibiale avec la péronière; de cette arcade partent des rameaux qui se distribuent aux orteils, comme ceux de la main; l'artère tibiale antérieure s'insérant entre le gros orteil & la racine du doigt qui le touche, va se confondre avec cette arcade; d'où il résulte une anastomose à trois branches.

Les différentes artères des bras & des jambes, communiquent très-fréquemment ensemble dans leur trajet, soit par des rameaux considérables aux environs du coude & du genou, telles sont les artères collatérales; soit par des rameaux moins apparens, mais qui ne laissent pas d'être toujours sensibles.

Qu'on parcoure la tête, on verra extérieurement les rameaux des deux carotides externes se réunir en devant & en arrière; sur la gorge, autour des lèvres, sur le nez, les yeux, le front, le sommet de la tête, la nuque. On verra intérieurement les artères épineuses se confondre plusieurs fois sur la dure-mère: les deux carotides internes s'anastomoser fréquemment dans toute la substance du cerveau, & se réunir enfin avec les deux artères vertébrales, soit au-dessus du corps calleux, soit au-dessous du cerveau sur l'apophyse basilaire de l'os occipital.

Bien plus; l'artère qu'on appelle *basilaire* n'est qu'une quadruple anastomose très-considérable, formée par la réunion des deux vertébrales & des deux carotides internes; comme si la Nature eût voulu prévenir par cet artifice, les effets du poids du cerveau!

L'anastomose des artères épygastriques avec les mammaires internes au-dessous des enveloppes de l'abdomen, les milliers d'arcades artérielles formées par les deux mésentériques; tout le tissu des viscères & des glandes parsemé d'arcades semblables, témoignent bien clairement que cette disposition constante n'est point un jeu de la Nature.

Qu'on prenne les reins pour exemple, parmi les viscères; qu'on injecte par les artères émulgentes, une liqueur concrécible & colorée, & qu'on coupe ensuite le rein par une section qui sépare ses deux faces, en commençant par la

grande courbure , comme on le pratique dans les démonstrations anatomiques. On verra alors toute la surface interne mise à nu par la section , présenter des millions d'arcades vasculaires d'inégale grandeur. L'œil muni d'un microscope , découvrira une foule de tuyaux droits & comme parallèles qui partent de la convexité de ces arcades , pour se porter vers les mamelons du rein. On voit de pareils vaisseaux parallèles partir des petites anastomoses mésentériques , pour se répandre sur les intestins , & s'anastomoser entr'eux sur l'intestin même.

Si l'on pèse ces différentes considérations , on verra , si je ne me trompe , quelle est la cause à laquelle il faut rapporter la loco-motion ou le mouvement des artères dans les parties éloignées du cœur. On trouvera même une nouvelle cause de mouvement ou de déplacement dans ce dernier viscère , en considérant les anastomoses considérables & multipliées des artères coronaires.

Le sang se meut d'une partie dans une autre ; mais tant qu'il est renfermé dans ses vaisseaux , il forme des courans dont les directions sont souvent contraires , il reflue , meut & soulève les vaisseaux , s'oppose aux courans partis du cœur , est de nouveau entraîné par une impulsion nouvelle , & confondant dans ces chocs répétés les différentes parties hétérogènes , il devient sans doute plus propre à fournir la matière des sécrétions.

Il faudroit peut-être s'arrêter ici pour résoudre une objection qui dérive de ce que je viens de dire. D'où vient en effet que tant d'obstacles multipliés , tant de mouvemens contraires dans le sang , n'arrêtent point son mouvement direct , & n'éteignent point le mouvement du cœur ?

Je destine la solution de cette difficulté pour un autre Mémoire : il me suffit d'observer que le mouvement direct du sang est beaucoup moins considérable dans le fait , qu'on ne l'a présumé d'après les loix de la circulation. Les expériences m'ont appris à douter de la vérité des hypothèses généralement reçues.

Il me reste encore à considérer les autres espèces d'anatomoses.

Les dernières ramifications des artères vont aboutir aux extrémités des veines ; le sang artériel passe dans les veines & revient au cœur, pour être de nouveau renvoyé vers les parties : telle est la loi de la circulation reconnue & démontrée par Harvée. Mais ce n'est point par un cours uniforme & non interrompu que le sang veineux va des parties au cœur ; il a souvent des directions opposées dans la marche, il reflue comme le sang artériel lui-même, & ses reflux sont même soumis à d'autres loix.

Les observations & les expériences de M.<sup>rs</sup> Schligting, Haller, de la Mure, ont démontré que le cerveau des animaux vivans dont on ouvre le crâne, a un mouvement sensible, parfaitement homochrone aux mouvemens de la respiration. Si l'on examine le cerveau durant ce mouvement, on voit les sinus & les autres veines de ce viscère se gonfler durant l'expiration, & se rider pendant l'inspiration (*Voyez les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1749*). Qu'on mette à nu les veines jugulaires internes sur un chien vivant, en observant de ne point couper de vaisseau sanguin considérable ; qu'on dépouille en grande partie ces veines du tissu cellulaire qui les couvre ; on verra aisément à travers leurs parois le sang qu'elles contiennent refluer vers la tête pendant l'expiration, & revenir, par une direction contraire, au moment où l'animal inspire.

On observe le même reflux sur les veines iliaques où le sang semble aussi avoir, durant l'expiration, un mouvement rétrograde qui le porte vers les cuisses.

Il paroît que M. de la Mure a assigné la cause la plus probable de ce mouvement du sang veineux, en l'attribuant à la pression des poumons sur les veines-caves, au moment de l'expiration (*Voyez les Mém. de 1749*).

Quoi qu'il en soit de la cause particulière de ce phénomène, le sang veineux reflue incontestablement du cœur vers les parties durant l'expiration.

J'omets à dessein une foule d'autres causes accidentelles qui impriment au sang veineux un mouvement rétrograde ou qui en suspendent le cours pour des instans plus ou moins longs. Telles sont les passions vives & subites, comme la colère, la peur, &c.

Mais les veines ne battent point, quoiqu'elles présentent de fréquentes anastomoses, & que d'ailleurs le sang des grosses veines aille souvent heurter, par un mouvement rétrograde, celui qui coule dans les petites; d'où il s'en suivroit que le reflux ne peut être regardé comme la cause du déplacement ou du battement des vaisseaux. Qu'on pèse les observations suivantes, & cette objection sera nulle, si je ne me trompe.

Les valvules dispersées dans la cavité des veines s'opposent sans doute à la liberté du reflux; de-là le cours naturel du sang veineux sera moins troublé que celui du sang artériel; les veines seront tout-au-plus distendues par le volume du sang rétrograde vers l'insertion des valvules, elles présenteront des petits sinus ou des espèces de varices momentanées jusqu'à ce que le cours naturel vers les gros troncs soit rétabli.

Le cours du sang est d'ailleurs continu dans les veines, il ne s'y fait point par jet comme dans les artères, le choc des courans y sera donc moindre, & par conséquent le reflux moins considérable.

S'il est vrai que le mouvement rétrograde du sang dans les veines jugulaires dépende de la cause indiquée par M. de la Mure, il s'ensuit nécessairement (comme le prouvent les expériences que j'ai rapportées), qu'une cause qui agit successivement & comme par degrés doit aussi produire un reflux lent & successif; il n'y aura donc point de choc dans le reflux veineux, mais il y aura simplement un gonflement du vaisseau. Et en effet, dans les fortes expirations, les veines jugulaires paroissent se gonfler & se distendre; que si par hasard l'expiration est subite & vive, comme on l'observe dans l'éternuement, on sent alors ces mêmes vaisseaux battre plus ou moins sensiblement, comme il est aisé à chacun de l'éprouver.

Je citerai en preuve de ceci un phénomène assez singulier

& nouveau, que j'ai aperçu une seule fois dans le cours de mes expériences.

M'appliquant à examiner les vaisseaux rénaux d'un chien encore vivant, il me parut que durant l'expiration, le sang des veines rénales étoit repoussé vers les reins par un mouvement rétrograde. Ayant renversé tous les intestins du côté droit, je vis le rein gauche se mouvoir & se soulever à chaque reflux. Frappé par la singularité de ce mouvement, j'examinai avec beaucoup d'attention dans quel moment s'opéroit le mouvement de ce viscère, & je me convainquis qu'à chaque inspiration de l'animal, sur-tout lorsqu'elle étoit vive & forte, il se faisoit un reflux dans la veine émulgente qui communiquoit à la masse du rein un mouvement sensible. Je séparai le rein du tissu cellulaire, dans lequel il est comme enléveli, dans le dessein de m'assurer si ce mouvement ne dépendoit pas du mouvement convulsif, qui se faisoit quelquefois dans l'abdomen, & ayant passé une main au-dessous du rein, je comprimai fortement la région lombaire contre la table qui servoit à l'expérience; je plaçois le rein sur la paume de ma main, en lui conservant à peu-près la position naturelle, & j'aperçus encore le même soulèvement à chaque reflux du sang, lorsque l'expiration étoit forte & rapide.

VIII.  
Expérience.

Les observations que j'ai faites sur différens cadavres humains, m'ont démontré une variété singulière dans le nombre, la forme & la position des valvules des veines: je renvoie à un autre Mémoire le détail de ce que m'ont appris ces observations, & je crois qu'il en résultera une nouvelle preuve de ce que je viens d'avancer.

Il semble que le mouvement du cœur communiqué à l'aorte, & qu'on peut regarder comme la cause principale du déplacement de ce vaisseau, doit aussi se communiquer aux veines-caves, & y produire un déplacement semblable, & par conséquent un battement.

On peut observer à cet égard, 1.<sup>o</sup> que le tissu des veines est beaucoup plus lâche & plus foible, elles seront donc moins propres à la communication du mouvement.

2.<sup>o</sup> Les veines-caves ne se joignent au cœur qu'au moyen des oreillettes, dont le tissu est aussi fort lâche &, pour ainsi dire, membraneux.

3.<sup>o</sup> Ces veines marchent directement ou en ligne droite du cœur vers les parties. L'aorte, au contraire, d'un tissu très-fort, s'attachant immédiatement à la base du cœur, se recourbe très-près de ce viscère, & son arc résiste ou s'oppose au premier jet du sang lancé dans sa cavité. On peut en dire autant de l'artère pulmonaire qui se divise en deux grosses branches recourbées, pour aller aux deux lobes des poumons. Ces considérations réunies me paroissent détruire tout le spécieux de l'objection que je me suis faite.

Il resteroit quelque chose à ajouter sur la circulation particulière du sang dans les veines de la plupart des viscères du bas-ventre qui servent à la digestion. Ces veines n'ont point de valvules & s'abouchent dans un réservoir commun appelé *veine porte*. Les observations semblent indiquer que cette grosse veine, qui fait fonction d'artère, jouit quelquefois d'un battement; & je n'oserois nier que, dans l'état naturel, elle ne pût être entièrement comparable aux artères, & par le mouvement, & par les usages. Je laisse à l'expérience à décider cette question.

Il résulte de tout ce que j'ai dit dans ce Mémoire, une foule de conséquences utiles sur le mécanisme naturel du poulx, sur les *anomalies* individuelles & particulières, sur la théorie des sécrétions & sur le mouvement vital des parties, que je laisse à tirer à d'autres.

*Nota.* Depuis que nous avons reçu ce Mémoire, l'Auteur est mort à la fleur de son âge & au milieu de ses travaux, fort regretté, & avec juste raison, de ses amis & de tous ceux qui le connoissoient. Nous nous sommes cru obligés de prévenir de la mort de cet habile Anatomiste, afin qu'on ne comptât pas sur les Mémoires qu'il promet dans celui-ci; cependant il est fort à souhaiter que quelqu'un veuille continuer ses recherches sur une partie de la Physiologie aussi intéressante que les anastomoses & leurs effets.

F I N.







